PME·2230 - MEC. FLUIDOS I - EXERCÍCIOS CINEMÁTICA

Ex. 2.2.

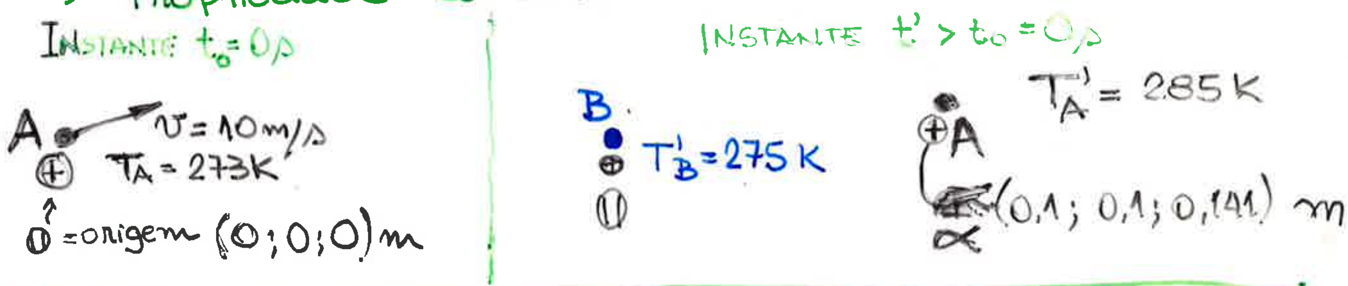
PARTÍCULA A PASSA PELA ORIGEM NO INSTANTE $t=0\,s$ COM TEMPERATURA $\theta = T_A = 273\,K$ E VELOCIDADE $v_A = 10\,m/s$.
NO PONTO α ($x=0{,}1\,m$; $y=0{,}1\,m$; $z=0{,}141\,m$), A PARTÍCULA A PASSA NO INSTANTANTE $t'>0$ COM TEMPERATURA $T_A' = 285\,K$. NESTE MESMO INSTANTE ($t'>0$) UMA PARTÍCULA B ESTÁ PASSANDO PELA ORIGEM COM TEMPERATURA $T_B' = 275\,K$.

PEDE-SE: a) derivadas local, convectiva e total de temperatura na origem e no instante $t=0\,s$

b) derivada total da temperatura, em variáveis de Lagrange, no instante $t=0$

SOLUÇÃO:

a) Propriedade a analisar: Temperatura Absoluta T



Derivada total da TEMPERATURA:

$$\frac{DT}{Dt} \left(\text{ou } \frac{dT}{dt}\right) = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) T$$

em coordenadas intrínsecas (associadas à trajetória)

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e_s} \implies \vec{v} \times \nabla = v \cdot \frac{\partial}{\partial s}$$

Logo: $$\underbrace{\frac{DT}{Dt}}_{\text{TOTAL}} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{LOCAL}} + \underbrace{v \frac{\partial T}{\partial s}}_{\text{CONVECTIVO}}$$

NO PROBLEMA:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad \text{com } \Delta t = t' - t_0 = t' - 0 = t'$$

MAS $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \implies \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$

NO ESPAÇO do PONTO O (0;0;0) m até α (0,1;0,1;0,141) m

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}1^2 + 0{,}141^2} = 0{,}2\ m$$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{0{,}2}{10} = 0{,}02\ s$$

TERMO LOCAL $\Rightarrow \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{(275-273)}{0{,}02} = \frac{2}{0{,}02} = 100\ \frac{K}{s} \right.$

TERMO CONVECTIVO $\Rightarrow \left\{ v \cdot \frac{\partial T}{\partial s} \cong v \frac{\Delta T}{\Delta s} = 10\ \frac{(285-275)}{0{,}2} = 500\ \frac{K}{s} \right.$

DERIVADA TOTAL $\Rightarrow$ SOMA $\Rightarrow \frac{DT}{Dt} \cong 100 + 500 = 600\ \frac{K}{s}$

b) Em variáveis de Lagrange

$$\frac{DT}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(P, t') - T(P, t_0)}{\Delta t}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(A, t') - T(A, t_0 = 0)}{\Delta t} \cong \frac{\Delta T_A}{\Delta t}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{285-273}{0.02} = 600\ \frac{K}{s}$$ $\rightarrow$ o mesmo de a)

EXERCÍCIO

2.2

a) $$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) T$$

em coordenadas intrínsecas:

$$\vec{v} = \vec{v}\,\vec{e_s} \Rightarrow \vec{v} \times \nabla = v \times \frac{\partial}{\partial s}$$

logo

$$\underbrace{\frac{DT}{Dt}}_{Total} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{Local} + \underbrace{\frac{v\,\partial T}{\partial s}}_{convective}$$

Do problema:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{\Delta T}{\Delta t}$$ com onde $\Delta t = t' - t_0 = t' - 0 = t'$

mas $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$

No espaço do pto O (0;0;0) até o Z (0,1; 0,1; 0,141)

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,1^2 + 0,141^2} = 0,2\ m$$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{0,2}{10} = \underline{0,02\ s}$$

Local $\left\{ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{(275-273)}{0,02} = \frac{2}{0,02} = 100\ \frac{K}{s} \right.$ Derivada Local (Euler)

Convectiva $\left\{ \frac{v\,\partial T}{\partial s} \cong v\,\frac{\Delta T}{\Delta s} = 10\,\frac{(285-275)}{0,2} = 500\ \frac{K}{s} \right.$ Derivada convectiva

Total $\left\{ \frac{DT}{Dt} \cong \underbrace{100 + 500}_{\Sigma(\text{local} + \text{convectiva})} = 600\ \frac{K}{s} \right.$

b) Em variáveis de Lagrange

$$\frac{DT}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(P, t') - T(P, t_0 = 0)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(A; t') - T(A, t_0 = 0)}{\Delta t} \cong \frac{\Delta T_A (A)}{\Delta t}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{285 - 273}{0,02} = 600\ \frac{K}{s}$$ o mesmo de a)