0. Revisão de Teoria de Perturbação dependente do tempo

Seja a transição entre estados do contínuo $i \to f$ devido à perturbação V que independe do tempo. A regra de ouro de Fermi (resultado de 1ª ordem de teoria de perturbação) é

$$\Gamma_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle f|V|i\rangle\right|^2 \delta(E_i - E_f)$$

Onde $\Gamma_{i\to f}$ é a prob. de transição por unidade de tempo. Para uma partícula livre no estado final a densidade de estados é

$$dN_f = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3k_f = \underbrace{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{d^3k_f}{dE_f}}_{\rho_f} dE_f$$

$$\rho_f \to \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{d^3p_f}{dE_f}$$

1. Exemplo: espalhamento de partículas (rápidas) carregadas por átomos

Para poder utilizar 1ª ordem de teoria de perturbação vamos considerar que a energia cinética dos projéteis é muito maior que a energia de ligação coulombiana.

(a) Expressões Gerais

Conservação de energia: $\frac{\hbar^2 k_i^2}{2M} + E_i^{at} = \frac{\hbar^2 k_f^2}{2M} + E_f^{at}$

$$\Rightarrow \quad k_i^2 = k_f^2 + \underbrace{2M\Delta_\mu}_{\gamma_\mu^2} \qquad \text{onde} \qquad \Delta_\mu = \frac{E_f^{at} - E_i^{at}}{\hbar^2}$$

onde

Assumindo que a massa do átomo é suficientemente grande p/ desprezar o recuo do átomo.

Momento transferido: $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ onde

$$q^2 = \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{k}_i^2 + \mathbf{k}_f^2 - 2\,\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{k}_f = k_i^2 + (k_i^2 - \overbrace{2M\Delta_\mu}^{\gamma_\mu^2}) - 2k_i\underbrace{\sqrt{k_i^2-\gamma_\mu^2}}_{\to\sqrt{\ }\,-k_i+k_i}\cos\theta$$

$$= \underbrace{2k_i^2(1-\cos\theta)}_{4k_i^2\sin^2\frac{\theta}{2}} - 2k_i\left[\sqrt{k_i^2-\gamma_\mu^2} - k_i\right]\cos\theta - \gamma_\mu^2 \quad ✓$$

Para altas energias: $\sqrt{k_i^2-\gamma_\mu^2} - k_i \overset{k_i^2 \gg \gamma_\mu^2}{\cong} k_i\left(1 - \frac{\gamma_\mu^2}{2k_i^2}\right) - k_i \cong -\frac{\gamma_\mu^2}{2k_i}$

$$\Rightarrow q^2 \cong 4k_i^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \gamma_\mu^2\cos\theta - \gamma_\mu^2 \qquad \cong 4\left(k_i^2 - \frac{\gamma_\mu^2}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}$$

A interação projétil-alvo é descrita por

$$V = -\sum_{i=1}^{Z} \frac{e^2}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} + Z\int d^3r' \frac{\rho_N(\mathbf{r}')\, e^2}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

elétrons

Assumindo que o núcleo não é excitado pela colisão.

ρ_N : distribuição de carga do núcleo normalizada a 1

Agora aplicamos a 1ª ordem da teoria da perturbação dependente do tempo ($\equiv$ Born).

$$|i\rangle \equiv |\mathbf{k}_i\, \chi_0\rangle$$
$$|f\rangle \equiv |\mathbf{k}_f\, \chi_n\rangle$$

A amplitude de transição é

$$T_n(\mathbf{q}) = \int d^3r \,\langle\chi_n| \frac{e^{-i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}}\, V\, \frac{e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}}|\chi_0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r \,\langle\chi_n| e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\, V|\chi_0\rangle$$

$\mathbf{y} = \mathbf{r}-\mathbf{x}$

Usando que

$$\int d^3r \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \underbrace{\int d^3y \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}}{4\pi|\mathbf{y}|}}_{\approx \frac{1}{q^2}} = \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}}{q^2}$$

$$T_n = \frac{-e^2}{(2\pi)^3 q^2}\sum_{j=1}^{Z}\langle\chi_n|e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j}|\chi_0\rangle + \frac{Z e^2}{q^2 (2\pi)^3}\langle\chi_n|\chi_0\rangle \int d^3r'\, \rho(\mathbf{r}')\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}$$

Definindo $n_{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{Z} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j}$

$$T_\mu(\mathbf{q}) = -\frac{e^2}{q^2(2\pi)^3}\langle \chi_\mu | n_{\mathbf{q}} | \chi_0\rangle + \frac{Ze^2}{q^2(2\pi)^3}\,\delta_{\mu,0}\int d^3r'\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}\rho_0(\mathbf{r}')$$

Obs. sobre os resultados nesta ordem de perturbação:

i) T_μ é a superposição coerente do espalhamento do projétil ~~pelos~~ por cada um dos elétrons com a ~~...~~ transferência de $\mathbf{q}$ para apenas 1 elétron. Não é válido em geral!

ii) A colisão não altera o ~~estado~~ estado dos outros elétrons

$\Rightarrow$ é uma aproximação de impulso!

Seção de choque: $\Gamma_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|T_\mu(\mathbf{q})\right|^2\delta(E_i - E_f)$

Agora, somamos sobre configurações finais do contínuo

$$\Gamma_{i\to F} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|T_\mu(\mathbf{q})\right|^2\delta(E_i - E_f)\,\rho_f(E_f)\,dE_f$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}\left|T_\mu(\mathbf{q})\right|^2\rho_f(E_i)$$

onde $\rho_f(E_i) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{d^3p_f}{dE_f}\Big|_{E_i}$ (1)

Agora

$$F_{inc} \, d\sigma_\mu = \Gamma_{i \to F}$$

↳ fluxo incidente

Logo
$$d\sigma = \frac{1}{F_{inc}} \Gamma_{i\to F} = \frac{1}{F_{inc}} \frac{2\pi}{\hbar} \left| T_\mu(q_1) \right|^2 \rho_f$$

CUIDADO: os cálculos até aqui foram feitos normalizando a δ os estados do momento $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Com isso a densidade de estados (4-1) deve ser modificada com $L \to 2\pi\hbar$.

Mais ainda o fluxo incidente

$$\frac{v_i}{L^3} \longrightarrow \frac{v_i}{(2\pi\hbar)^3}$$

Logo: $$d\sigma_\mu = \frac{(2\pi\hbar)^3}{v_i} \frac{2\pi}{\hbar} \left| T_\mu(q_1) \right|^2 \frac{d^3 p_f}{dE_f}$$

$$p_f = \sqrt{2ME_f}$$

$$\frac{d^3 p_f}{dE_f} = d\Omega_f \, p_f^2 \frac{dp_f}{dE_f} = d\Omega_f \, p_f^2 \, \sqrt{2M} \frac{1}{2\sqrt{E_f}} = d\Omega_f \frac{2M}{2 p_f} p_f$$

$$\frac{d\sigma_\mu}{d\Omega_f} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{v_i} \frac{2\pi}{\hbar} \left| T_\mu(q_1) \right|^2 M \, p_f = \frac{(2\pi\hbar)^3}{\frac{\hbar k_i}{M}} \frac{2\pi}{\hbar} |T_\mu|^2 M \, \hbar k_f$$

$$\frac{d\sigma_\mu}{d\Omega} = (2\pi)^4 M^2 \frac{k_f}{k_i} |T_\mu(q)|^2 \hbar^2 \qquad (I)$$

p/ reproduzir (15) pg 407
$\hbar \to 1$

$\boxed{01/04/09}$

5) Espalhamento elástico: $\underline{\mu = 0}$

Definimos $F_N = \int d^3r \; e^{iq \cdot r} \rho_N(r)$

$$F_0(q) = \langle \chi_0 | \nu_q | \chi_0 \rangle \frac{1}{Z}$$

pg (4)
$$\Rightarrow T_{el} = - \frac{Ze^2}{q^2 (2\pi\hbar)^3} \cdot \left[F_0 - F_N\right]$$

Assumindo distribuição esfericamente simétrica $\Rightarrow F_{0,N}(q) = F_{0,N}(q)$

Note que, por definição, $F_0(0) = F_N(0) = 1$

Logo $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 M^2 \frac{k_f}{k_i} \hbar^2 \frac{Z^2 e^4}{q^4 (2\pi\hbar)^6} |F_0 - F_N|^2$$

$$= \underbrace{\frac{Z^2 e^4 M^2}{4\pi^2 q^4 \hbar^4}}_{\text{obtido anteriormente!}} |F_0 - F_N|^2$$

$\frac{d\sigma_{\text{Rutherford}}}{d\Omega}$