Análise Com Volumes de Controle Finitos: Conservação da Energia

PME 3230 - Mecânica dos Fluidos I

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

2° Semestre de 2016

Conteúdo da Aula

Introdução

A Equação da Conservação da Energia é conhecida também como Primeira Lei da Termodinâmica. Esta lei afirma que ”a energia não pode ser criada nem destruída durante um processo; ela só pode ’mudar’ de forma.”

A transferência de qualquer quantidade (como massa, quantidade de movimento e energia) é reconhecida na fronteira (SC) à medida que a quantidade cruza a fronteira.

A energia de um sistema por der alterada apenas por dois mecanismos: transferência de calor, Q, e trabalho, W.

Designando por E a quantidade total de energia de um sistema (medida em J), então, e será a energia específica total do sistema (medida em J/kg). Em termos de taxas, pode-se escrever para um sistema:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{sist} = \dot{Q}_{tot} + \dot{W}_{tot} \quad (1)$$

onde $\dot{Q}_{tot}$ é a taxa de transferência de calor total para o sistema; e $\dot{W}_{tot}$ é a potência (associada ao trabalho) total transferida ao sistema. Em termos de entradas (subscrito e) e saídas (subscrito s) essas duas quantidades podem ser escritas como:

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_e - \dot{Q}_s \; ; \; \dot{W}_{tot} = \dot{W}_e - \dot{W}_s$$

Conservação da Energia para um Sistema

Calor é energia em trânsito devido a uma diferença de temperatura. **Trabalho** é energia em trânsito devido a qualquer outro potencial que não seja uma diferença de temperatura. Calor por unidade de tempo é chamado de de taxa de transferência de calor. Trabalho por unidade de tempo é chamado de potência. Quando um processo não apresenta transferência de calor ele é chamado de *adiabático*. Maiores detalhes sobre estes conceito serão amplamente abordados no curso de *Termodinâmica*.

Neste curso admite-se que apenas energias potencial (e_p), cinética (e_c) e interna, ou térmica, (u) totalizam a energia de um sistema:

$$e = e_p + e_c + u = g.z + \frac{V^2}{2} + u \tag{2}$$

Trabalho

Um sistema pode envolver diversas formas de trabalho durante um processo; neste curso admite-se que essas diferentes formas são:

$$W_{tot} = W_{eixo} + W_{pressao} + W_{viscosidade} + W_{outros} \tag{3}$$

onde:

- $W_{eixo} \equiv$ trabalho transmitido por um eixo giratório;
- $W_{pressao} \equiv$ trabalho transmitido pelas forças devidas à pressão sobre a SC;
- $W_{viscosidade} \equiv$ trabalho transmitido pelas componentes normais das tensões de cisalhamento (associadas às forças viscosas);
- $W_{outros} \equiv$ quaisquer outras formas como elétrica, magnética, etc.

A Eq. (3) pode ser escrita da mesma forma em termos de potências.

Potências

Potência de Eixo: muitos sistemas de escoamento envolvem bombas, turbinas, ventiladores e compressores, cujos eixos atravessam a SC:

$$\dot{W}_{eixo} = T_{eixo}.\omega = 2.\pi.n.T_{eixo} \tag{4}$$

onde T_{eixo} é o torque no eixo; ω é a velocidade angular; e n é a frequência de giro do eixo. Note que n na Eq. (4) é dado em Hz. Muitas máquinas fornecem esta frequência em ”rotações por minuto”, rpm. Nestes casos, deve-se efetuar primeiro a divisão desta rotação por 60 para conversão de rpm para Hz.

Potência Devida às Forças de Pressão: a pressão sempre atua comprimindo a SC. Como o versor da área da SC aponta para fora, o produto escalar da força devido à pressão e da área resulta negativo. Assim, acrescenta-se um sinal negativo à definição desta potência para compensar, uma vez que, por convenção, toda potência exercida sobre o sistema é considerada positiva (contrário da convenção em Termodinâmica):

$$\dot{W}_{pressao} = -\int_{SC} p.\vec{V} \bullet d\vec{A} = -\int_{SC} \frac{p}{\rho} \cdot \rho \cdot \vec{V} \bullet d\vec{A} \tag{5}$$

Potências

Potências Devidas às Forças Viscosas e Outros: as constribuições das componentes normais das tensões de cisalhamento e de outras formas, neste curso, são desprezíveis. Assim,

$$\dot{W}_{viscosidade} = \dot{W}_{outros} \approx 0 \tag{6}$$

Substituindo as Eqs. (4), (5) e (6) na Eq. (1), resulta:

$$\dot{Q}_{tot} + \dot{W}_{eixo} - \int_{SC} \frac{p}{\rho} \cdot \rho \cdot \vec{V} \bullet d\vec{A} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{sist} \tag{7}$$

A este ponto convém introduzir o Teorema do Transporte de Reynolds para, a partir da formulação obtida para um sistema [Eq. (7)] se obter a variação da energia dentro do VC mais o fluxo líquido de energia através da SC por escoamento de massa.

Formulação para VC da Conservação da Energia

Cosidera-se, agora, o Teorema do Transporte de Reynolds com $N = E$ e $\eta = e$:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} e.\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A}$$

Substituindo a Eq. (7) na equação acima, resulta:

$$\dot{Q}_{tot} + \dot{W}_{eixo} - \int_{SC} \frac{p}{\rho} \cdot \rho \cdot \vec{V} \bullet d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} e.\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A} \tag{8}$$

Recordando que $\vec{V}$ é a velocidade do fluido em relação a um observador solidário à SC. Note que a formulação do terceiro termo do lado esquerdo da Eq. (8) guarda semelhança matemática do o segundo termo do lado direito. Assim, movendo-o para o lado direito, obtém-se:

$$\dot{Q}_{tot} + \dot{W}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho}\right).\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A} \tag{9}$$

Formulação para VC da Conservação da Energia

O termo $p/\rho = p.v$ é chamada trabalho de escoamento: trabalho necessário para empurrar o fluido para ou do VC. Introduzindo a Eq. (2):

$$\dot{Q}_{tot} + \dot{W}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + g.z\right).\rho.\vec{V}\bullet d\vec{A} \qquad (10)$$

Introduzindo o conceito de vazão mássica e recordando que o último termo da Eq. (10) representa a soma de todas as entradas e saídas no VC, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{tot} + \dot{W}_{eixo} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e.\rho.d\mathcal{V} + \sum_{i=0}^{n_s}\dot{m}_i\cdot\left(\frac{p_i}{\rho_i} + u_i + \frac{V_i^2}{2} + g.z_i\right) - \\ &+ \sum_{j=0}^{n_e}\dot{m}_j\cdot\left(\frac{p_j}{\rho_j} + u_j + \frac{V_j^2}{2} + g.z_j\right) \qquad (11)\end{aligned}$$

onde $i = 0, 1, 2, \ldots n_s$ são as saídas e $j = 0, 1, 2, \ldots n_e$ são as entradas.

Formulação para VC da Conservação da Energia

O termo $p/\rho + u + V^2/2 + g.z$ pode ser escrito como $h + V^2/2 + g.z$, onde h é conhecida como entalpia específica do fluido (medida em J/kg):
$h = u + p/\rho = u + p.v$.

Para escoamentos em regime permanente e introduzindo a propriedade entalpia específica, a Eq. (11) fica:

$$\dot{Q}_{tot} + \dot{W}_{eixo} = \sum_{i=1}^{n_s} \dot{m}_i \cdot \left(h_i + \frac{V_i^2}{2} + g.z_i \right) - \sum_{j=1}^{n_e} \dot{m}_j \cdot \left(h_j + \frac{V_j^2}{2} + g.z_j \right) \qquad (12)$$

Recordando que, para condição de regime permanente, os contadores dos somatórios devem iniciar em 1.

A grande maioria dos problemas práticos para os quais se usa formulação integral para volumes de controle envolvem apenas uma entrada e uma saída. Designando por 1 e 2 a entrada e a saída, respectivamente e dividindo a Eq. (12) por $\dot{m}$ $(= \dot{m}_1 = \dot{m}_2)$, resulta:

Formulação para VC da Conservação da Energia

$$q_{tot} + w_{eixo} = h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g.(z_2 - z_1) \tag{13}$$

onde,

$$q_{tot} = \frac{\dot{Q}_{tot}}{\dot{m}} \tag{14}$$

e,

$$w_{tot} = \frac{\dot{W}_{tot}}{\dot{m}} \tag{15}$$

Uma vez que $h = u + p/\rho$, pode-se rearranjar a Eq. (13) da seguinte maneira:

$$w_{eixo} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + g.z_2 + (u_2 - u_1 - q_{tot}) \tag{16}$$

O lado esquerdo da Eq. (16) representa a entrada de energia mecânica e os três primeiros termos do lado direito direito representam a saída de energia mecânica.

O termo $(u_2 - u_1 - q_{tot})$ representa a quantidade de energia convertida em energia térmica. Para escoamentos sem irreversibilidades, tais como o atrito, a energia mecânica total deve ser conservada. Para estes casos $u_2 - u_1 - q_{tot} = 0 \Rightarrow q_{tot} = u_2 - u_1$.

Qualquer aumento de $(u_2 - u_1)$ acima de q_{tot} se deve a conversão irreversível de energia mecânica em térmica. Deste modo, entende-se que:

$$e_{mec,perda} = u_2 - u_1 - q_{tot} \tag{17}$$

Seguindo este raciocínio, a Eq. (16) pode ser escrita como:

$$e_{mec,e} = e_{mec,s} + e_{mec,perda} \tag{18}$$

Uma vez que w_{eixo} representa todos os trabalhos específicos de eixo presentes entre 1 e 2, pode-se escrver que $w_{eixo} = w_{eixo,e} - w_{eixo,s} = w_{bomba} - w_{turbina}$, w_{bomba} e $w_{turbina}$ representam todas as bombas (entrada de energia no escoamento) e turbinas (saídas de energia do escoamento) presentes entre 1 e 2.

Introduzindo estes conceitos na Eq. (16) pode-se escrever que:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + g.z_1 + w_{bomba} = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + g.z_2 + w_{turbina} + e_{mec,perda} \tag{19}$$

Multiplicando a Eq. (19) por $\dot{m}$ obtém-se a equação da energia mecânica na forma de taxas (watts):

$$\dot{m} \cdot \left(\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + g.z_1 \right) + \dot{W}_{bomba} = \dot{m} \cdot \left(\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + g.z_2 \right) + \dot{W}_{turbina} + \dot{E}_{mec,perda} \tag{20}$$

Na a Eq. (19) o termo $e_{mec,perda}$ refere-se somente às prerdas relativas às irreversibilidades na tubulação. Porém, recorda-se aqui que também ocorrem perdas nas bombas e turbinas. Assim, a energia total perdida pode ser escrita como:

$$\dot{E}_{perda,total} = \dot{E}_{mec,perda,bomba} + \dot{E}_{mec,perda,turbina} + \dot{E}_{mec,perda,tubulação} \tag{21}$$

A Eq. (19) pode ser escrita na forma (unidade) de carga, metros, ao dividi-la por g:

$$\frac{p_1}{\gamma_1}+\frac{V_1^2}{2.g}+z_1+h_{bomba}=\frac{p_2}{\gamma_2}+\frac{V_2^2}{2.g}+z_2+h_{turbina}+h_L \tag{22}$$

onde,

$$h_{bomba}=\frac{w_{bomba}}{g}=\frac{\dot{W}_{bomba}}{\dot{m}.g} \tag{23}$$

e,

$$h_{turbina}=\frac{w_{turbina}}{g}=\frac{\dot{W}_{turbina}}{\dot{m}.g} \tag{24}$$

O termo h_L é conhecido como **perda de carga total da tubulação** (entenda-se aqui perda de energia <u>do fluido</u> na tubulação). O subscrito L vem do inglês técnico: *loss* (= perda).

Conceito de *Perda* de Energia

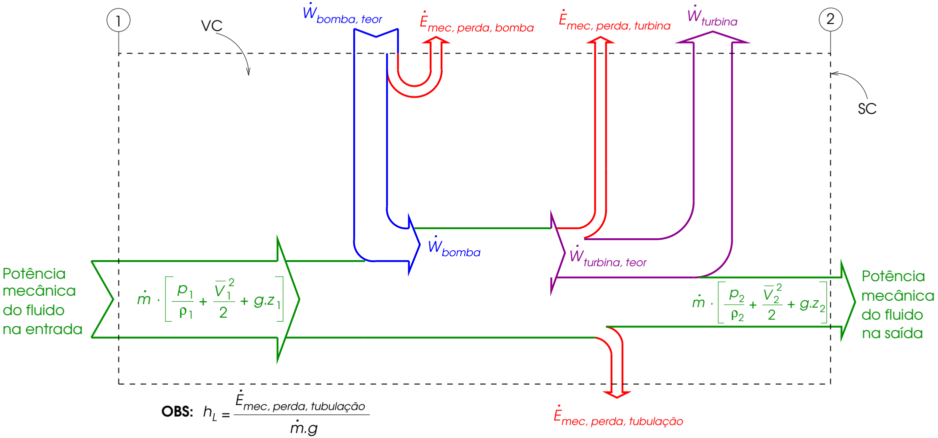
Nas Eqs. (22), (23) e (24), $\dot{W}_{bomba}$ (ou w_{bomba}) e $\dot{W}_{turbina}$ (ou $w_{turbina}$) devem ser entendidos como potência (ou trabalho) realmente transferido da bomba ao fluido e potência (ou trabalho) realmente recolhido pela turbina do fluido para realização de trabalho útil. Ou seja, são os valores dos trabalhos multiplicados pelas devidas eficiências:

$$h_{bomba} = \frac{\eta_{bomba}.\dot{W}_{bomba,teor}}{\dot{m}.g} \tag{25}$$

$$h_{turbina} = \frac{\eta_{turbina}.\dot{W}_{turbina,teor}}{\dot{m}.g} \tag{26}$$

Observe que, para escoamentos de fluidos incompressíveis sem perdas de carga $\left(h_L = 0\right)$, sem trabalho de eixo $\left(h_{bomba} = h_{turbina} = 0\right)$ a equação da energia reduz-se à equação de Bernoulli. A figura a seguir auxilia na compreensão dos conceitos apresentados:

Representação Gráfica do Balanço de Energia



OBS: $h_L = \dfrac{\dot{E}_{mec,\,perda,\,tubulação}}{\dot{m}.g}$

Fator de Correção da Energia Cinética

Define-se $\overline{V}$ como sendo o valor para o qual a multiplicação $\dot{m}.\overline{V}.A_c$ resulte na vazão mássica <u>real</u> do escoamento. Entretanto, para a parcela da energia cinética na Equação da Conservação da Energia, $V^2/2$, não se pode simplesmente usar $\overline{V}^2/2$, uma vez que o quadrado de uma soma não é igual à soma dos quadrados dos seus termos.

Este erro é corrigido pela substituição dos termos $V^2/2$ por $\alpha.\overline{V}^2/2$, onde α é o **fator de correção da energia cinética**. Para um fluido incompressível, pode-se fazer o seguinte desenvolvimento:

$$\dot{E}_c = \int_A \frac{1}{2} \cdot V^2(r) \cdot d\dot{m} = \int_A \frac{1}{2} \cdot V^2(r) \cdot \rho \cdot V(r) \cdot dA = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \int_A V^3(r) \cdot dA$$

$$\overline{\dot{E}}_c = \frac{1}{2} \cdot \dot{m} \cdot \overline{V}^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \overline{V}^3$$

$$\alpha = \frac{\dot{E}_c}{\overline{\dot{E}}_c} = \frac{1}{A} \cdot \int_A \left[\frac{V(r)}{\overline{V}} \right]^3 \cdot dA \tag{27}$$

Introduzindo o fator de correção da energia cinética, as duas formas mais utilizadas da Equação da Conservação da Energia ficam:

$$\dot{m}\cdot\left(\frac{p_1}{\rho_1}+\alpha_1\cdot\frac{\overline{V}_1^2}{2}+g.z_1\right)+\dot{W}_{bomba} = \dot{m}\cdot\left(\frac{p_2}{\rho_2}+\alpha_2\cdot\frac{\overline{V}_2^2}{2}+g.z_2\right)+ +\dot{W}_{turbina}+\dot{E}_{mec,perda} \quad (28)$$

$$\frac{p_1}{\gamma_1}+\alpha_1\cdot\frac{\overline{V}_1^2}{2.g}+z_1+h_{bomba}=\frac{p_2}{\gamma_2}+\alpha_2\cdot\frac{\overline{V}_2^2}{2.g}+z_2+h_{turbina}+h_L \quad (29)$$

Aplicando o conceito de fator de correção da energia cinética aos perfis de velocidade dos escoamentos laminares e turbulentos:

Escoamento Laminar:

$$V(r)=V_c\cdot\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\Rightarrow\overline{V}=\frac{V_c}{2}\therefore\alpha=2$$

Escoamento Turbulento:

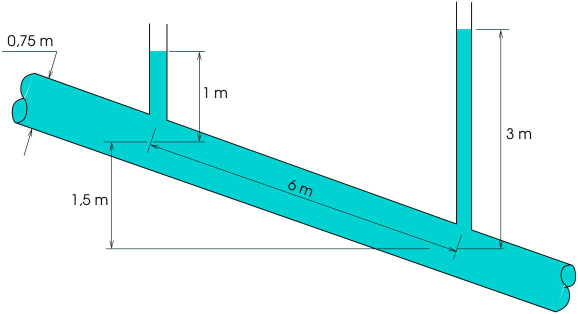
$$V(r) = V_c \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n \Rightarrow \overline{V} = \frac{2.V_c}{(1+n).(2+n)} \therefore \alpha = \frac{(1+n)^3.(2+n)^2}{4.(1+3.n).(2+3.n)}$$

n	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
α	1,106	1,077	1,058	1,046	1,037

Como os valores de $\alpha \approx 1$, na prática, para escoamento turbulento, costuma-se desprezar esta correção. Porém, quando há necessidade, geralmente adota-se $\alpha = 1,05$, a menos que se diga algo específico.

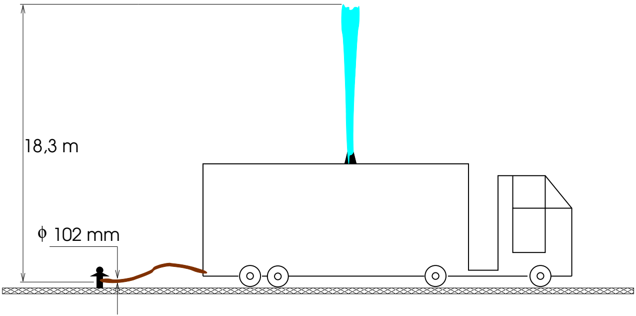
Exercício de Aula 1

Enunciado: Um líquido incompressível escoa no tubo mostrado na figura abaixo. Admitindo que o regime de escoamento é o permanente, determine o sentido do escoamento e a perda de carga no escoamento entre as seções onde estão instalados os manômetros. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 5.91]



Exercício de Aula 2

Enunciado: A vazão da bomba instalada no caminhão mostrado na figura abaixo é de $4,25 \times 10^{-2}$ m^3/s e o jato d'água lançado pelo canhão deve alcançar o plano que dista 18,3 m do hidrante. A pressão na seção de alimentação da mangueira, que apresenta diâmetro igual a 102 mm, é 69 kPa. Admitindo que a perda de carga no escoamento é pequena, determine a potência transferida à água pela bomba. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 5.107]

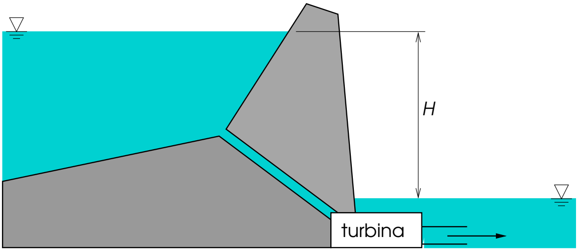


Munson, 4a. Ed, Exerc. 5.107 **(modificado)**

Exercício de Aula 3

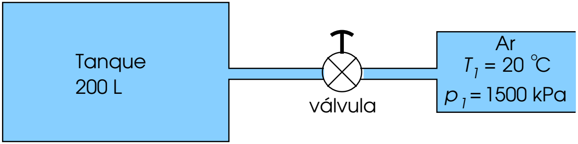
Enunciado: A vazão de ar de um pequeno ventilador é igual a 6,53 kg/h. O diâmetro do tubo de alimentação do ventilador é de 63,5 mm e o escoamento de ar neste tubo é laminar (perfil de velocidade parabólico e coeficiente de energia cinética igual a 2). O diâmetro do tubo de descarga do ventilador é 25,4 mm e o escoamento de ar neste tubo é turbulento (perfil de velocidade quase uniforme e coeficiente de energia cinética igual a 1,08). A potência no eixo do ventilador é 0,18 W e o aumento de pressão estática provocado pelo ventilador é igual a 103 Pa. Calcule a perda no escoamento através do ventilador admitindo **(a)** que os perfis de velocidade são uniformes nas seções de alimentação e descarga; e **(b)** que os perfis de velocidade são aqueles fornecidos na formulação do problema. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 5.125]

Enunciado: Considere a turbina extraindo energia através de um conduto forçado em uma barragem, como na figura abaixo. Para escoamento turbulento em dutos, a perda de carga por atrito é aproximadamente $h_L = \mathcal{C}.Q^2$, onde a constante $\mathcal{C}$ depende das dimensões do conduto forçado e das propriedades da água. Mostre que, para uma dada geometria de conduto forçado e vazão variável, Q, a máxima potência possível da turbina nesse caso é $\dot{W}_{max} = 2.\rho.g.H.Q/3$ e ocorre quando a vazão é $Q = [H/(3.\mathcal{C})]^{1/2}$. [(WHITE, 2002), exercício 3.132]



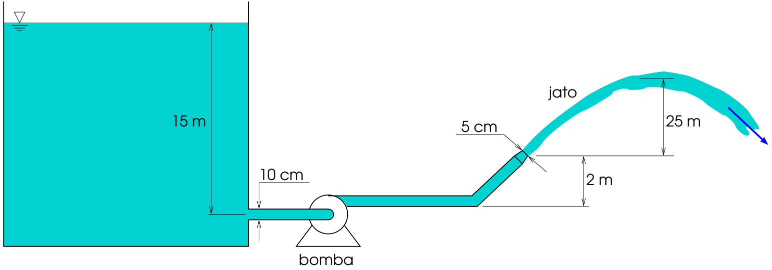
Exercício de Aula 5

Enunciado: O tanque isolado da figura abaixo deve ser enchido a partir de um suprimento de ar a alta pressão. As condições iniciais no tanque são $T_i = 20\ ^\circ$C e $p_i = 200$ kPa. Quando a válvula é aberta, o fluxo de massa inicial para dentro do tanque é de 0,013 kg/s. Considerando um gás perfeito, calcule a taxa inicial de incremento de temperatura do ar no tanque. [(WHITE, 2002), exercício 3.143]

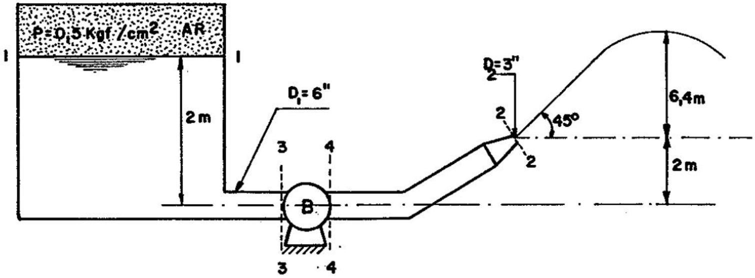


Exercício de Aula 6

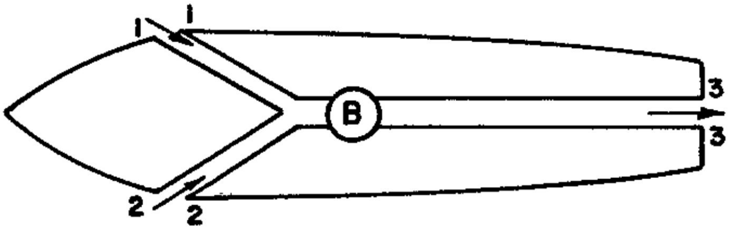
Enunciado: A bomba da figura abaixo cria um jato de água a 20 °C, orientado para atingir uma distância horizontal máxima. As perdas por atrito do sistema são de 6,5 m. O jato pode ser aproximado pela trajetória de partículas sem atrito. Que potência a bomba deve entregar? [(WHITE, 2002), exercício 3.144]



Enunciado: Água num tanque de grandes dimensões está sob a pressão relativa de 0,5 kgf/cm^2 na superfície livre e é bombeada através de um tubo e um bocal como indicado na figura. Sabendo-se que a perda total na tubulação é de 6,5 CV e que o rendimento da bomba é de 70%, qual a potência a ser fornecida à bomba pelo motor a ela acoplado? Despreza-se a resistência do ar. [Apostila, exercício 5.2]



Enunciado: O sistema de propulsão de um barco consta de uma bomba hidráulica que recolhe água na proa através de 2 tubos de 2'' de diâmetro e lança na popa através de um tubo de 2''. Calcular em CV a potência transmitida pela bomba ao fluido. Sabe-se que a vazão veiculada é 50 L/s e que a potência das forças de atrito ao longo de todos os tubos é 0,5 CV. [Apostila, exercício 5.4]



Referências Bibliográficas

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. São Paulo: Blücher, 2004. ISBN 978-85-212-0343-8.

WHITE, F. M. *Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. Rio de Janeiro: McGraw Hill, 2002. ISBN 978-85-868-0424-3.