4.2 RELAÇÃO ENTRE FORMULAÇÃO DE SISTEMA E FORMULAÇÃO DE VOLUME DE CONTROLE. ④

OBSERVAÇÃO:-

"AS LEIS BÁSICAS, ESCRITAS NA FORMA DE TAXAS DE VARIAÇÃO EM RELAÇÃO AO TEMPO, ENVOLVEM DERIVADAS EM RELAÇÃO AO TEMPO DE ALGUMA PROPRIEDADE EXTENSIVA DO SISTEMA. (*)

SEJAM:

N:- PROPRIEDADE EXTENSIVA GENÉRICA DO SISTEMA

η:- PROPRIEDADE INTENSIVA CORRESPONDENTE (PROPRIED. EXTENSIVA POR UNIDADE DE MASSA)

$$\boxed{N_{SIST} = \int_{m_{SIST}} \eta \, dm = \int_{\forall_{SIST.}} \eta \rho \, d\forall}$$

VEMOS QUE:-

$N = m$	ENTÃO	$\eta = 1$
$N = \vec{P}$		$\eta = \vec{V}$
$N = \vec{H}$		$\eta = \vec{r} \wedge \vec{V}$
$N = E$		$\eta = e$
$N = S$		$\eta = s$

UMA PROPRIEDADE INTENSIVA É INDEPENDENTE DA MASSA, ENQUANTO

(*) O VALOR DA PROPRIEDADE EXTENSIVA VARIA DIRETAMENTE COM A MASSA. ASSIM, SE A QUANTIDADE DE MATÉRIA EM UM DADO ESTADO TERMODINÂMICO É DIVIDIDO EM DUAS PARTES IGUAIS, CADA PARTE TERÁ A MESMA PROPRIEDADE INTENSIVA, QUE O SISTEMA ORIGINAL, E A METADE DO VALOR DA PROPRIEDADE EXTENSIVA.

EXEMPLOS: PROPRID. EXTENSIVA

$m, \forall, U, H, S$

PROPRIE INTENSIVA

ρ, P, u, h, s

FORM 394-210x297-500x50x1-07/79

TAREFA: PASSAR DA FORMULAÇÃO DE **SISTEMA** DAS LEIS BÁSICAS PARA A FORMULAÇÃO DE **VOLUME DE CONTROLE.**

· OU SEJA: EXPRESSAR AS TAXAS DE VARIAÇÕES DAS PROPRIEDADES EXTENSIVAS ARBITRÁRIAS, N, PARA UM SISTEMA, EM TERMOS DE VARIAÇÕES EM RELAÇÃO AO TEMPO DESSA PROPRIEDADE ASSOCIADA AO **VOLUME DE CONTROLE.**

PROCEDIMENTO: COMO EXISTE MASSA ATRAVESSANDO AS FRONTEIRAS DE UM VOLUME DE CONTROLE, A DETERMINAÇÃO DAS VARIAÇÕES EM RELAÇÃO AO TEMPO DA PROPRIEDADE N ASSOCIADA AO VOLUME DE CONTROLE, REQUER O CÁLCULO DOS FLUXOS DA PROPRIEDADE N ASSOCIADOS AOS FLUXOS DE MASSA NAS FRONTEIRAS DO ∀C.

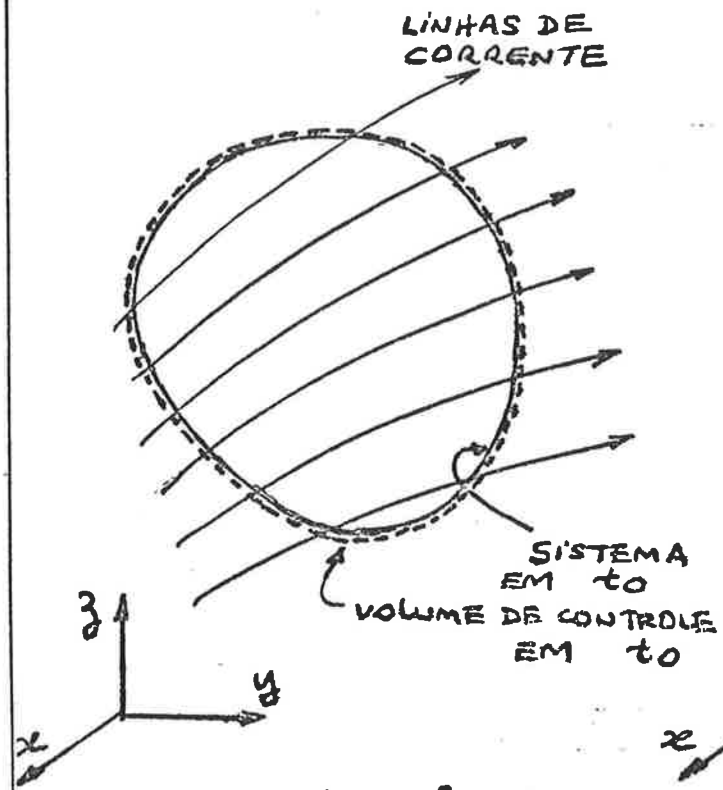
COMO FAZER ISSO:- EMPREGAR UM PROCESSO DE LIMITE ENVOLVENDO UM SISTEMA E UM VOLUME DE CONTROLE QUE COINCIDEM EM UM CERTO INSTANTE DE TEMPO.

O CÁLCULO DOS FLUXOS DE N NAS REGIÕES DE SUPERPOSIÇÃO E NAS REGIÕES FRONTEIRIÇAS DO VOLUME DE CONTROLE, NO PROCESSO DE LIMITE, FORNECEM UMA EQUAÇÃO QUE RELACIONA AS TAXAS DE VARIAÇÕES DA PROPRIEDADE N, EM RELAÇÃO AO TEMPO, DO SISTEMA COM AS VARIAÇÕES DESSA PROPRIEDADE ASSOCIADA AO VOLUME DE CONTROLE.

4.2.1 DEDUÇÃO

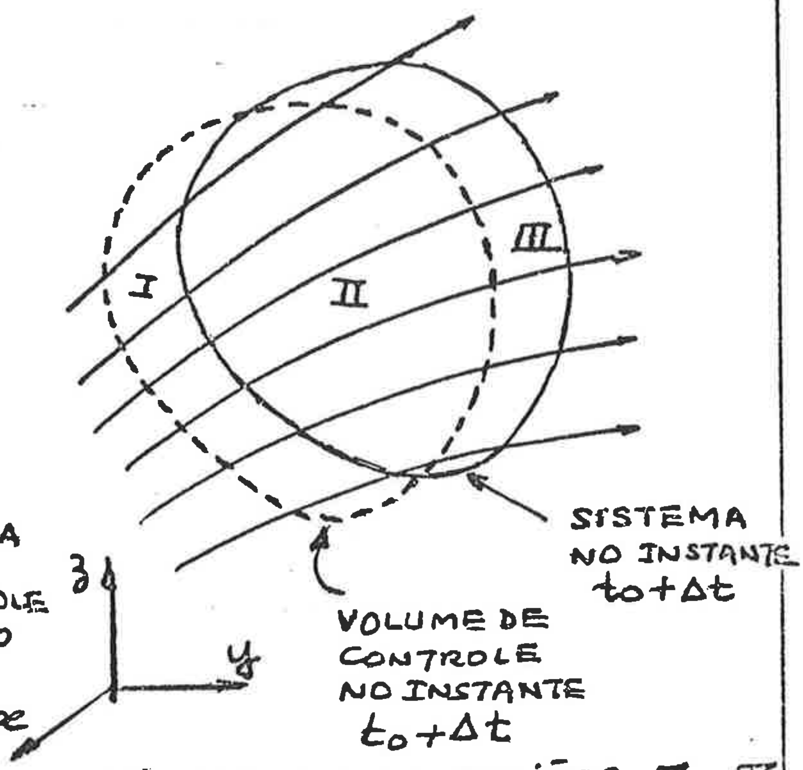
SEJAM:
- CAMPO DE ESCOAMENTO $\vec{V}(x,y,z,t)$ ARBITRÁRIO EM RELAÇÃO A UM SISTEMA DE COORDENADAS x, y, z.
- ∀C FIXO NO ESPAÇO
- SISTEMA MOVIMENTA-SE NO CAMPO DE ESCOAMENTO (POR DEFINIÇÃO: CONTENDO SEMPRE AS MESMAS PARTÍCULAS DE FLUIDO)
- NO INSTANTE t_0 AS FRONTEIRAS DO SISTEMA E DO ∀C COINCIDEM.

NO INSTANTE t_0



SISTEMA e $\forall C$ COINCIDEM

NO INSTANTE $t_0+\Delta t$



SISTEMA OCUPA REGIÕES II e III

- MASSA DA REGIÃO I ENTRA NO $\forall C$ DURANTE O INTERVALO Δt
- MASSA DA REGIÃO III DEIXA O $\forall C$ DURANTE O INTERVALO Δt

POR DEFINIÇÃO DE DERIVADA:-

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{SIST} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{SIST})_{t_0+\Delta t} - N_{SIST})_{t_0}}{\Delta t} \qquad (1)$$

ONDE:

$$N_{SIST} = \int_{m_{SIST}} \eta \, dm = \int_{\forall_{SIST}} \eta \rho \, d\forall$$

NO INSTANTE $(t_0+\Delta t)$: SISTEMA $\equiv$ REGIÃO II + REGIÃO III

$$N_{SIST})_{t_0+\Delta t} = (N_{II}+N_{III})_{t_0+\Delta t} = (N_{\forall C} - N_I + N_{III})_{t_0+\Delta t} =$$

$$= \left(\int_{\forall C} \eta\rho\, d\forall\right)_{t_0+\Delta t} - \left(\int_{\forall_I} \eta\rho\, d\forall\right)_{t_0+\Delta t} + \left(\int_{\forall_{III}} \eta\rho\, d\forall\right)_{t_0+\Delta t}$$

NO INSTANTE t_0: SISTEMA $\equiv \forall C$

$$N_{SIST})_{t_0} = N_{\forall C})_{t_0} = \left(\int_{\forall C} \eta \rho\, d\forall\right)_{t_0}$$

FORM 394-210x297-500x50x1-07/39

SUBSTITUINDO EM (A):-

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{SIST} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{\forall C} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{\forall I} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} + \left[\int_{\forall III} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{\forall C} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0}}{\Delta t}$$

COMO O LIMITE DA SOMA É IGUAL A SOMA DOS LIMITES:-

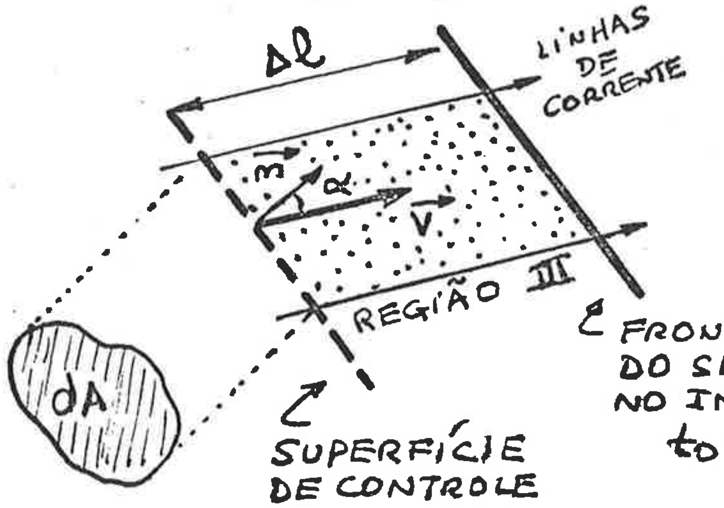
$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{SIST} = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{\forall C} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{\forall C} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0}}{\Delta t}}_{\text{TERMO A}} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{\forall III} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{\text{TERMO B}} + \underbrace{-\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{\forall I} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{\text{TERMO C}} \quad (2)$$

$$\text{TERMO A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{\forall C} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{\forall C} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left.N_{\forall C}\right]_{t_0+\Delta t} - \left.N_{\forall C}\right]_{t_0}}{\Delta t} = \frac{\partial N_{\forall C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \eta \rho \, d\forall$$

QUE REPRESENTA A TAXA DE VARIAÇÃO COM O TEMPO DA PROPRIEDADE N DENTRO DO ∀C FIXO NO ESPAÇO

$$\text{TERMO B} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{\forall III} \eta \cdot \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left.N_{III}\right)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$



$\vec{m}$: NORMAL EXTERNA AO ELEMENTO DE SUPERFÍCIE DE CONTROLE

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ JÁ QUE A MASSA DA REGIÃO III FLUI PARA FORA DO ∀C.

PODEMOS ESCREVER $d\forall = dA \cdot \Delta\ell \cos\alpha$

$$dN_{III})_{t_0+dt} = \eta\rho\, d\forall)_{t_0+\Delta t} = \eta\rho\, \Delta\ell \cos\alpha\, dA)_{t_0+\Delta t}$$

$$\therefore \quad N_{III})_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{SC_{III}} \eta\rho\, \Delta\ell \cos\alpha\, dA\right]_{t_0+\Delta t}$$

ONDE :-

SC_{III} : SUPERFÍCIE COMUM À REGIÃO III E O $\forall C$

$\Delta\ell$: DISTÂNCIA PERCORRIDA PELA PARTÍCULA NA SUPERFÍCIE DO SISTEMA, DURANTE Δt, AO LONGO DA LINHA DE CORRENTE EXISTENTE NO INSTANTE t_0

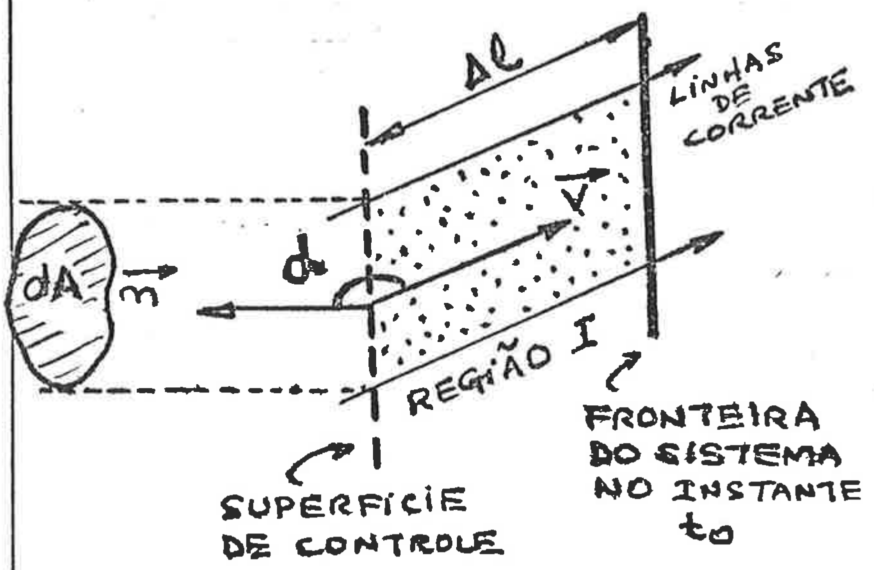
$$\text{TERMO B} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{V_{III}} \eta\rho\, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{SC_{III}} \eta\rho\, \Delta\ell \cos\alpha\, dA}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{SC_{III}} \eta\rho\, \frac{\Delta\ell}{\Delta t} \cos\alpha\, dA$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \int_{SC_{III}} \eta\rho\, |\vec{V}| \cos\alpha\, dA$$

JÁ QUE $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = |\vec{V}|$

$$\text{TERMO C} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{V_I} \eta\rho\, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_I)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$



$\vec{m}$: NORMAL EXTERNA AO ELEMENTO DE SUPERFÍCIE DE CONTROLE

$\alpha > \frac{\pi}{2}$ JÁ QUE A MASSA DA REGIÃO I FLUI PARA DENTRO DO $\forall C$ EM TODA REGIÃO I.

PODEMOS ESCREVER: $d\forall = \Delta l\,(-\cos\alpha)\,dA$

PORQUE O VOLUME É UMA GRANDEZA ESCALAR POSITIVA.

$$\alpha > \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha < 0$$

$$dN_I)_{t_0+\Delta t} = (\eta\rho\, d\forall)_{t_0+\Delta t} = [\eta\rho\,\Delta l\,(-\cos\alpha)\,dA]_{t_0+\Delta t}$$

$$\therefore\ N_I)_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{SC_I} -\eta\rho\,\Delta l\cos\alpha\, dA\right]_{t_0+\Delta t}$$

ONDE:

SC_I: SUPERFÍCIE COMUM À REGIÃO I E AO $\forall C$.

Δl: DISTÂNCIA PERCORRIDA PELA PARTÍCULA NA SUPERFÍCIE DO SISTEMA DURANTE O INTERVALO DE TEMPO Δt, AO LONGO DA LINHA DE CORRENTE EXISTENTE NO INSTANTE t_0.

$$\text{TERMO C} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{\forall_I}\eta\rho\, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_I)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} =$$

$$= -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{SC_I} -\eta\rho\,\Delta l\cos\alpha\, dA}{\Delta t} = +\lim_{\Delta t\to 0}\int_{SC_I}\eta\rho\frac{\Delta l}{\Delta t}\cos\alpha\, dA$$

$$= \int_{SC_I}\eta\rho\,|\vec{V}|\cos\alpha\, dA$$

JÁ QUE $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t} = |\vec{V}|$

SUBSTITUINDO TERMOS A, B, C EM 2:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{SIST} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\eta\rho\, d\forall + \int_{SC_I}\eta\rho\,|\vec{V}|\cos\alpha\, dA + \int_{SC_{III}}\eta\rho\,|\vec{V}|\cos\alpha\, dA$$

COMO:

$$SC = SC_I + SC_{III} + \underbrace{SC_{LATERAL}}_{}$$

CARACTERIZADO PELA AUSÊNCIA DE FLUXO ATRAVÉS DESSA SUPERFÍCIE ($\alpha = \pi/2$ OU $\vec{V} = 0$)

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{SIST} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c} \eta \rho \, d\forall + \int_{SC} \eta \rho |\vec{V}| \cos\alpha \, dA$$

COMO $\vec{V} \times \vec{n} \, dA = |\vec{V}| \, dA \cos\alpha$

$$\boxed{\left.\frac{dN}{dt}\right)_{SIST.} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \eta \rho \, d\forall + \int_{SC} \eta \rho \, \vec{V} \times \vec{n} \, dA}$$

FÓRMULA OU TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS

4.2.2. INTERPRETAÇÃO FÍSICA

FÓRMULA DE REYNOLDS: RELAÇÃO GERAL ENTRE A TAXA DE VARIAÇÃO DE UMA PROPRIEDADE EXTENSIVA N, QUALQUER DE UM SISTEMA E A TAXA DE VARIAÇÃO COM O TEMPO DESTA PROPRIEDADE ASSOCIADA AO VOLUME DE CONTROLE.

LEMBRE-SE QUE: A FÓRMULA DE REYNOLDS FOI OBTIDO NUM PROCESSO DE LIMITE ($\Delta t \to 0$), O QUE ASSEGURA QUE A RELAÇÃO É VÁLIDA NO INSTANTE EM QUE O SISTEMA E O VOLUME DE CONTROLE COINCIDEM, IÉ, OCUPAM O MESMO VOLUME E TENHAM AS MESMAS FRONTEIRAS.

$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{SIST}$: TAXA DE VARIAÇÃO TOTAL, EM RELAÇÃO AO TEMPO, DE UMA PROPRIEDADE EXTENSIVA QUALQUER DO SISTEMA NO INSTANTE t_0

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c} \eta \rho \, d\forall$: TAXA DE VARIAÇÃO COM O TEMPO, DA PROPRIEDADE EXTENSIVA QUALQUER N, NO INTERIOR DO VOLUME DE CONTROLE, QUE COINCIDE COM O SISTEMA NO INSTANTE t_0.

$\int_{SC} \eta \rho \, \vec{V} \times \vec{n} \, dA$: FLUXO TOTAL PARA FORA, DA PROPRIEDADE EXTENSIVA N, ATRAVÉS DA SUPERFÍCIE DE CONTROLE, NO INSTANTE t_0.

OBS — A VELOCIDADE $\vec{V}$, NA EQUAÇÃO É MEDIDA EM RELAÇÃO AO SISTEMA DE REFERÊNCIA x, y, z. COMO O VOLUME DE CONTROLE É FIXO EM RELAÇÃO AO SISTEMA DE COORDENADAS x, y, z, $\vec{V}$ DEVE SER AVALIADA POR UM OBSERVADOR FIXO NO VOLUME DE CONTROLE