

# DINÂMICA dos FLUIDOS ELEMENTAR

## EQUAÇÃO de BERNOULLI

(MUNSON - CAP. 3)

\* 2ª LEI de NEWTON :  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

APLICADA À PARTÍCULA FLUIDA:

HIPÓTESES: \*\*ESCOAMENTOS NÃO VISCOZOS ("INVÍSCIDOS")

\*\* FORÇAS PRESENTES : PRESSÃO + GRAVITACIONAL

\*\* CAMPO DE ESCOAMENTO PLANO

\*\* REGIME PERMANENTE

**RESULTADOS:**

→ AO LONGO DE L.C.:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz = C$$

+ HIPÓTESE:  $\rho \cong \text{cte}$

EQ. BERNOULLI

$$\rho + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = C \quad (= \text{cte ao longo de L.C.})$$

→ NA DIREÇÃO NORMAL À L.C.:

$$-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho v^2}{R}$$

+ HIPÓTESES: • Caso admitase desprezível  $\Delta \vec{g}$  (variação do efeito de  $\vec{g}$ )  
• supondo escoamento em plano horizontal ( $dz/dn = 0$ )

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \frac{\rho v^2}{R} \Rightarrow \int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{v^2}{R} dn + gz = \text{cte}$$

+  $\rho \cong \text{cte}$

$$\rho + \rho \int \frac{v^2}{R} dn + \gamma z = C \quad (= \text{cte } \perp \text{ à L.C.})$$

OUTRA FORMA DA EQ. BERNOULLI:

÷ Eq BERNOULLI TOR:  $\rho g = \gamma$

$$[CARGA]: \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z \cong \text{cte} \quad (\text{Ao longo L.C.})$$

2

# EQ. de BERNOULLI (EM TERMOS de P)

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = C$$

Analisando cada termo:

- $P \rightarrow$  pressão termodinâmica (ou Estática)  
(Equivalente à coluna equilibrada pelo fluido  $\perp$  à vel.)
- $\frac{1}{2} \rho v^2 \rightarrow$  pressão dinâmica  
(Surge da conversão de Energia cinética em pressão) ( $v \rightarrow$  velocidade local em 1 pto)
- $\rho g z \rightarrow$  pressão hidrostática; associada ao campo gravitacional  
(Tomada a partir de um PHR.)  
( $z \rightarrow$  cota tomada a partir de  $\rightarrow$ )

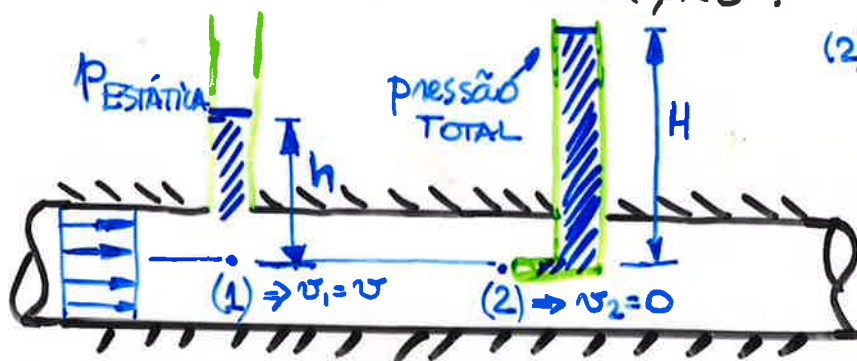
$$\sum P_i = P_{ESTÁTICA} + P_{DIN.} + P_{HIDROST.} = \underline{\underline{P_{TOTAL}}}$$

Em termos de carga (coluna de fluido)

$$\underbrace{\frac{P}{\rho g}}_{\substack{\text{CARGA de} \\ \text{PRESSÃO} \\ \downarrow \\ \text{ENERGIA de} \\ \text{PRESSÃO}}} + \underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\substack{\text{CARGA de} \\ \text{VELOCIDADE} \\ \downarrow \\ \text{ENERGIA} \\ \text{CINÉTICA}}} + \underbrace{z}_{\substack{\text{CARGA de} \\ \text{ELEVACÃO} \\ \downarrow \\ \text{ENERGIA} \\ \text{POTENCIAL}}} = C \text{ (ao longo de LC)}$$

## EXEMPLO: MEDIÇÕES DAS PRESSÕES

ESCOAMENTO EM TUBULAÇÃO:



(2)  $\rightarrow$  PONTO de ESTAGNAÇÃO

3

APLICANDO EQ. de BERNOULLI ENTRE (1) e (2)  
(MESMA LC ;  $\rho = cte$  ; REG. PERMANENTE ;  $\mu \approx 0$ )

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 = C^{te}$$

$P_1$  → Pressão estática em (1)

$v_1$  → velocidade local em (1)

$z_1$  → cota tomada a partir de PIR (até (1))

$P_2$  → pressão total (ou de estagnação) em (2)

SOMA {  $P_{ESTÁTICA} + P_{DINÂMICA}$  } } Ponto de parada de estagnação

$v_2$  → velocidade local em (2)  $\approx 0$  pois (2) = ponto de parada ou ESTAGNAÇÃO (como  $\mu \approx 0$  → PROCESSO SEM PERDAS POR ATRITO (VISCOZO))

$z_2$  → cota tomada a partir de PIR (até (2))

ASSIM:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + 0 + \rho g z_2$$

PARA :  $z_1 \approx z_2$  (ESCOAM. HORIZONTAL ou PEQUENO)

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 - P_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 (P_{TOT} - P_{ESTÁTICA})}{\rho}}$$

**APLICAÇÃO :**

- TUBO de PITOT (ESTÁTICO)
- MEDIÇÃO DE VELOCIDADE EM AVIÃO.

Ex: AVIÃO A 160 km/h ; 3000 m (→  $P_{ESTÁT} = P_{ATM 3000m} = 70,12 \text{ kPa}$ )

$\rho_{ar 3000m} = 0,9093 \text{ kg/m}^3$  ; PEDE-SE :  $P_{ESTAG.}$  b)  $\Delta P_{PITOT}$

Adotando HIPÓTESES : (RP ;  $\mu \approx 0$  ;  $\Delta z \approx 0$  ;  $\rho = cte$ )

a)  $P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \Rightarrow P_2 = 70,12 \times 10^3 + \frac{0,9093 \times 44,4^2}{2} =$

$\Rightarrow P_2 = 71,02 \times 10^3 \text{ Pa (Absoluta)}$

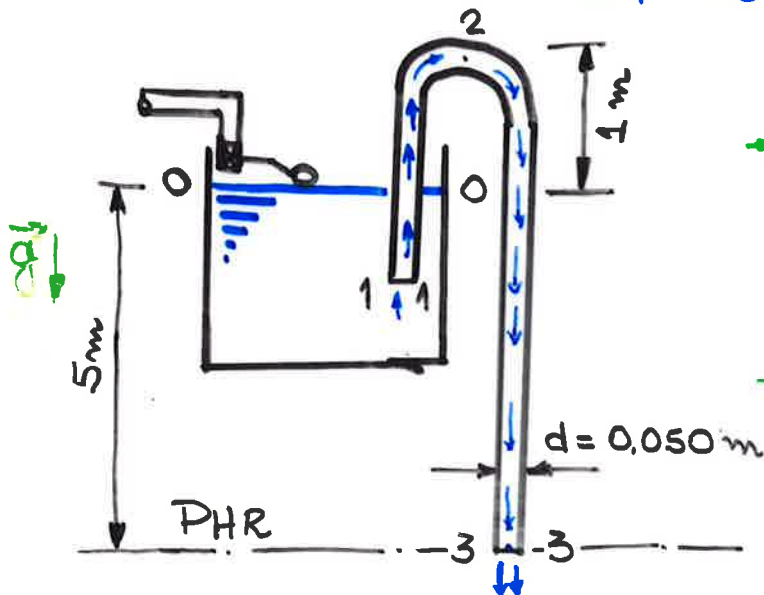
4

$$b) \Delta P_{PITOT} = P_{TOTAL} - P_{ESTÁTICA} = P_2 - P_1$$

$$\Delta P_{PITOT} = 896 \text{ Pa ou } 0,896 \text{ kPa}$$

(TRANSPARÊNCIAS FIGURAS COM TUBOS DE PITOT)

### EXERCÍCIO : APLICAÇÃO DA EQ. BERNOULLI EM ESCOAMENTO EM SIFÃO :



#### DADOS:

- HIPÓTESES : \* ESCOAMENTO  $\neq$  VISCOOSO ;
- \*  $\rho = cte$  ; \* REG. PERMANENTE ;
- \*  $PHR \cong 3$
- \* NÍVEL 0-0 É CONSTANTE
- $P_{VÁGUA (20^\circ C)} \cong 2495 \text{ Pa (abs)}$
- $g \cong 10 \text{ m/s}^2$
- $\rho_{\text{água}} \cong 1000 \text{ kg/m}^3$
- $P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$

#### PEDE-SE:

- a) VELOCIDADE em 3-3 (saída da tubulação)
- b) PRESSÃO em 2-2.
- c) VERIFICAR SE OCORRE CAVITAÇÃO
- d) ESQUEMATIZAR LINHAS PIEZOMÉTRICA <sup>de</sup> ENERGIA ENTRE 0-0 e 3-3.

#### SOLUÇÃO:

a) EQ. BERNOULLI (EM LC) ENTRE 0-0 e 3-3:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{P_0}{\rho g} + z_0 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\rho g} + \frac{z_3}{g}$$

0
0 (P<sub>atm</sub>=0 efetiva)
(P<sub>3</sub>≠0)
0

$$v_3^2 = z_0 \cdot 2g \Rightarrow v_3 = \sqrt{2g z_0}$$

Substituindo valores :  $v_3 = 10 \text{ m/s}$

5)

b)  $P_2 = ?$

EQ. BERNOULLI ENTRE 2-2 e 3-3 :

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho} + z_2 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\rho} + z_3$$

$$\frac{100}{20} + \frac{P_2}{104} + z_2 = \frac{100}{20} + 0 \Rightarrow P_2 = -60000 \text{ Pa}$$

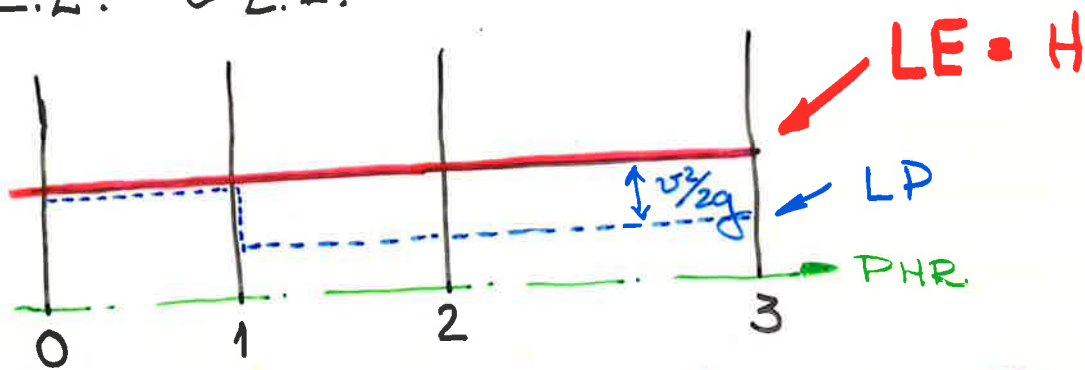
c) CAVITAÇÃO OCORRE?

$$P_v (\text{H}_2\text{O} = 20^\circ\text{C}) \rightarrow 2495 \text{ Pa (Abs)}$$

$$P_2 = -60.000 \text{ (efetiva)} = 41325 \text{ (Abs)}$$

Assim como  $P_2 > P_v \Rightarrow \text{NÃO CAVITAÇÃO}$

d) L.E. e L.P.



$$LE = \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho} + z \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{LINHA de ENERGIA} \\ \text{OU} \\ \text{" de CARGA TOTAL} \end{array} \right.$$

$$LP = \frac{P}{\rho} + z \quad \rightarrow \text{LINHA PIEZOMÉTRICA}$$

Obs: Neste caso  $LE = \text{constante}$  pois ~~NÃO~~ perdas por atrito viscoso durante o escoamento

### Exemplo 3.4

Considere o escoamento de água mostrado na Fig. E3.4. A força aplicada no êmbolo da seringa produzirá uma pressão maior do que a atmosférica no ponto (1) do escoamento. A água escoo pela agulha, ponto (2), com uma velocidade bastante alta e atinge o ponto (3) no topo do jato. Discuta, utilizando a equação de Bernoulli, a distribuição de energia nos pontos (1), (2) e (3) do escoamento.

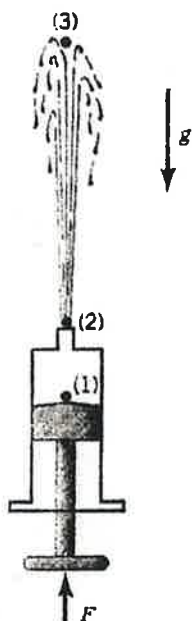


Figura E3.4

Ponto	Tipo de Energia		
	Cinética $\rho V^2 / 2$	Potencial $\gamma z$	Pressão $p$
1	Pequena	Zero	Grande
2	Grande	Pequena	Zero
3	Zero	Grande	Zero

**Solução** Se as hipóteses (regime permanente, escoamento incompressível e invíscido) utilizadas na obtenção da equação de Bernoulli são aproximadamente válidas, nós podemos analisar o escoamento com esta equação. De acordo com a Eq. 3.11, a soma dos três tipos de energia (cinética, potencial e pressão) ou cargas (velocidade, elevação e pressão) precisam permanecer constantes. A tabela anterior indica as grandezas relativas de cada uma destas energias nos três pontos mostrados na figura.

Observe que os valores associados aos diferentes tipos de energia variam ao longo do escoamento de água. Um modo alternativo de analisar este escoamento é o seguinte: o gradiente de pressão entre (1) e (2) produz uma aceleração para ejetar água pela agulha. A gravidade atua na partícula entre (2) e (3) e provoca a paralisação da água no topo do vôo.

Se o efeito do atrito (viscoso) é importante nós detectaremos uma perda de energia mecânica entre os pontos (1) e (3). Assim, para um dado  $p_1$ , a água não será capaz de alcançar a altura indicada na figura. Tal atrito pode surgir na agulha (veja o Cap. 8, escoamento em tubo) ou entre o jato d'água e o ar ambiente (veja o Cap. 9, escoamento externo).

EXTRAÍDO DE MUNSON, OKIISHI, YOUNG  
"FUNDAMENTOS DE MEC. DOS FLUIDOS". 4ª Ed.  
S. Paulo, 2004.

4ª Questão: (1,0 pts.)

Para o escoamento de ar em um conduto, a velocidade média na seção 2-2 é determinada utilizando-se um tubo de Pitot associado a um manômetro diferencial.

São conhecidas:

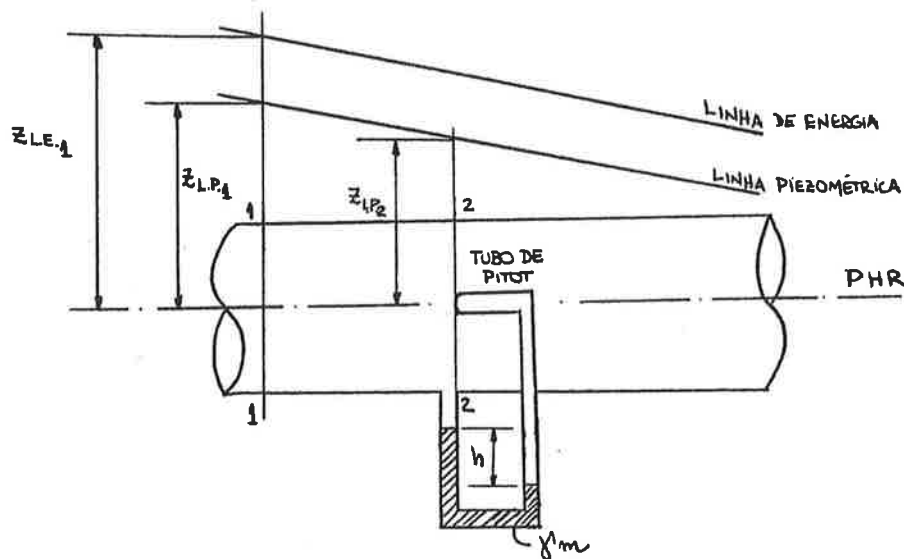
- Cota de Linha Piezométrica:  $z_{L.P.2} = 10\text{m}$
- Altura no manômetro:  $h = 0,04\text{m}$
- Perda de carga distribuída entre 1-1 e 2-2:  $h_f = 1\text{m}$

Pede-se:

- determinar a Velocidade média para o ar:  $V$  (0,5 pts.)
- cota da Linha de Energia em 1-1:  $z_{L.E.1}$  (0,5 pts.)

Dados:  $g = 10\text{m/s}^2$      $\gamma_{\text{ar}} = 12\text{N/m}^3$      $\gamma_m = 6.000\text{ N/m}^3$

to.);



#### 4ª QUESTÃO (GABARITO)

a) TUBO de PITOT:

$$\frac{V_a^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho} = \frac{V_b^2}{2g} + \frac{p_b}{\rho}$$

a → na L.C. antes do Pitot  
b → na entrada do Tubo de Pitot

$$V_a^2 = \frac{2g(p_b - p_a)}{\rho} \Rightarrow V_a = \sqrt{\frac{2g(p_b - p_a)}{\rho}}$$

$$p_b - p_a = h(\rho_m - \rho_{ar}) = 0,04(6000 - 12)$$

$$V_a = \sqrt{\frac{20 \times (0,04)(6000 - 12)}{12}}$$

(Obs: podemos desprezar  $\rho_{ar}$  porque  $\rho_m \gg \rho_{ar}$ )

$$V_a \cong 20 \text{ m/s}$$

$$V_{or} = 20 \text{ m/s}$$

$$b) z_{L.E.1} = z_{L.P.1} + \frac{V^2}{2g}$$

$$z_{L.P.1} = z_{L.P.2} + h_f = 10 + 1 = 11 \text{ m}$$

$$z_{L.E.1} = 11 + \frac{20^2}{20}$$

$$z_{L.E.1} = 31 \text{ m}$$



# Conheça hipóteses sobre causa da queda

Mensagem automática às 23h10 do último domingo indica falha no leme do avião de Air France que ia do Rio a Paris

## O QUE SE SABE SOBRE O ACIDENTE

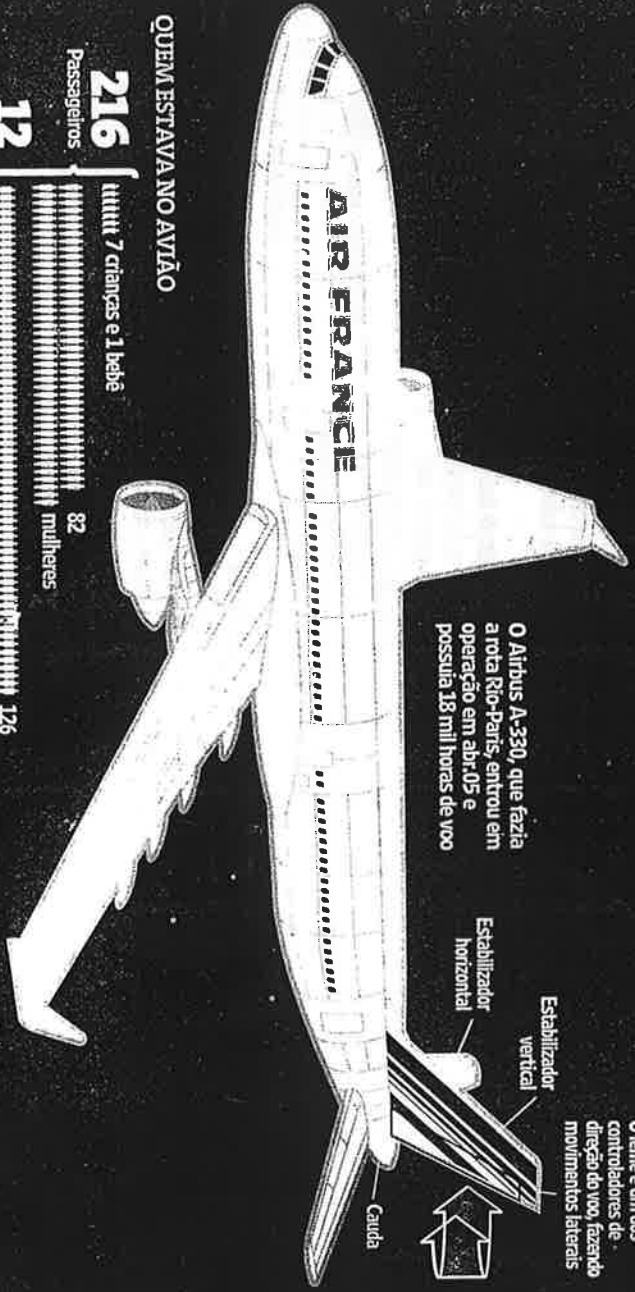
Sucessão de falhas precedeu o desaparecimento do avião

- Sistema apontou falha no leme
- Houve pane elétrica e depressurização
- Avião não seguiu o plano de voo e mudou de altitude
- Pilotos eram experientes; comandante tinha mais de 11 mil horas de voo
- Airbus voou por 12 minutos próximo a uma forte tempestade

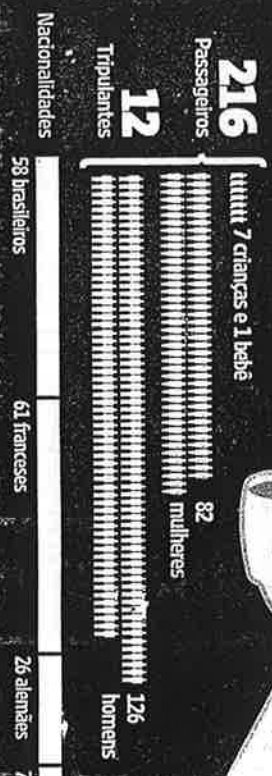
Lista das mensagens automáticas divulgada pela TV France 2 no destaque, a mensagem RUD TRV LIM FAULT, que significa falha no limitador de curso do leme

Time	From	To	Text
27 23/06	WMO906010210	27230200687/CTL	RUD TRV LIM FAULT 09-06-01 AY 447
27 23/06	WMO906010210	2228001006181AC	OM CABT PED 09-06-01 AY 447
27 23/06	WMO906010210	34430030681AY	TAS FAULT 09-06-01 AY 447
27 23/06	WMO906010210	2230025054010	FLT A/TRM OFE 09-06-01 AY 447
27 23/06	WMO906010210	22330120687AC	OM F/O PED 09-06-01 AY 447
27 23/06	WMO906010210	27130200687/CTL	AYM LIM 09-06-01 AY 447

O Airbus A-330, que fazia a rota Rio-Paris, entrou em operação em abril 05 e possuía 18 mil horas de voo



### QUEM ESTAVA NO AVIÃO



O leme é um dos controladores de direção do voo, fazendo movimentos laterais

### QUATRO MINUTOS DE PANHES

- 23:10** Falha no leme
- Autothrotte (acelerador automático) desligado; aviso ao piloto e copiloto
- TCAS (sistema anticollisão) desligado
- Fly-by-wire (controle computadorizado das superfícies móveis do avião) com proteção reduzida
- Piloto automático desligado
- Sistemas de voo degradados
- Sistemas de voo degradados
- Sistemas IR-1, IR-2 e IR-3 (referência inercial, que indicam a direção do avião sem necessitar de sensores externos) com falha
- ISIS (sistema de stand-by de navegação) com falha
- Conflito em dados do ADR, computador de navegação que traz velocidade, altitude, entre outros; aviso ao piloto e copiloto
- 23:12** SEC-1 (controle de superfícies móveis das asas) desligado
- PRIN-1 (controle de superfícies móveis das asas) desligado
- AFS (Sistema de voo automático) com falha
- 23:14** Aviso de velocidade vertical na cabine; perda de pressão

## COMPUTADOR ENLOUQUECIDO?

Uma das mensagens automáticas enviadas pelo Airbus indicava problema nos sensores externos que alimentam os sistemas de navegação

### O QUE É O PITOT

Tubo que recolhe ar externo do avião. Com auxílio de outros instrumentos, envia dados de navegação, como:

- Altitude
- Velocidade
- Velocidade vertical (que indica se o avião está em linha reta, subindo ou descendo)

### ➤ Histórico

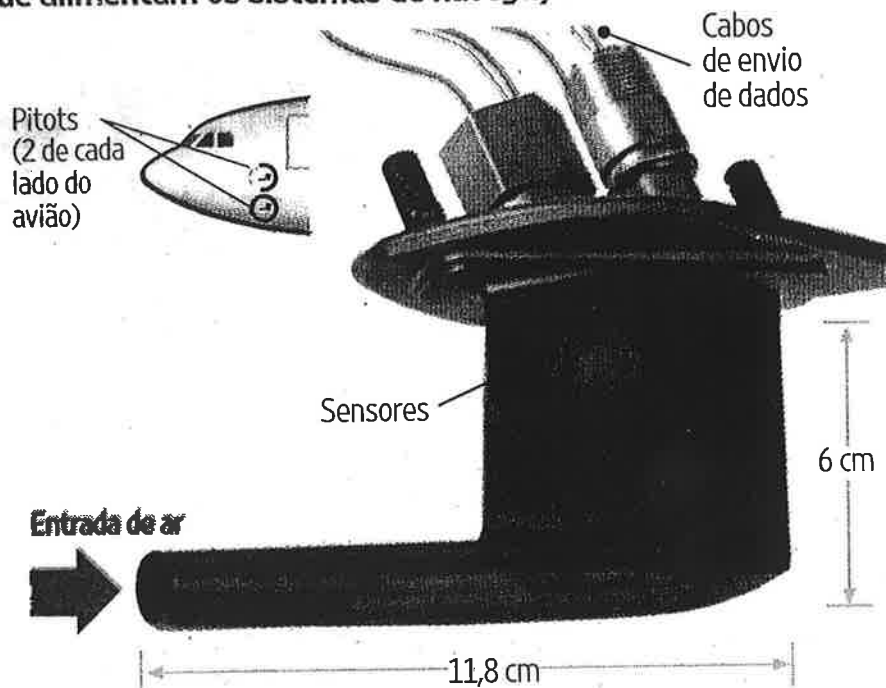
Em 2008, dois Airbus-330 da Qantas tiveram o mesmo problema: o computador que informa os dados de navegação fez o avião ir para cima e para baixo bruscamente

### ➤ Velocidade incorreta

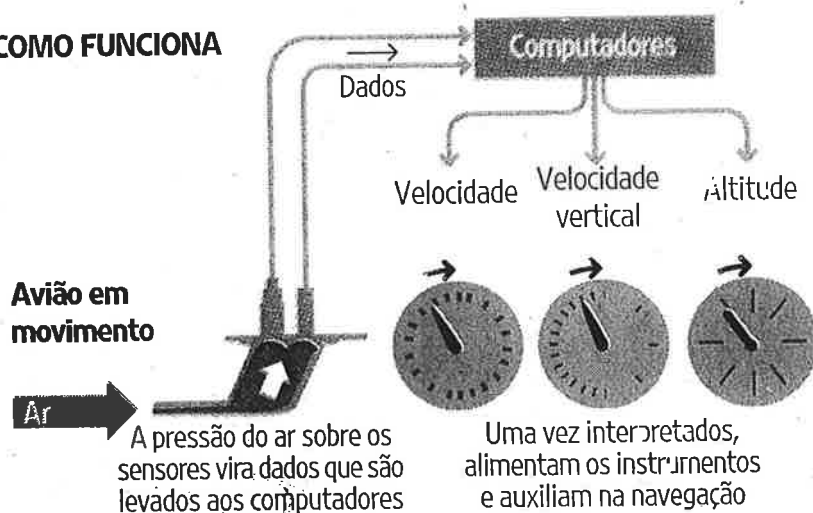
Mensagens automáticas enviadas pelo AF 447 antes de cair indicaram divergências entre as velocidades detectadas pelos sensores

### ➤ Troca

A Air France avisou seus pilotos de que vai trocar os sensores externos da frota de Airbus



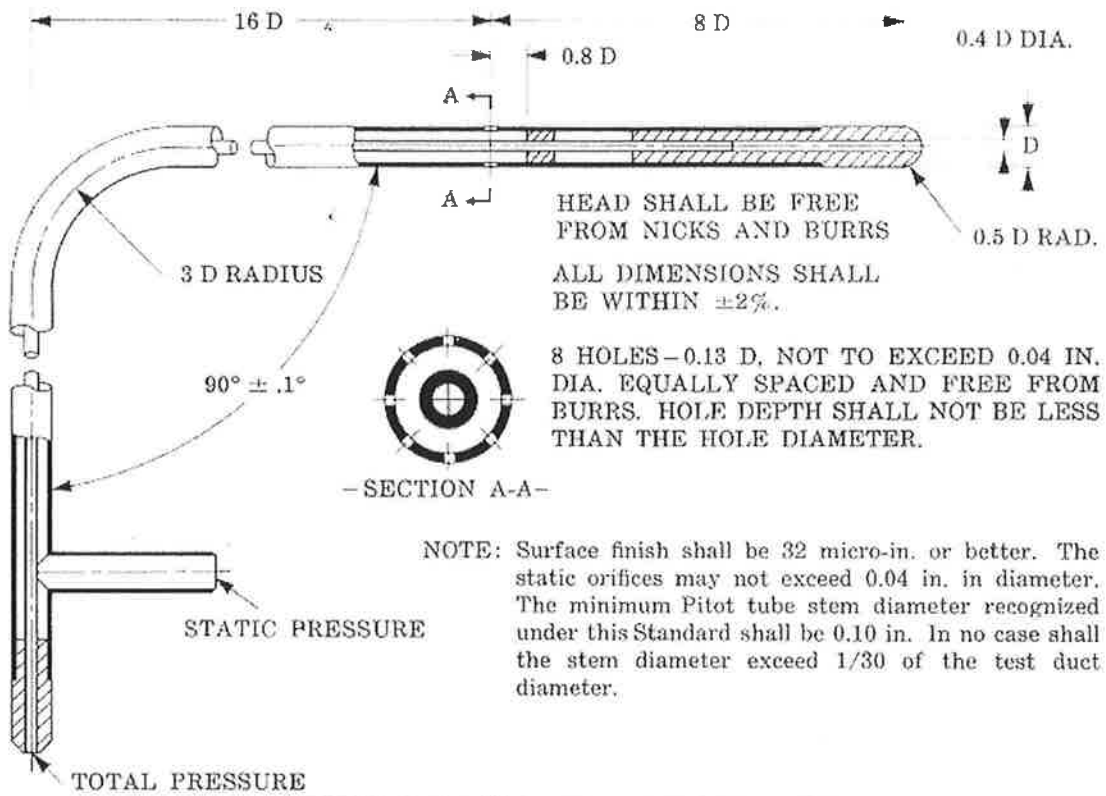
### COMO FUNCIONA



### Avião parado



# TUBO DE PITOT ESTÁTICO



PITOT-STATIC TUBE WITH SPHERICAL HEAD

## TRANSPARÊNCIAS AUXILIARES

→ PRESSÃO e SUA MEDIDA

→ TUBO DE PITOT

### PARÂMETROS E GRANDEZAS

#### • Pressão

– Definição: relação entre força e área

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{No SI: N/m}^2 = \text{Pa}$$

– Escalas de pressão (em função da referência):

- Pressão efetiva (ou relativa) (ou manométrica)
- Pressão absoluta

– Pressão Barométrica (atmosférica local)

- É sempre medida em termos absolutos ( $P_{abs}$ )

### PARÂMETROS E GRANDEZAS

#### • Pressão

– Expressão em termos de coluna de fluido

$$h = \frac{p}{\rho_{\text{fluido}} * g} = \frac{p}{\gamma_{\text{fluido}}}$$

– Exemplos:

- Expressar 100 Pa em metros de coluna de água (m.c.a.):

$$p_1 = 100 \text{ Pa} \rightarrow h_1 = (100/1000 * 9,81) = 0,0102 \text{ m.c.a.}$$

- Ou em milímetro de coluna de água (mm.c.a.):

$$h_1 = 0,0102 \text{ m.c.a.} \rightarrow h_1 = 10,2 \text{ mm.c.a.}$$

$$\text{ou } h_1 = 1000 * (p_1 / \rho_{\text{água}} * g) = 1000 * (p_1 / 1000 * g) = p_1 / g$$

## TIPOS DE PRESSÃO - Associadas ao fluido em movimento

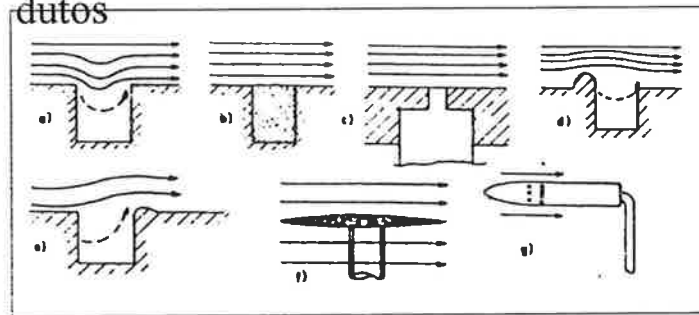
- Pressão Estática -  $p$  ou  $P_{estática}$
- Pressão Total (ou pressão de estagnação)  
-  $P_{total}$
- Pressão Dinâmica -  $P_{dinâmica}$  ou  $P_d$   
$$P_{total} = P_{estática} + P_{dinâmica}$$
- Está desconsiderada neste equacionamento a pressão associada à energia potencial gravitacional onde  $p_{grav} = \rho * g * z$ . (Razoável para gases,  $\rho$  baixos)

## TIPOS DE PRESSÃO - Associadas ao fluido em movimento

- Pressão Estática
  - Identificada também com pressão termodinâmica
  - Medida com instrumento movendo-se junto com o escoamento (difícil)
  - Alternativa:
    - Linhas de corrente (LC) retilíneas  $\Rightarrow$   $P_{estática}$  = medição perpendicular às LC
    - Soluções:
      - Tomada de pressão na parede da tubulação
      - Sonda de pressão estática (Pitot estático)

# Pressão Estática

- Tomadas de pressão estática na parede de dutos



Fonte: Assy, Tufi - Mecânica dos Fluidos

# Tomadas de pressão estática na parede de duto

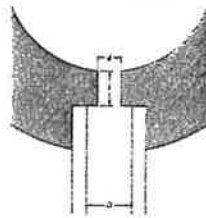


Figure 6.1 Static-pressure wall-tap geometry ( $D = 2d$ ;  $0.3 < Re < 60$ ).

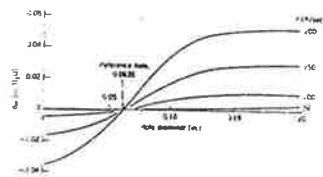
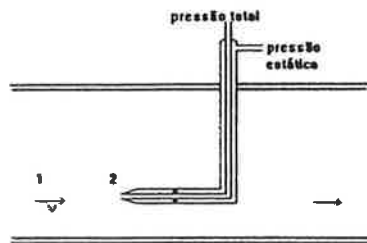


Figure 6.2 Typical experimental distributions on hole wall of wall tap for  $0.3 < Re < 60$  (see Table 6.1).

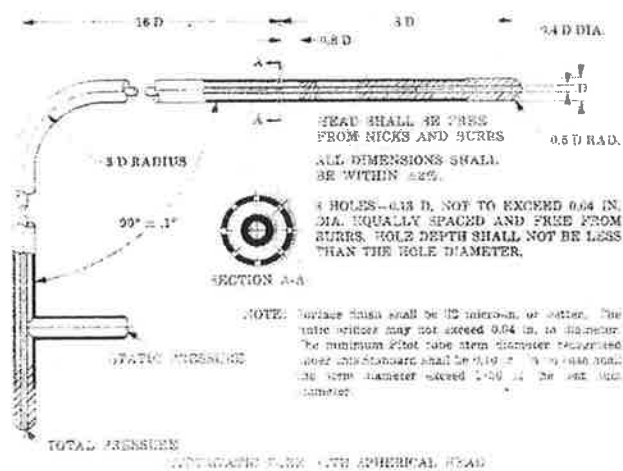
Fonte: BENEDICT, R. P. Fundamentals of Temperature, Pressure and Flow Measurement

## Pressão Total ( $p_{total}$ )

- Corresponde à energia mecânica total que o fluido possui em determinada seção de escoamento
- Medida com tubo de Pitot



## Tubo de Pitot estático



## Pressão Dinâmica ( $p_d$ )

- Resultado da conversão da energia cinética que o fluido possui em energia de pressão

$$p_d = 1/2 * (\rho * v^2)$$

$$v = \sqrt{\frac{2 * p_d}{\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 * (p_{total} - p_{estática})}{\rho}}$$

- Medido com o tubo de Pitot estático