Introdução à Cinemática dos Fluidos

PME 3230 - Mecânica dos Fluidos I

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

2° Semestre de 2016

Conteúdo da Aula

Introdução

A cinemática dos fluidos trata do estudo do movimento dos fluidos sem considerar as forças que estão atuando. Cabe à cinemática dos fluidos:

- descrever campos de velocidades;
- descrever campos de acelerações;
- descrições dos movimentos;
- auxiliar na visualização dos movimentos dos fluidos.

Os fluidos movem-se devido a tensões atuantes sobre eles: tensões normais de compressão (que combinadas resultam na pressão sobre o fluido); tensões de cisalhamento.

Há muitos fenômenos que ocorrem frequentemente ao nosso redor que permitem a visualização dos escoamentos:

- fumaça de chaminés e cigarros;
- movimento de nuvens na atmosfera;
- movimento de ondas em mares, lagos, rios;
- mistura de fluidos de colorações diferentes.

Exemplos de Vizualização

Descrição Euleriana e Langrangiana dos Escoamentos

Considere uma grandeza qualquer, G, escalar ou vetorial, que possa ser estudada em função do tempo.

Método de Lagrange [Joseph L. Lagrange (1736 a 1813)]: consiste em acompanhar a partícula ao longo da sua trajetória, de uma posição inicial A, para, em cada instante, encontrar o valor da grandeza $G = G_L(x_A, y_A, z_A, t)$. Note que que o ponto (x_A, y_A, z_A) define o ponto inicial - o nome - de cada partícula. Este método aplicado à mecânica dos fluidos resulta em acompanhar muitas partículas, o que torna esta tarefa extremamente difícil. Porém, há algumas situações práticas onde o método de Lagrange é útil, tais como, a descrição do movimento de bóias oceânicas, balões meteorológicos, migração de pássaros, rastreamento de veículos por satélite.

Descrição Euleriana e Langrangiana dos Escoamentos

Método de Euler [Leonhard Euler (1707 a 1783)]: consiste em se fixar um ponto geométrico $P(x_P, y_P, z_P)$ para se detectar ai a grandeza física associada às partículas que, em diferentes instantes, passam por P. Assim, $G = G_E(x_P, y_P, z_P, t)$. Neste caso as grandezas passam a ser funções tanto do espaço como do tempo. A região física do escoamento quando estudada por esse método recebe o nome de *campo de escoamento*.

Geralmente, o método de Euler é mais utilizado:

- na maioria dos casos práticos as partículas não conservam sua individualidade física (seja por difusão, seja por turbulência), o que prejudica a descrição da trajetória (se fosse, então, utilizado o método lagrangiano);
- as leis físicas obtidas pelo método euleriano são mais fáceis de aplicar em situações reais;
- a dimensão das partículas num escoamento resulta proibitivo o uso de instrumentos que possam ser utilizados durante sua trajetória.

Linha de Trajetória: conjunto de pontos percorridos por uma partícula no campo de escoamento; ela fornece o histórico das localizações da partícula. Matematicamente ela é definida pela integração dos componentes da velocidade:

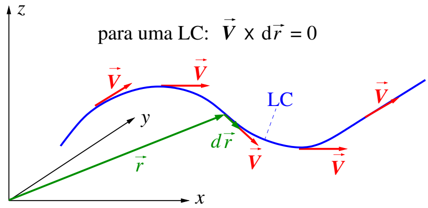
$$x = \int u.dt \; ; \; y = \int v.dt \; ; \; z = \int w.dt$$

Linha de Emissão: uma linha instantânea, formada pelos pontos ocupados por todas as partículas originárias de um ponto específico do escoamento.

Linha de Corrente: linha instantânea que é tangente em todos os pontos ao vetor velocidade do escoamento. Para uma linha de corrente pode-se escrever:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{d\vec{r}}{\vec{V}}$$

Principais Linhas do Escoamento



Observe que, para uma linha de corrente (LC), o produto vetorial $\vec{V} \times d\vec{r} = 0$, pois tanto $\vec{V}$ como $d\vec{r}$ estão na mesma direção.

Tubo de corrente: é um tubo (fictício) cujas paredes são formadas por linhas de corrente. Como a velocidade é tangente às linhas de corrente, nenhuma partícula fluida pode atravessar as paredes de um tubo de corrente. Uma tubulação é um tubo de corrente, assim como um canal aberto.

Para escoamentos em regime permanente, as linhas de trajetória, de emissão e de corrente são todas coincidentes.

Campo de Velocidades

O campo de velocidades de um fluido é expressado pelos seu vetor velocidade, $\vec{V}$, dado por:

$$\vec{V} = u(x,y,z,t).\vec{i} + v(x,y,z,t).\vec{j} + w(x,y,z,t).\vec{k}$$

é comum também desginar os componentes do vetor velocidade u, v e w por V_x, V_y e V_z, respectivamente.

Outras equações importantes relativas à este tópico:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ , onde } \vec{r} = \vec{r}(x,y,z,t)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

Derivadas Material, Local e Convectiva

A descrição matemática da taxa, ou derivada temporal, de uma propriedade do fluido num escoamento depende do método escolhido para sua descrição: euleriano ou lagrangiano. Como o método euleriano é o mais utilizado, passa-se à dedução de uma taxa neste método para uma grandeza G (genérica), escalar ou vetorial.

Considere dois instantes sucessivos, 1 e 2. De tal modo que se pode escrever para cada um deles: $G_1 = G(x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $G_2 = G(x_2, y_2, z_2, t_2)$. Para prever o valor de G_2 conhecendo-se G_1 pode-se utilizar a expansão em série de Taylor a partir do ponto 1:

$$\begin{aligned} G_2 \quad = \quad & G_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_1 \cdot (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_1 \cdot (y_2 - y_1) \\ & + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_1 \cdot (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_1 \cdot (t_2 - t_1) + \text{ termos de ordem superior} \end{aligned}$$

Derivadas Material, Local e Convectiva

Dividindo-se a eq. anterior por $(t_2 - t_1)$ e ignorando os termos de ordem superior, obtém-se:

$$\frac{G_2 - G_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_1 \cdot \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_1$$

Na eq. acima, o lado esquerdo é a taxa média de variação (temporal) da grandeza G quando o fluido se move da posição 1 para a posição 2. No limite, quando $t_2 \to t_1$:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{G_2 - G_1}{t_2 - t_1} = \frac{dG}{dt} \equiv \frac{DG}{Dt}$$

onde DG/Dt é conhecida como **derivada material (ou substancial, ou total)** e representa a variação instantânea da grandeza G do elemento fluido através do ponto 1.

Para os outros termos, quando $t_2 \to t_1$:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u \; ; \; \lim_{t_2 \to t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v \; ; \; \lim_{t_2 \to t_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = w$$

Assim,

$$\frac{DG}{Dt} = u \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial G}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

Introduzindo o operador $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

obtém-se, finalmente:

$$\underbrace{\frac{DG}{Dt}}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{material}}} = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{local}}} + \underbrace{\left(\vec{V} \bullet \vec{\nabla}\right) . G}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{convectiva}}}$$

Derivadas Material, Local e Convectiva

A derivada local, $\partial G/\partial t$, é o termo que se anula quando o escoamento encontra-se em regime permanente.

Exemplo para interpretação: "Em uma tubulação, a aceleração local aparece se uma válvula está sendo aberta ou fechada; e a aceleração convectiva ocorre na vizinhança de uma mudança da geometria da tubulação, tal como o estreitamento da seção ou um cotovelo. Em ambos os casos as partículas mudam de velocidade, mas por razões totalmente diferentes."[(POTTER; WIGGERT; RAMADAN, 2014)]

Se G é um vetor, então primeiro deve-se fazer o produto $\vec{V} \bullet \vec{\nabla}$ e, então, aplicar o resultado a G. Se G é um escalar, é indiferente escrever $\left(\vec{V} \bullet \vec{\nabla}\right).G$ ou $\vec{V} \bullet \vec{\nabla}.G$.

Derivadas Material, Local e Convectiva

Numa descrição lagrangiana, a derivada material é dada simplesmente por:

$$\frac{DG_L}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{G_L(x_A, y_A, z_A, t + \Delta t) - G_L(x_A, y_A, z_A, t)}{\Delta t}$$

OBS: lembrar que o ponto (x_A, y_A, z_A) define o ponto inicial (que é usado então como <u>nome</u>) de uma partícula específica.

Embora mais simples matematicamente falando, sua dificuldade consiste em obter os valores da grandeza G de cada partícula à medida que passa o tempo (e a partícula, portanto, move-se)!

Aceleração

Se $G = \vec{V}$, então $D\vec{V}/Dt = \vec{a}$, onde $\vec{a}$ é a aceleração:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \bullet \vec{\nabla}\right) \cdot \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

onde,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \vec{k}$$

$$u \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \vec{j} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \vec{k}$$

$$v \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{i} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \vec{j} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \vec{k}$$

$$w \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{i} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \vec{j} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

Aceleração

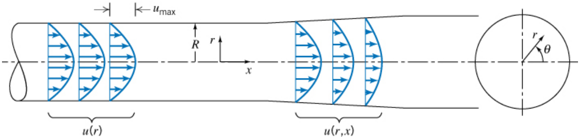
Concluindo,

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{a_x} \cdot \vec{i}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\right)}_{a_y} \cdot \vec{j}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{a_z} \cdot \vec{k}$$

Escoamentos Uni, Bi e Tridimensionais

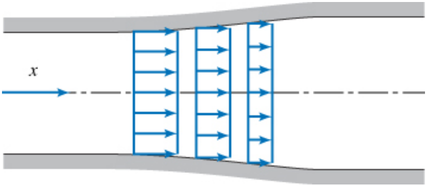


Um campo de escoamento é melhor caracterizado pela distribuição de velocidade e desse modo o escoamento é dito ser uni, bi ou tridimensional se a velocidade do escoamento varia basicamente em uma, duas ou três dimensões respectivamente.

Quando a variação de velocidade em certas direções é pequena em relação às outras, as primeiras podem ser ignoradas (erro desprezível).

Para a região de perfil de velocidade completamente desenvolvido (trecho de área de seção constante na figura) o escoamento é unidimensional em coordenadas cilíndricas, mas bidimensional em coordenadas cartesianas!

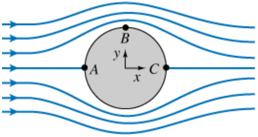
Escoamento Uniforme



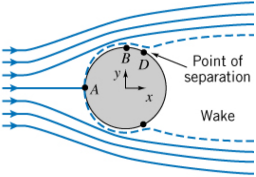
Como todos os fluidos satisfazem a condição de aderência, forçosamente são sempre bi ou tridimensionais. Para simplificação, muitas vezes utiliza-se o conceito de escoamento uniforme que deve ser entendido numa seção transversal do escoamento.

Para um escoamento que é dito uniforme numa dada seção transversal a velocidade deve ser considerada constante através de qualquer seção normal ao escoamento, como ilustra a figura acima. Para esta figura, tal hipótese simplifica o problema que pode ser tratado, agora, como unidimensional.

Escoamentos Viscosos e Não Viscosos



(a) Inviscid flow

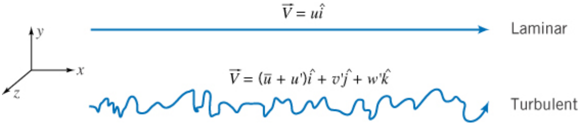


(b) Viscous flow

A força de arrasto que se sente ao colocar a mão para fora de um carro em movimento é devida ao atrito viscoso com o ar, à diferença de pressão (a montante e jusante) ou ambos?

Neste exemplo a resposta seria: depende muito mais da diferença de pressão que do atrito viscoso. Mas, como predizer a importância relativa da viscosidade em qualquer instante, para qualquer condição de escoamento? A resposta é que podemos por meio do cálculo do número de Reynolds: Re = $\rho.V.L/\mu$. Para Re elevados os efeitos da viscosidade são desprezíveis; para Re pequenos os efeitos viscosos serão dominantes. Um escoamento onde a viscosidade pode ser desprezada é chamado <u>invíscido</u>. Existem muitos desdobramentos relativos à esta questão que serão apresentados à medida que o curso avance. Na figura acima, em (a) seria a forma das LC previstas para um escoamento invíscido sobre uma esfera, mas na prática, em (b), sabe-se que a viscosidade é fundamental para explicar este escoamento específico.

Escoamentos Laminares e Turbulentos



Um escoamento <u>laminar</u> é aquele onde as partículas movem-se em camadas lisas, ou lâminas. Quando o fluido é translúcido tem aparência ”vitrificada”.

Um escoamento <u>turbulento</u> é aquele no qual as partículas misturam-se rapidamente, devido às flutuações aleatórioas no campo tridimensional de velocidades. Não existem escoamentos turbulentos uni ou bidimensionais, são sempre tridimensionais. O que se pode falar é apenas de uma direção predominante do escoamento, como indicado na figura acima para a componente na direção axial (x) do escoamento. Assim, o conceito de regime permanente, quando o escoamento é turbulento, deve ser entendido para a média da variável (propriedade) em análise: escoamentos turbulentos só podem ser permanentes em média. Neste tipo de escoamento as flutuações (u', v', w') transportam quantidade de movimento através das LC's aumentando a tensão de cisalhamento média. Escoamentos turbulentos apoiam-se em teorias semi-empíricas e em dados experimentais. Turbulência é propriedade do escoamento, não do fluido.

Escoamentos Incompressíveis e Compressíveis

Escoamentos nos quais as variações da massa específica são desprezíveis são denominados incompressíveis; do contrário chamam-se compressíveis. Gases comportam-se como fluidos compressíveis, enquanto líquidos são, geralmente, incompressíveis. Estes apresentam alguma compressibilidade somente quando submetidos a pressões muitíssimo elevadas.

Quando o módulo de compressibilidade de um líquido for independente da temperatura, sua massa específica passa a ser função apenas da pressão e o fluido é dito *barotrópico*.

Informação de ordem prática: O número de Mach (M) é definido como a razão entre a velocidade média do escoamento, V, e a velocidade do som no meio (fluido), c: M = V/c. Para M $<$ 0,3 a variação máxima da massa específica de um gás é menor que 5%. Assim, para 0 $<$ M $<$ 0,3 os escoamentos de gases podem ser considerados incompressíveis. Para o ar isso equivale, aproximadamente, a $V <$ 100 m/s.

Regimes de Escoamentos

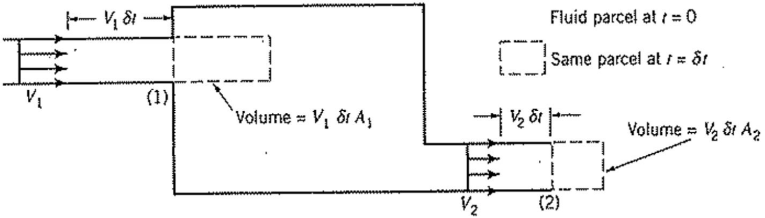
Escoamento em regime permanente implica não haver mudança das propriedades [de interesse] do escoamento com o passar do tempo.

Escoamento em regime transitório é aquele onde as propriedades do escaomento (não há necessidade de que sejam todas) sofrem alteração com o passar do tempo. Os escoamentos neste regime podem ser periódicos (escoamento no interior de um motor), ou não periódicos (turbulência).

Um escoamento pode ser dito em regime permanente se as propriedades que estão sendo estudas não variam com o tempo, mesmo que outras (que não se interessa estudar) estejam variando. Se, por exemplo, a temperatura não altera as propriedades de interesse num escoamento e ela esteja variando, o escoamento pode ser dito em regime permanente se ela não for considerada.

O *regime* neste contexto deve ser entendido como característica do escoamento, nunca do fluido.

Conceito de Vazão: visão simplificada



Considere regime permanente: a quantidade de massa que entra deve ser igual a que sai para o mesmo intervalo de tempo.
Define-se vazão mássica, $\dot{m}$ [kg/s no SI], por: $\dot{m} = \rho.Q$, onde Q é a vazão volumétrica [m^3/s no SI].
Tomando, por exemplo a seção de saída: se a área da seção transversal desta saída for A_2 e o fluido a atravessa perpendicularmente com velocidade média V_2, então o volume de fluido que atravessa esta seção no intervalo de tempo δt será $V_2.A_2.\delta t$. Assim, a vazão volumétria (razão volume por tempo) será $Q_2 = V_2.A_2$. Deste modo conclui-se também que $\dot{m}_2 = \rho_2.V_2.A_2$.
Pela conservação da massa, $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1.V_1.A_1 = \rho_2.V_2.A_2$. Se a massa específica for constante ($\rho_1 = \rho_2$, fluido incompressível), então $V_1.A_1 = V_2.A_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2$.

Exercício de Aula 1

Enunciado: Uma partícula A passa pela origem no instante $t = 0$, com temperatura $T_A = 273$ K e com velocidade $V_A = 10$ m/s. Ao atingir o ponto de coordenadas $(x = 0,1m; y = 0,1m; z = 0,141m)$ no instante $t' > 0$, com temperatura $T'_A = 285$ K, uma partícula B está passando pela origem (no mesmo instante t') com temperatura $T'_B = 275$ K. Pede-se:

(a) As derivadas local, convectiva e material (total) da temperatura na origem e no instante $t = 0$;

(b) A derivada material da temperatura, em variáveis de Lagrange, no instante $t = 0$.

[Apostila, exercício 2.2]

Exercício de Aula 2

Enunciado: Um campo de velocidade é dado por

$$\vec{V} = A.x.\vec{i} - A.y.\vec{j}$$

onde as unidades de velocidade estão em m/s; x e y são dados em metros; $A = 0,3\ \mathrm{s}^{-1}$.

(a) Obtenha uma equação para as linhas de corrente no plano xy;

(b) Trace a linha de corrente que passa pelo ponto $(x_0, y_0) = (2, 8)$;

(c) Determine a velocidade de uma partícula no ponto $(2, 8)$;

(d) Se a partícula passando pelo ponto (x_0, y_0) no instante $t = 0$ for marcada, determine a sua localização no instante $t = 6$ s;

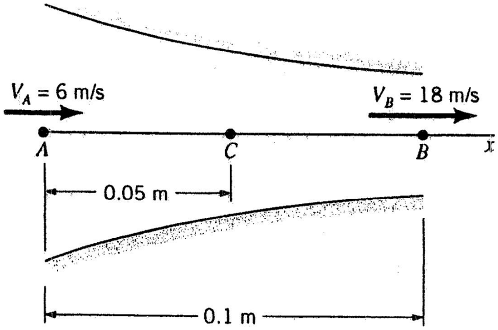
(e) Qual a velocidade dessa partícula em $t = 6$ s?

(f) Mostre que a equação da trajetória da partícula é a mesma equação da linha de corrente. Em que tipo de regime de escoamento isto ocorre?

[(FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006), exemplo 2.1]

Exercício de Aula 3

Enunciado: A velocidade do fluido ao longo do eixo *x* mostrado na figura muda linearmente de 6 m/s, no ponto *A*, para 18 m/s, no ponto *B*. Determine as acelerações nesta direção do escoamento nos pontos *A*, *B* e *C*. Admita que o regime de escoamento é o permanente. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 4.21]

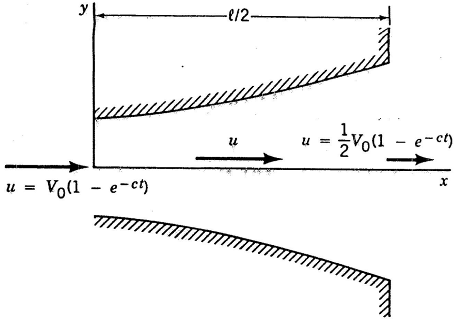


Exercício de Aula 4

Enunciado: Água escoa pelo difusor mostrado na figura quando uma válvula é aberta. A velocidade ao longo da linha de centro do difusor é dada, em função do tempo, por

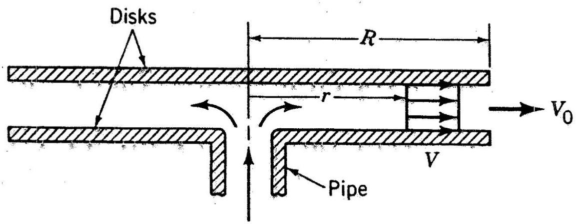
$$\vec{V} = u.\vec{i} = V_0.\left(1 - e^{-c.t}\right).(1 - x/l).\vec{i}$$

onde V_0, c e l são constantes. Determine a aceleração do escoamento em função de x e t. Se $V_0 = 3$ m/s e $l = 1,5$ m, qual o valor de c (não nulo) necessário para que a aceleração seja nula em qualquer x e em $t = 2$ s? Como a aceleração pode ser nula num escoamento onde a vazão em volume aumenta com o tempo? [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 4.23]



Exercício de Aula 5

Enunciado: Ar escoa no canal formado por dois discos paralelos (veja figura). A velocidade do fluido no canal é dada por $V = V_0.R/r$, onde R é o raio dos discos, r é a coordenada radial e V_0 é a velocidade do fluido na borda do canal. Determine a aceleração em $r = 0,3$; 0,61 e 0,91 m, sabendo que $V_0 = 1,5$ m/s e $R = 0,91$ m. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 4.47]



Exercício de Aula 6

Enunciado: Dado o movimento plano em que,

$$\vec{V}(P,t) = (U + a.t).\vec{i} + V_0.\vec{j}$$

mostre que as linhas de corrente, no instante t_0, são retas e que as linhas de trajetórias são parábolas. [Apostila, exercício 2.5]

Exercício de Aula 7

Dado o campo de velocidades

$$\vec{V}(P,t) = 6.x.\vec{i} + 6.y.\vec{j} - 7.t.\vec{k}$$

determine para $t = 10$ s e no ponto $P(3\ \text{m}; 1,8\ \text{m}; 0)$ a velocidade e a aceleração, usando método de Euler e de Lagrange. [Apostila, exercício 2.13]

Referências Bibliográficas

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. ISBN 978-85-216-1468-5.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. São Paulo: Blücher, 2004. ISBN 978-85-212-0343-8.

POTTER, M. C.; WIGGERT, D. C.; RAMADAN, B. H. *Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. São Paulo: Blücher, 2014. ISBN 978-85-221-1568-6.