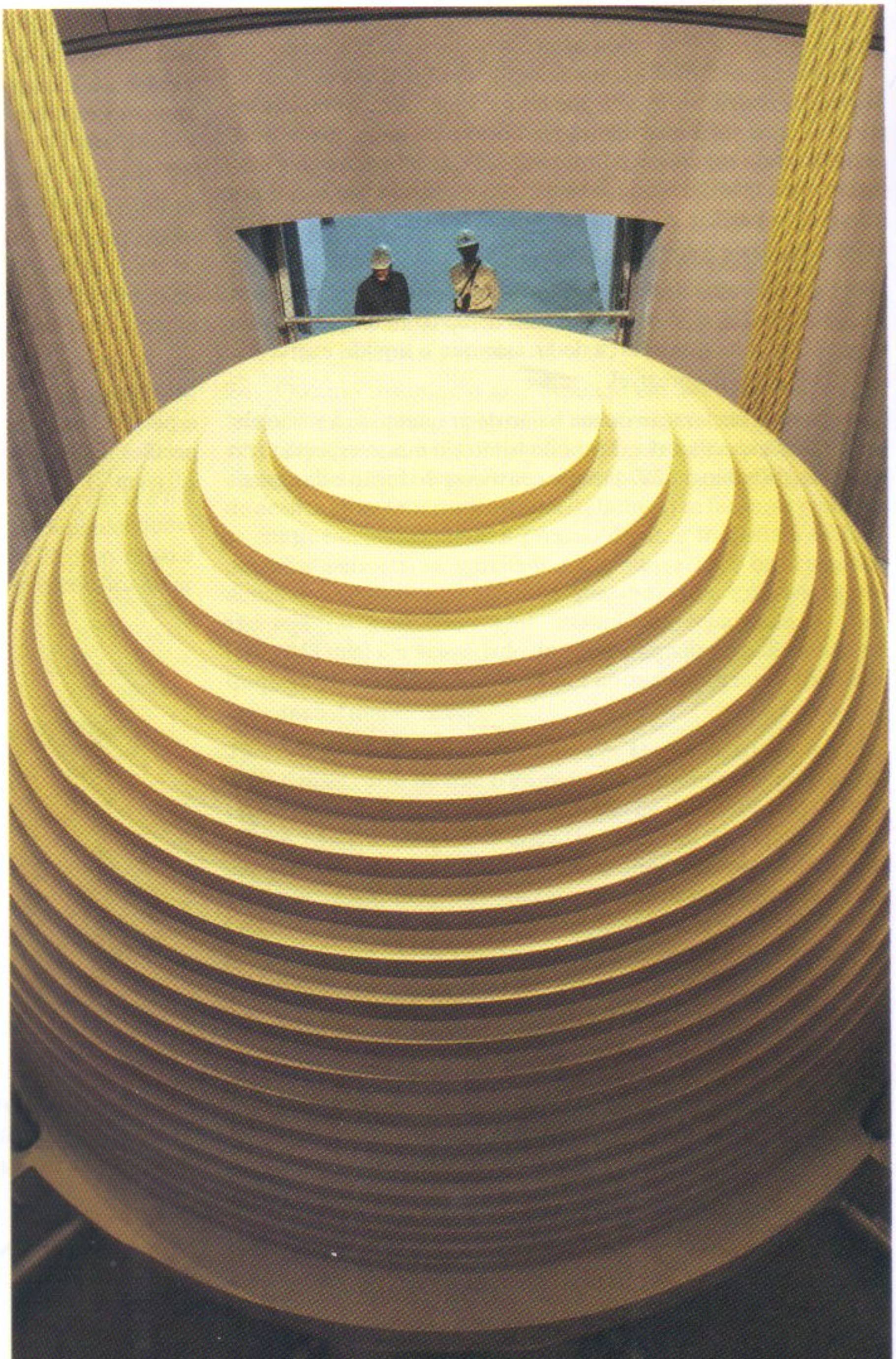
15 Oscilações

Se o vento faz um edifício oscilar ligeiramente o movimento pode passar despercebido, mas se as oscilações se repetem mais de 10 vezes por segundo tornam-se desagradáveis e podem causar tonturas e náuseas nos ocupantes. Uma razão para isso é que quando uma pessoa está de pé a cabeça tende a balançar mais que os pés, ativando os sensores de movimento do ouvido interno. Vários dispositivos são usados para reduzir a oscilação dos edifícios. Por exemplo, a grande peça (de $5{,}4 \times 10^5$ kg) mostrada nesta fotografia está pendurada no 92º andar de um dos edifícios mais altos do mundo.



REUTERS/Richard Chung/Landov LLC

Como é possível atenuar as oscilações inofensivas, mas desagradáveis, que o vento produz em um edifício muito alto?

A resposta está neste capítulo.

15-1 O QUE É FÍSICA?

Nosso mundo está repleto de oscilações, nas quais os objetos se movem repetidamente de um lado para outro. Muitas são simplesmente curiosas ou desagradáveis, mas outras podem ser economicamente importantes ou perigosas. Eis alguns exemplos: Quando um taco rebate uma bola de beisebol, o taco pode sofrer uma oscilação suficiente para machucar a mão do batedor ou mesmo se partir em dois. Quando o vento fustiga uma linha de transmissão de energia elétrica, a linha às vezes oscila ("galopa", no jargão dos engenheiros elétricos) com tanta intensidade que pode se romper, interrompendo o fornecimento de energia elétrica a toda uma região. Nos aviões, a turbulência do ar que passa pelas asas faz com que elas oscilem, causando fadiga no metal, o que pode fazer com que as asas se quebrem. Quando um trem faz uma curva, as rodas oscilam horizontalmente quando são forçadas a mudar de direção, produzindo um som peculiar.

Quando acontece um terremoto nas vizinhanças de uma cidade os edifícios sofrem oscilações tão intensas que podem desmoronar. Quando uma flecha é lançada de um arco as penas da extremidade conseguem passar pelo arco sem se chocar com ele porque a flecha oscila. Quando se deixa cair uma moeda em um prato metálico a moeda oscila de uma forma tão característica que é possível saber o valor da moeda pelo som produzido. Quando um caubói de rodeio monta um touro seu corpo oscila em várias direções enquanto o touro gira e corcoveia (ao menos, é o que o caubói procura fazer).

O estudo e o controle de oscilações são dois objetivos importantes da física e da engenharia. Neste capítulo vamos discutir um tipo básico de oscilação, conhecido como *movimento harmônico simples*.

15-2 | Movimento Harmônico Simples

A Fig. 15-1*a* mostra uma seqüência de "instantâneos" de um sistema oscilatório simples, uma partícula que se move repetidamente para um lado e para outro da origem de um eixo x. Nesta seção vamos nos limitar a descrever o movimento. Mais adiante discutiremos como esse tipo de movimento pode ser produzido.

Uma propriedade importante do movimento oscilatório é a sua **freqüência**, o número de oscilações completas por segundo. O símbolo de freqüência é f e a unidade de freqüência no SI é o **hertz** (Hz), definido como

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1 \text{ s}^{-1}. \qquad (15\text{-}1)$$

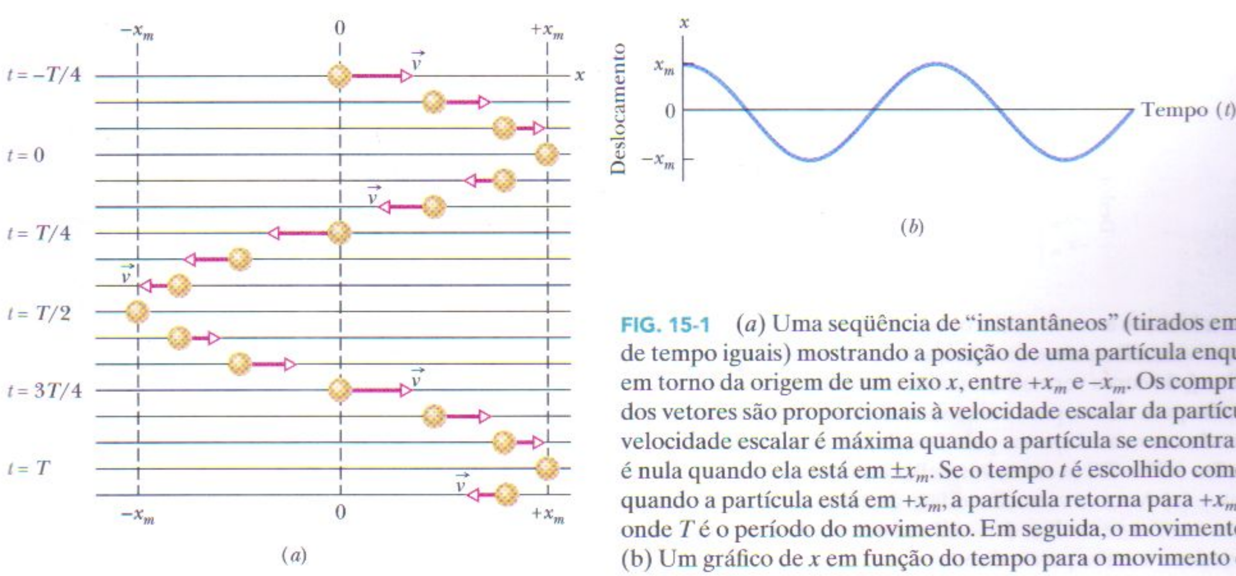


FIG. 15-1 (*a*) Uma seqüência de "instantâneos" (tirados em intervalos de tempo iguais) mostrando a posição de uma partícula enquanto oscila em torno da origem de um eixo x, entre $+x_m$ e $-x_m$. Os comprimentos dos vetores são proporcionais à velocidade escalar da partícula. A velocidade escalar é máxima quando a partícula se encontra na origem e é nula quando ela está em $\pm x_m$. Se o tempo t é escolhido como sendo zero quando a partícula está em $+x_m$, a partícula retorna para $+x_m$ em $t = T$, onde T é o período do movimento. Em seguida, o movimento é repetido. (b) Um gráfico de x em função do tempo para o movimento do item (*a*).

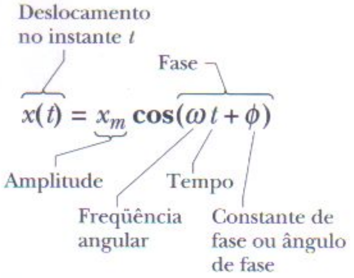


FIG. 15-2 Nomes das grandezas da Eq. 15-3, que descreve o movimento harmônico simples.

Uma grandeza relacionada à freqüência é o **período** T do movimento, que é o tempo necessário para completar uma oscilação completa (ou um **ciclo**):

$$T = \frac{1}{f}. \tag{15-2}$$

Todo movimento que se repete a intervalos regulares é chamado de **movimento periódico** ou **movimento harmônico**. No momento estamos interessados em um movimento que se repete de um modo particular, o que está representado na Fig. 15-1*a*. Nesse tipo de movimento o deslocamento x da partícula em relação à origem é dado por uma função do tempo da forma

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(deslocamento)}, \tag{15-3}$$

onde x_m, ω e ϕ são constantes. Esse movimento é chamado de **movimento harmônico simples** (MHS), uma expressão que significa que o movimento periódico é uma função senoidal do tempo. O gráfico da Eq. 15-3, na qual a função senoidal é uma função co-seno, aparece na Fig. 15-1*b*. (Esse gráfico pode ser obtido fazendo a Fig. 15-1*a* girar 90° no sentido anti-horário e passando uma curva pelas várias posições sucessivas da partícula.) As grandezas que determinam a forma do gráfico são mostradas na Fig. 15-2 com os respectivos nomes. Vamos agora definir essas grandezas.

A grandeza x_m, denominada **amplitude** do movimento, é uma constante positiva cujo valor depende do modo como o movimento foi produzido. O índice m indica o valor *máximo*, já que a amplitude representa o deslocamento máximo da partícula em um dos sentidos. A função co-seno da Eq. 15-3 varia entre os limites ± 1; assim, o deslocamento $x(t)$ varia entre os limites $\pm x_m$.

A grandeza dependente do tempo $(\omega t + \phi)$ da Eq. 15-3 é chamada de **fase** do movimento, e a constante ϕ é chamada de **constante de fase** (ou **ângulo de fase**). O valor de ϕ depende do deslocamento e da velocidade da partícula no instante $t = 0$. Nos gráficos de $x(t)$ da Fig. 15-3*a* a constante de fase ϕ é zero.

Para interpretar a constante ω, denominada **freqüência angular** do movimento, notamos primeiramente que o deslocamento $x(t)$ deve ser igual a $x(t + T)$ para qualquer valor de t. Para simplificar esta análise, vamos fazer $\phi = 0$ na Eq. 15-3. Nesse caso, podemos escrever

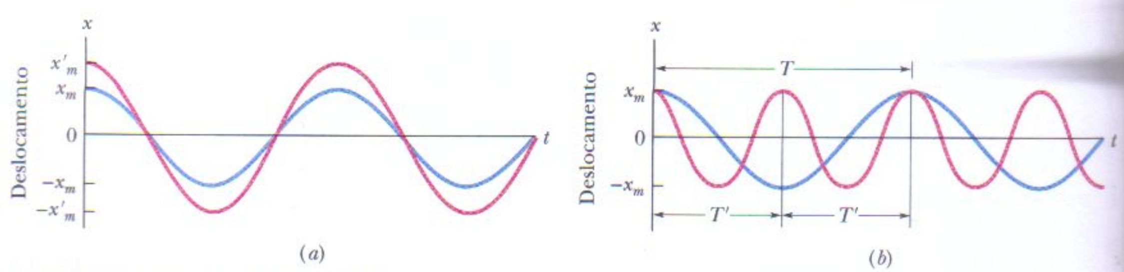
$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega(t + T). \tag{15-4}$$

A função co-seno se repete pela primeira vez quando seu argumento (a fase) aumenta de 2π rad; assim, a Eq. 15-4 nos dá

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

ou

$$\omega T = 2\pi.$$



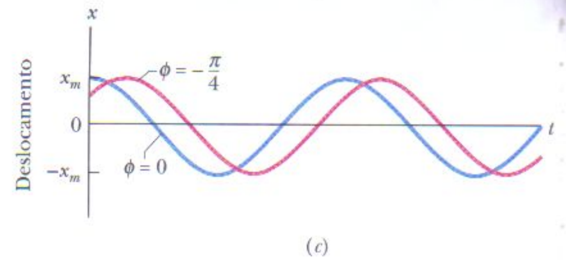


FIG. 15-3 Nos três casos a curva azul é obtida da Eq. 15-3 com $\phi = 0$. (*a*) A curva vermelha difere da curva azul *apenas* pelo fato de que a amplitude x'_m da curva vermelha é maior (os deslocamentos da curva vermelha para cima e para baixo são maiores). (*b*) A curva vermelha difere da curva azul *apenas* pelo fato de que o período da curva vermelha é $T' = T/2$ (a curva vermelha está comprimida horizontalmente). (*c*) A curva vermelha difere da curva azul *apenas* pelo fato de que, para a curva vermelha, $\phi = -\pi/4$ rad em vez de zero (o valor negativo de ϕ desloca a curva para a direita).

Assim, de acordo com a Eq. 15-2, a freqüência angular é

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \qquad (15\text{-}5)$$

A unidade de freqüência angular no SI é o radiano por segundo. (Por coerência, ϕ deve ser expresso em radianos.) A Fig. 15-3 mostra comparações entre as funções $x(t)$ de movimentos harmônicos simples de diferentes amplitudes, períodos (e, portanto, freqüências e freqüências angulares) ou constantes de fase.

TESTE 1 Uma partícula em oscilação harmônica simples de período T (como a da Fig. 15-1) está em $-x_m$ no instante $t = 0$. A partícula está em $-x_m$, em $+x_m$, em 0, entre $-x_m$ e 0 ou entre 0 e $+x_m$ no instante (a) $t = 2{,}00T$, (b) $t = 3{,}50T$ e (c) $t = 5{,}25T$?

A Velocidade do MHS

Derivando a Eq. 15-3, obtemos uma expressão para a velocidade de uma partícula em movimento harmônico simples:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t + \phi)]$$

ou $$v(t) = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{(velocidade).} \qquad (15\text{-}6)$$

A Fig. 15-4*a* é um gráfico da Eq. 15-3 com $\phi = 0$. A Fig. 15-4*b* mostra a Eq. 15-6, também com $\phi = 0$. Analogamente à amplitude x_m da Eq. 15-3, a grandeza positiva ωx_m da Eq. 15-6 é chamada de **amplitude da velocidade** v_m. Como se pode ver na Fig. 15-4*b*, a velocidade da partícula em oscilação varia entre $\pm v_m = \pm\omega x_m$. Note também na figura que a curva de $v(t)$ está *deslocada* (para a esquerda) de um quarto de período em relação à curva de $x(t)$; quando o módulo do deslocamento é máximo [isto é, quando $x(t) = x_m$], o módulo da velocidade é mínimo [isto é, $v(t) = 0$]. Quando o módulo do deslocamento é mínimo (isto é, zero), o módulo da velocidade é máximo (isto é, $v_m = \omega x_m$).

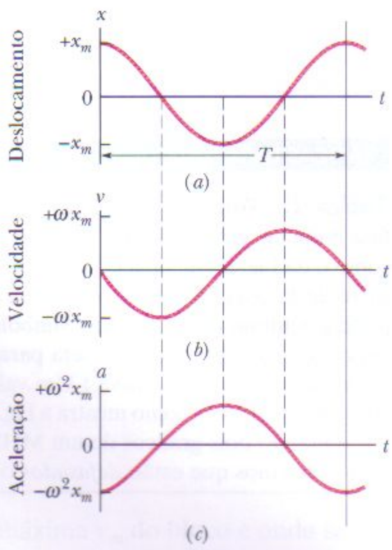


FIG. 15-4 (*a*) O deslocamento $x(t)$ de uma partícula oscilando em um MHS com ângulo de fase ϕ igual a zero. O período T corresponde a uma oscilação completa. (*b*) A velocidade $v(t)$ da partícula. (*c*) A aceleração $a(t)$ da partícula.

A Aceleração do MHS

Conhecendo a velocidade $v(t)$ do movimento harmônico simples, podemos obter uma expressão para a aceleração da partícula derivando essa velocidade. Derivando a Eq. 15-6, obtemos:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)]$$

ou $$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(aceleração).} \qquad (15\text{-}7)$$

A Fig. 15-4*c* é um gráfico da Eq. 15-7 para o caso em que $\phi = 0$. A grandeza positiva $\omega^2 x_m$ da Eq. 15-7 é chamada de **amplitude da aceleração** a_m, ou seja, a aceleração da partícula varia entre os limites $\pm a_m = \pm\omega^2 x_m$, como mostra a Fig. 15-4*c*. Observe também que a curva da aceleração $a(t)$ está deslocada (para a esquerda) de $T/4$ em relação à curva da velocidade $v(t)$.

Podemos combinar as Eqs. 15-3 e 15-7 para obter

$$a(t) = -\omega^2 x(t), \qquad (15\text{-}8)$$

que é a relação característica do movimento harmônico simples:

No MHS, a aceleração é proporcional ao negativo do deslocamento, e as duas grandezas estão relacionadas pelo quadrado da freqüência angular.

Assim, como mostra a Fig. 15-4, quando o deslocamento está passando pelo maior valor positivo a aceleração possui o maior valor negativo e vice-versa. Quando o deslocamento é nulo, a aceleração também é nula.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Ângulos de Fase* Observe o efeito do ângulo de fase ϕ em um gráfico de $x(t)$. Quando $\phi = 0$, $x(t)$ possui um gráfico como o da Fig. 15-4*a*, uma curva co-seno típica. Um valor de ϕ positivo desloca a curva para a esquerda ao longo do eixo t. (O leitor pode se lembrar disso usando o símbolo $\leftarrow\!\!\uparrow\!\phi$, onde a seta para cima indica um aumento de ϕ e a seta para a esquerda indica o deslocamento resultante da curva.) Um valor de ϕ negativo desloca a curva para a direita, como mostra a Fig. 15-3*c* para $\phi = -\pi/4$.

Quando dois gráficos de um MHS têm ângulos de fase diferentes dizemos que estão *defasados* ou que existe uma *diferença de fase* entre os dois gráficos. Entre as curvas da Fig. 15-3*c* existe uma diferença de fase de $\pi/4$ rad.

Como o MHS se repete após um período T e a função co-seno se repete a cada 2π rad, um período T representa uma diferença de fase de 2π rad. Na Fig. 15-4, $x(t)$ está com a fase deslocada um quarto de período para a direita ($-\pi/2$ rad) em relação a $v(t)$ e com a fase deslocada meio período para a direita ($-\pi$ rad) em relação a $a(t)$. Um deslocamento de fase de 2π rad faz com que uma curva de MHS coincida com si mesma, isto é, permaneça inalterada.

15-3 | A Lei do Movimento Harmônico Simples

Uma vez conhecida a forma como a aceleração de uma partícula varia com o tempo, podemos usar a segunda lei de Newton para descobrir qual é a força que deve agir sobre a partícula para que ela adquira essa aceleração. Combinando a segunda lei de Newton com a Eq. 15-8 encontramos, para o movimento harmônico simples, a seguinte relação:

$$F = ma = -(m\omega^2)x. \tag{15-9}$$

Este resultado, uma força restauradora proporcional ao deslocamento, já foi encontrado em outro contexto: é a expressão matemática da lei de Hooke,

$$F = -kx, \tag{15-10}$$

para uma mola, sendo que neste caso a constante elástica é dada por

$$k = m\omega^2. \tag{15-11}$$

Podemos, na verdade, tomar a Eq. 15-10 como sendo uma definição alternativa do movimento harmônico simples. Em palavras:

O movimento harmônico simples é o movimento executado por uma partícula sujeita a uma força proporcional ao deslocamento da partícula e de sinal oposto.

O sistema bloco-mola da Fig. 15-5 constitui um **oscilador harmônico simples linear** (ou, simplesmente, oscilador linear), onde o termo "linear" indica que F é proporcional a x e não a alguma outra potência de x. A freqüência angular ω do movimento harmônico simples do bloco está relacionada à constante elástica k e à massa m do bloco pela Eq. 15-11, que nos dá

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(freqüência angular).} \tag{15-12}$$

Combinando as Eqs. 15-5 e 15-12 podemos escrever, para o **período** do oscilador linear da Fig. 15-5,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(período).} \tag{15-13}$$

De acordo com as Eqs. 15-12 e 15-13, uma grande freqüência angular (e, portanto, um pequeno período) está associada a uma mola rígida (k elevado) e a um bloco leve (m pequeno).

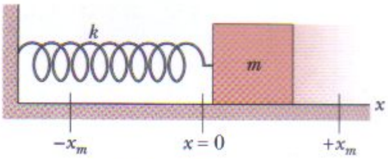


FIG. 15-5 Um oscilador harmônico simples linear. Não há atrito com a superfície. Como a partícula da Fig. 15-1, o bloco se move em movimento harmônico simples quando é puxado ou empurrado a partir da posição $x = 0$ e depois liberado. O deslocamento é dado pela Eq. 15-3.

Todo sistema oscilatório, seja ele um trampolim ou uma corda de violino, possui uma certa "elasticidade" e uma certa "inércia" e, portanto, se parece com um oscilador linear. No oscilador linear da Fig. 15-5 esses elementos estão concentrados em partes diferentes do sistema: a elasticidade está inteiramente na mola, cuja massa desprezamos, e a inércia está inteiramente no bloco, cuja elasticidade é ignorada. Em uma corda de violino, porém, os dois elementos estão presentes na corda, como vamos ver no Capítulo 16.

TESTE 2 Qual das seguintes relações entre a força F exercida sobre uma partícula e a posição x da partícula produz um movimento harmônico simples: (a) $F = -5x$, (b) $F = -400x^2$, (c) $F = 10x$ ou (d) $F = 3x^2$?

Exemplo 15-1

Um bloco cuja massa m é 680 g está preso a uma mola cuja constante elástica k é 65 N/m. O bloco é puxado sobre uma superfície sem atrito por uma distância $x = 11$ cm a partir da posição de equilíbrio em $x = 0$ e liberado a partir do repouso no instante $t = 0$.

(a) Quais são a freqüência angular, a freqüência e o período do movimento resultante?

IDÉIA-CHAVE O sistema bloco-mola constitui um oscilador harmônico simples linear, com o bloco executando um MHS.

Cálculos: A freqüência é dada pela Eq. 15-12:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65\ \text{N/m}}{0{,}68\ \text{kg}}} = 9{,}78\ \text{rad/s}$$

$$\approx 9{,}8\ \text{rad/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 15-5, a freqüência é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9{,}78\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad}} = 1{,}56\ \text{Hz} \approx 1{,}6\ \text{Hz}. \quad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 15-2, o período é

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}56\ \text{Hz}} = 0{,}64\ \text{s} = 640\ \text{ms}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a amplitude das oscilações?

IDÉIA-CHAVE Na ausência de atrito, a energia mecânica do sistema bloco-mola é conservada.

Raciocínio: O bloco é liberado a 11 cm da posição de equilíbrio, com energia cinética nula e o máximo de energia potencial elástica. Assim, o bloco terá energia cinética nula sempre que estiver novamente a 11 cm da posição de equilíbrio, o que significa que jamais se afastará mais do que 11 cm de posição de equilíbrio. Seu deslocamento máximo é de 11 cm:

$$x_m = 11\ \text{cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a velocidade máxima v_m do bloco e onde se encontra o bloco quando tem essa velocidade?

IDÉIA-CHAVE A velocidade máxima v_m é a amplitude da velocidade ωx_m na Eq. 15-6.

Cálculo: Assim, temos:

$$v_m = \omega x_m = (9{,}78\ \text{rad/s})(0{,}11\ \text{m})$$
$$= 1{,}1\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta velocidade máxima é observada quando o bloco está passando pela origem; observe as Figs. 15-4*a* e 15-4*b*, onde se pode observar que a velocidade é máxima em $x = 0$.

(d) Qual é o módulo a_m da aceleração máxima do bloco?

IDÉIA-CHAVE O módulo a_m da aceleração máxima é a amplitude da aceleração $\omega^2 x_m$ na Eq. 15-7.

Cálculo: Assim, temos:

$$a_m = \omega^2 x_m = (9{,}78\ \text{rad/s})^2(0{,}11\ \text{m})$$
$$= 11\ \text{m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta aceleração máxima é observada quando o bloco está nas extremidades da trajetória. Nesses pontos a força que age sobre o bloco possui o módulo máximo; observe as Figs. 15-4*a* e 15-4*c*, onde se pode ver que os módulos do deslocamento e da aceleração são máximos nos mesmos instantes.

(e) Qual é a constante de fase ϕ do movimento?

Cálculos: A Eq. 15-3 fornece o deslocamento do bloco em função do tempo. Sabemos que no instante $t = 0$ o bloco está em $x = x_m$. Substituindo essas *condições iniciais*, como são chamadas, na Eq. 15-3 e cancelando x_m, obtemos

$$1 = \cos \phi. \qquad (15\text{-}14)$$

Tomando o inverso da função co-seno, obtemos

$$\phi = 0\ \text{rad}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(Qualquer ângulo que seja um múltiplo inteiro de 2π rad também satisfaz a Eq. 15-14; escolhemos o menor ângulo.)

(f) Qual é a função deslocamento $x(t)$ do sistema bloco-mola?

Cálculo: A forma geral da função $x(t)$ é dada pela Eq. 15-3. Substituindo as grandezas conhecidas, obtemos

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$
$$= (0{,}11 \text{ m}) \cos[(9{,}8 \text{ rad/s})t + 0]$$
$$= 0{,}11 \cos(9{,}8t), \quad \text{(Resposta)}$$

onde x está em metros e t em segundos.

Exemplo 15-2

Em $t = 0$ o deslocamento $x(0)$ do bloco de um oscilador linear como o da Fig. 15-5 é $-8{,}50$ cm. (Leia $x(0)$ como "x no instante zero".) A velocidade do bloco $v(0)$ nesse instante é $-0{,}920$ m/s, e a aceleração $a(0)$ é $+47{,}0 \text{ m/s}^2$.

(a) Qual é a freqüência angular ω desse sistema?

IDÉIA-CHAVE Com o bloco em MHS, as Eqs. 15-3, 15-6 e 15-7 fornecem o seu deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente, e todas contêm a freqüência angular ω.

Cálculos: Vamos fazer $t = 0$ nas três equações para ver se uma delas nos fornece o valor de ω. Temos:

$$x(0) = x_m \cos \phi, \quad (15\text{-}15)$$
$$v(0) = -\omega x_m \operatorname{sen} \phi, \quad (15\text{-}16)$$
e
$$a(0) = \omega^2 x_m \cos \phi. \quad (15\text{-}17)$$

A Eq. 15-15 não contém ω. Nas Eqs. 15-16 e 15-17 conhecemos o valor do lado esquerdo, mas não conhecemos x_m e ω. Entretanto, dividindo a Eq. 15-17 pela Eq. 15-15 eliminamos x_m e ϕ e podemos calcular o valor de ω:

$$\omega = \sqrt{-\frac{a(0)}{x(0)}} = \sqrt{-\frac{47{,}0 \text{ m/s}^2}{-0{,}0850 \text{ m}}}$$
$$= 23{,}5 \text{ rad/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Quais são os valores da constante de fase ϕ e da amplitude x_m?

Cálculos: Conhecemos ω e queremos determinar ϕ e x_m. Dividindo a Eq. 15-16 pela Eq. 15-15, obtemos

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-\omega x_m \operatorname{sen} \phi}{x_m \cos \phi} = -\omega \tan \phi.$$

Explicitando $\tan \phi$, temos:

$$\tan \phi = -\frac{v(0)}{\omega x(0)} = -\frac{-0{,}920 \text{ m/s}}{(23{,}5 \text{ rad/s})(-0{,}0850 \text{ m})}$$
$$= -0{,}461.$$

Esta equação possui duas soluções:

$$\phi = -25° \text{ e } \phi = 180° + (-25°) = 155°.$$

(Normalmente apenas a primeira dessas soluções é mostrada pelas calculadoras.) Para escolher a solução correta testamos as duas, usando-as para calcular valores da amplitude x_m. De acordo com a Eq. 15-15, para $\phi = -25°$,

$$x_m = \frac{x(0)}{\cos \phi} = \frac{-0{,}0850 \text{ m}}{\cos(-25°)} = -0{,}094 \text{ m}.$$

Para $\phi = 155°$, $x_m = 0{,}094$ m. Como a amplitude do MHS deve ser uma constante positiva, a constante de fase e a amplitude corretas são

$$\phi = 155° \text{ e } x_m = 0{,}094 \text{ m} = 9{,}4 \text{ cm}. \quad \text{(Resposta)}$$

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 2: *Identificação do MHS* No MHS linear a aceleração a e o deslocamento x do sistema estão relacionados através de uma equação da forma

$$a = -(\text{constante positiva})x,$$

segundo a qual a aceleração é proporcional ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio, com o sinal contrário. Quando encontramos essa expressão para um sistema oscilatório podemos imediatamente compará-la com a Eq. 15-8, identificar a constante positiva como sendo igual a ω^2 e assim obter uma expressão para a freqüência angular do movimento. Em seguida, podemos usar a Eq. 15-5 para calcular o período T e a freqüência f.

Em alguns problemas é possível escrever uma expressão para a força F em função do deslocamento x. Se o movimento é um MHS linear, a força e o deslocamento estão relacionados através da equação

$$F = -(\text{constante positiva})x,$$

segundo a qual a força é proporcional ao deslocamento, com o sinal contrário. Quando encontramos essa expressão podemos imediatamente compará-la com a Eq. 15-10 e identificar a constante positiva como sendo igual a k. Se a massa é conhecida podemos usar as Eqs. 15-12, 15-13 e 15-5 para calcular a freqüência angular ω, o período T e a freqüência f.

15-4 | A Energia do Movimento Harmônico Simples

Vimos no Capítulo 8 que a energia de um oscilador linear é transformada repetidamente de energia cinética em energia potencial e vice-versa, enquanto a soma das duas, a energia mecânica E do oscilador, permanece constante. Vamos agora examinar essa situação em termos quantitativos.

A energia potencial de um oscilador linear como o da Fig. 15-5 está inteiramente associada à mola. Seu valor depende do grau de alongamento ou compressão da mola, ou seja, de $x(t)$. Podemos usar as Eqs. 8-11 e 15-3 para obter a seguinte expressão para a energia potencial:

$$U(t) = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi). \qquad (15\text{-}18)$$

Atenção: A notação $\cos^2 A$ (usada na Eq. 15-18) significa $(\cos A)^2$ e *não é o mesmo* que $\cos A^2$, que significa $\cos(A^2)$.

A energia cinética do sistema da Fig. 15-5 está inteiramente associada ao bloco. Seu valor depende da rapidez com a qual o bloco está se movendo, ou seja, de $v(t)$. Podemos usar a Eq. 15-6 para obter a seguinte expressão para a energia cinética:

$$K(t) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2x_m^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \phi). \qquad (15\text{-}19)$$

Usando a Eq. 15-12 para substituir ω^2 por k/m, podemos escrever a Eq. 15-19 na forma

$$K(t) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \phi). \qquad (15\text{-}20)$$

De acordo com as Eqs. 15-18 e 15-20, a energia mecânica é dada por

$$\begin{aligned} E &= U + K \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kx_m^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2[\cos^2(\omega t + \phi) + \mathrm{sen}^2(\omega t + \phi)]. \end{aligned}$$

Para qualquer ângulo α,

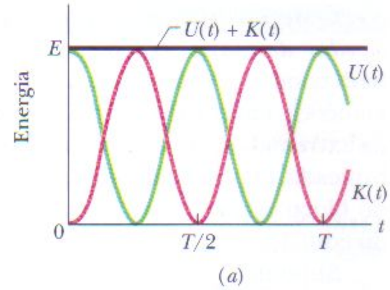
$$\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1.$$

Assim, a grandeza entre colchetes aqui é igual à unidade, e temos

$$E = U + K = \tfrac{1}{2}kx_m^2. \qquad (15\text{-}21)$$

A energia mecânica de um oscilador linear é de fato constante e independente do tempo. A energia potencial e a energia cinética de um oscilador linear são mostradas em função do tempo t, na Fig. 15-6*a*, e em função do deslocamento x, na Fig. 15-6*b*.

Agora podemos entender por que um sistema oscilatório normalmente contém um elemento de elasticidade e um elemento de inércia: o primeiro armazena energia potencial e o segundo armazena energia cinética.



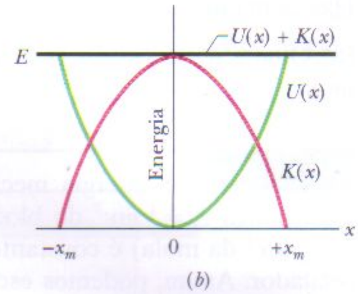


FIG. 15-6 (*a*) Energia potencial $U(t)$, energia cinética $K(t)$ e energia mecânica E em função do tempo t para um oscilador harmônico linear. Observe que todas as energias são positivas e que a energia potencial e a energia cinética passam por dois máximos em cada período. (*b*) Energia potencial $U(x)$, energia cinética $K(x)$ e energia mecânica E em função da posição x para um oscilador harmônico linear de amplitude x_m. Para $x = 0$, a energia é toda cinética; para $x = \pm x_m$, é toda potencial.

TESTE 3 Na Fig. 15-5 o bloco possui uma energia cinética de 3 J e a mola possui uma energia potencial elástica de 2 J quando o bloco está em $x = +2{,}0$ cm. (a) Qual é a energia cinética do bloco quando ele está em $x = 0$? Qual é a energia potencial elástica da mola quando o bloco está em (b) $x = -2{,}0$ cm e (c) $x = -x_m$?

Exemplo 15-3

A grande peça que aparece na fotografia de abertura do capítulo está pendurada em quatro cabos e oscila como um pêndulo quando o vento faz o edifício balançar. Quando o edifício se inclina em uma direção (leste, por exemplo) a peça faz o mesmo, mas com um certo retardo, de modo que quando finalmente oscila para leste o edifício está se inclinando para oeste. Na verdade, o movimento do pêndulo se mantém sempre defasado do movimento do edifício, e tende a compensá-lo.

Outros edifícios utilizam tipos diferentes de *amortecedor de massa*, como são chamados esses dispositivos para combater oscilações. Alguns, como o do edifício John Hancock, em Boston, possuem um grande bloco que oscila na extremidade de uma mola, movendo-se em um trilho lubrificado. O princípio é o mesmo do pêndulo: o movimento do bloco está sempre defasado em relação ao movimento do edifício.

Suponha que o bloco possui uma massa $m = 2{,}72 \times 10^5$ kg e foi projetado para oscilar em uma freqüência $f = 10{,}0$ Hz e com uma amplitude $x_m = 20{,}0$ cm.

(a) Qual é a energia mecânica total E do sistema bloco-mola?

IDÉIA-CHAVE A energia mecânica E (a soma da energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ do bloco com a energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ da mola) é constante durante o movimento do oscilador. Assim, podemos escolher qualquer posição do bloco para calcular o valor de E.

Cálculos: Como foi dada a amplitude x_m das oscilações, vamos calcular o valor de E quando o bloco está na posição $x = x_m$ com $v = 0$. Para determinar o valor de U nesse ponto precisamos primeiro calcular o valor da constante elástica k. De acordo com a Eq. 15-12 ($\omega = \sqrt{k/m}$) e a Eq. 15-5 ($\omega = 2\pi f$), temos:

$$\begin{aligned} k &= m\omega^2 = m(2\pi f)^2 \\ &= (2{,}72 \times 10^5\ \text{kg})(2\pi)^2(10{,}0\ \text{Hz})^2 \\ &= 1{,}073 \times 10^9\ \text{N/m}. \end{aligned}$$

Podemos agora calcular E:

$$\begin{aligned} E &= K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + \tfrac{1}{2}(1{,}073 \times 10^9\ \text{N/m})(0{,}20\ \text{m})^2 \\ &= 2{,}147 \times 10^7\ \text{J} \approx 2{,}1 \times 10^7\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

(b) Qual é a velocidade do bloco ao passar pelo ponto de equilíbrio?

Cálculos: Estamos interessados em calcular a velocidade no ponto $x = 0$, no qual a energia potencial é $U = \frac{1}{2}kx^2 = 0$ e a energia mecânica total é igual à energia cinética. Sendo assim, podemos escrever

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$2{,}147 \times 10^7\ \text{J} = \tfrac{1}{2}(2{,}72 \times 10^5\ \text{kg})v^2 + 0,$$

ou

$$v = 12{,}6\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como neste ponto toda a energia do sistema foi convertida em energia cinética, esta é a velocidade máxima v_m.

15-5 | Um Oscilador Harmônico Simples Angular

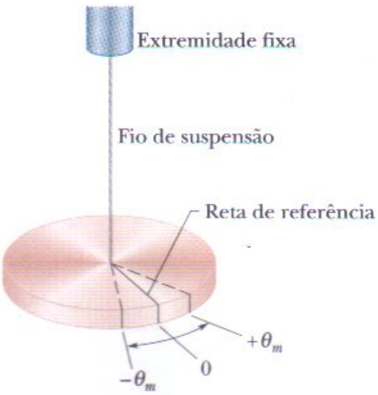


FIG. 15-7 Um pêndulo de torção é uma versão angular de um oscilador harmônico simples linear. O disco oscila em um plano horizontal; a reta de referência oscila com amplitude angular θ_m. A torção do fio de suspensão armazena energia potencial de forma semelhante a uma mola e produz o torque restaurador.

A Fig. 15-7 mostra uma versão angular de um oscilador harmônico simples; nesse caso, o elemento de elasticidade está associado à torção de um fio suspenso, e não ao alongamento e à compressão de uma mola. O dispositivo recebe o nome de **pêndulo de torção**.

Quando fazemos girar o disco na Fig. 15-7, produzindo um deslocamento angular θ a partir da posição de equilíbrio (na qual a reta de referência está em $\theta = 0$) e o liberamos, ele passa a oscilar em torno dessa posição em um **movimento harmônico simples angular.** A rotação do disco de um ângulo θ em qualquer sentido produz um torque restaurador dado por

$$\tau = -\kappa\theta. \qquad (15\text{-}22)$$

onde κ (letra grega *capa*) é uma constante, a chamada **constante de torção**, que depende do comprimento, do diâmetro e do material de que é feito o fio.

A comparação da Eq. 15-22 com a Eq. 15-10 nos leva a suspeitar que a Eq. 15-22 é a forma angular da lei de Hooke e que podemos transformar a Eq. 15-13, que fornece o período do MHS linear, na equação para o período do MHS angular: substituímos a constante elástica k na Eq. 15-13 pela constante equivalente, a constante κ da Eq. 15-22, e substituímos a massa m na Eq. 15-13 pela grandeza equivalente, o momento de inércia I do disco. Essas substituições levam a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad \text{(pêndulo de torção)}, \qquad (15\text{-}23)$$

que é a equação correta para o período de um oscilador harmônico simples angular, ou pêndulo de torção.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 3: Identificação do MHS Angular Quando um sistema executa um movimento harmônico simples angular, sua aceleração angular α e seu deslocamento angular θ estão relacionados através de uma equação da forma

$$\alpha = -(\text{constante positiva})\theta.$$

Esta equação é a equivalente angular da Eq. 15-8 ($a = -\omega^2 x$) e mostra que a aceleração angular α é proporcional ao deslocamento angular θ a partir da posição de equilíbrio, com o sinal contrário. Quando encontramos uma expressão com essa forma podemos identificar a constante positiva como sendo igual a ω^2 e, assim, calcular os valores de ω, f e T.

Também é possível identificar o MHS angular a partir de uma expressão para o torque τ em função do deslocamento angular θ, já que essa expressão deve ter a forma da Eq. 15-22 ($\tau = -\kappa\theta$), ou seja,

$$\tau = -(\text{constante positiva})\theta.$$

Esta equação é a equivalente angular da Eq. 15-10 ($F = -kx$) e mostra que o torque τ é proporcional ao deslocamento angular θ a partir da posição de equilíbrio, mas tende a fazer o sistema girar no sentido oposto. Se temos uma expressão com essa forma podemos identificar a constante positiva como sendo a constante de torção κ. Se conhecemos o momento de inércia I do sistema, podemos determinar T.

Exemplo 15-4

A Fig. 15-8*a* mostra uma barra fina cujo comprimento L é 12,4 cm e cuja massa m é 135 g, suspensa em fio longo pelo ponto médio. O período T_a do seu MHS angular é medido como sendo 2,53 s. Um objeto de forma irregular, que será chamado de objeto X, é pendurado no mesmo fio, como na Fig. 15-8*b*, e o seu período T_b é medido como sendo 4,76 s. Qual é o momento de inércia do objeto X em relação ao eixo de suspensão?

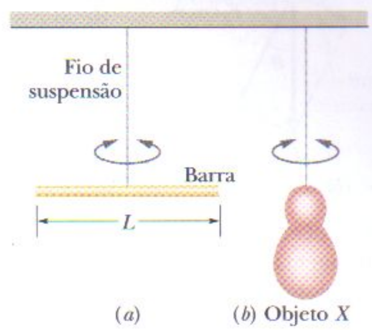


FIG. 15-8 Dois pêndulos de torção, compostos por (*a*) um fio e uma barra e (*b*) o mesmo fio e um objeto de forma irregular.

IDÉIA-CHAVE O momento de inércia tanto da barra quanto do objeto X está relacionado ao período através da Eq. 15-23.

Cálculos: Na Tabela 10-2*e* o momento de inércia de uma barra em torno de um eixo perpendicular passando pelo ponto médio é dado por $\frac{1}{12}mL^2$. Assim, para a barra da Fig. 15-8*a*, temos:

$$I_a = \tfrac{1}{12}mL^2 = (\tfrac{1}{12})(0{,}135\ \text{kg})(0{,}124\ \text{m})^2$$
$$= 1{,}73 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

Vamos agora escrever a Eq. 15-23 duas vezes, uma para a barra e outra para o objeto X:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \quad \text{e} \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}.$$

A constante κ, que é uma propriedade do fio, é a mesma nos dois casos; apenas os períodos e os momentos de inércia são diferentes.

Vamos elevar as duas equações ao quadrado, dividir a segunda pela primeira e explicitar I_b na equação resultante. O resultado é o seguinte:

$$I_b = I_a\frac{T_b^2}{T_a^2} = (1{,}73 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\frac{(4{,}76\ \text{s})^2}{(2{,}53\ \text{s})^2}$$
$$= 6{,}12 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

15-6 | Pêndulos

Voltamos agora nossa atenção para uma classe de osciladores harmônicos simples nos quais a força de retorno está associada à gravitação, e não às propriedades elásticas de um fio ou de uma mola.

O Pêndulo Simples

Se uma maçã é posta para balançar na extremidade de um fio longo, ela descreve um movimento harmônico simples? Caso a resposta seja afirmativa, qual é o período T do movimento? Para responder a essas perguntas considere um **pêndulo simples**, composto por uma partícula de massa m (chamada de *peso* do pêndulo) suspensa

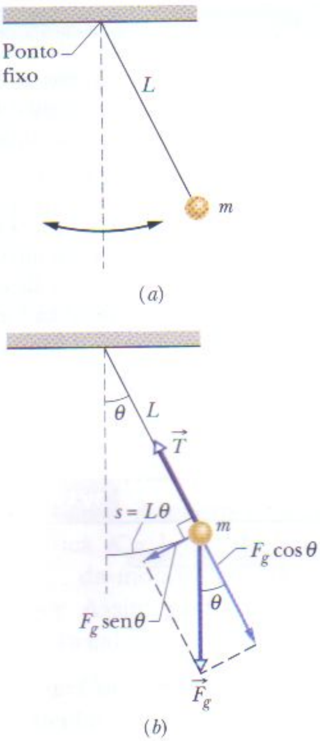


FIG. 15-9 (*a*) Um pêndulo simples. (*b*) As forças que agem sobre o peso são a força gravitacional $\vec{F}_g$ e a tensão $\vec{T}$ do fio. A componente tangencial F_g sen θ da força gravitacional é a força restauradora que tende a levar o pêndulo de volta para a posição central.

por uma das extremidades de um fio inextensível, de massa desprezível e comprimento L, cuja outra extremidade está fixa, como na Fig. 15-9*a*. O peso está livre para oscilar no plano do papel, para a esquerda e para a direita de uma reta vertical que passa pelo ponto fixo do fio.

As forças que agem sobre o peso são a tração $\vec{T}$ exercida pelo fio e a força gravitacional $\vec{F}_g$, como mostra a Fig. 15-9*b*, onde o fio faz um ângulo θ com a vertical. Decompomos $\vec{F}_g$ em uma componente radial $F_g \cos\theta$ e uma componente F_g sen θ que é tangente à trajetória do peso. Esta componente tangencial produz um torque restaurador em relação ao ponto fixo do pêndulo porque sempre age no sentido oposto ao do deslocamento do peso, tendendo a levá-lo de volta ao ponto central. Este ponto ($\theta = 0$) é chamado de *posição de equilíbrio,* porque o pêndulo ficaria em repouso neste ponto se parasse de oscilar.

De acordo com a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$), este torque restaurador pode ser escrito na forma

$$\tau = -L(F_g \operatorname{sen} \theta), \tag{15-24}$$

onde o sinal negativo indica que o torque age no sentido de reduzir θ e L é o braço de alavanca da componente F_g sen θ da força gravitacional em relação ao ponto fixo do pêndulo. Substituindo a Eq. 15-24 na Eq. 10-44 ($\tau = I\alpha$) e substituindo o módulo de F_g por mg, obtemos

$$-L(mg \operatorname{sen} \theta) = I\alpha, \tag{15-25}$$

onde I é o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto fixo e α é a aceleração angular do pêndulo em relação a esse ponto.

Podemos simplificar a Eq. 15-25 supondo que o ângulo θ é pequeno, pois nesse caso podemos substituir sen θ por θ (expresso em radianos). (Por exemplo: se θ = 5,00° = 0,0873 rad, sen θ = 0,0872, uma diferença de apenas 0,1%.) Usando essa aproximação e explicitando α, obtemos

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta. \tag{15-26}$$

Esta equação é o equivalente angular da Eq. 15-8, a relação característica do MHS. Ela nos diz que a aceleração angular α do pêndulo é proporcional ao deslocamento angular θ com o sinal oposto. Assim, quando o peso do pêndulo se move para a direita, como na Fig. 15-9*a*, a aceleração *para a esquerda* aumenta até o peso parar e começar a se mover para a esquerda. Quando o peso está à esquerda da posição de equilíbrio, a aceleração para a direita tende a fazê-lo voltar para a direita, e assim por diante, o que produz um MHS. Mais precisamente, o movimento de *um pêndulo simples com apenas pequenos ângulos de deslocamento* pode ser aproximado por MHS. Podemos expressar essa restrição de outra forma: a **amplitude angular** θ_m do movimento (o ângulo máximo de deslocamento) deve ser pequena.

Comparando as Eqs. 15-26 e 15-8 notamos que a freqüência angular do pêndulo é $\omega = \sqrt{mgL/I}$. Substituindo essa expressão de ω na Eq. 15-5 ($\omega = 2\pi/T$), vemos que o período do pêndulo pode ser escrito como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}. \tag{15-27}$$

Toda a massa de um pêndulo simples está concentrada na massa m do peso do pêndulo, que está a uma distância L do ponto fixo. Assim, podemos usar a Eq. 10-33 ($I = mr^2$) para escrever $I = mL^2$ como o momento de inércia do pêndulo. Substituindo este valor na Eq. 15-27 e simplificando, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(pêndulo simples, pequena amplitude).} \tag{15-28}$$

Neste capítulo vamos supor que os ângulos de oscilação do pêndulo são sempre pequenos.

O Pêndulo Físico

Ao contrário do pêndulo simples, um pêndulo real, freqüentemente chamado de **pêndulo físico**, pode ter uma distribuição complicada de massa. Um pêndulo físico também executa um MHS? Caso a resposta seja afirmativa, qual é o seu período?

A Fig. 15-10 mostra um pêndulo físico arbitrário deslocado de um ângulo θ em relação à posição de equilíbrio. A força gravitacional $\vec{F}_g$ está aplicada ao centro de massa C, a uma distância h do ponto fixo O. Comparando as Figs. 15-9*b* e 15-10, vemos que existe apenas uma diferença importante entre um pêndulo físico arbitrário e um pêndulo simples. No caso do pêndulo físico, o braço de alavanca da componente restauradora F_g sen θ da força gravitacional é h, e não o comprimento L do fio. Sob todos os outros aspectos a análise do pêndulo físico é idêntica à análise do pêndulo simples até a Eq. 15-27. Assim, para pequenos valores de θ_m o movimento é, aproximadamente, um MHS.

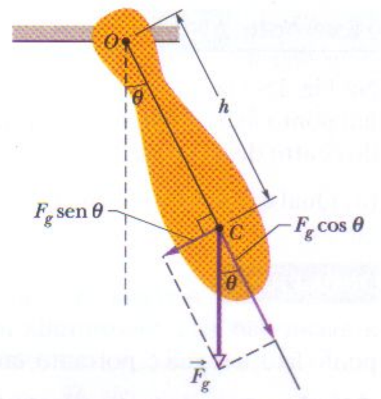


FIG. 15-10 Um pêndulo físico. O torque restaurador é hF_g sen θ. Quando $\theta = 0$, o centro de massa C está situado diretamente abaixo do ponto de suspensão O.

Se substituirmos L por h na Eq. 15-27, podemos escrever o período como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad \text{(pêndulo físico, pequena amplitude).} \qquad (15\text{-}29)$$

Como no pêndulo simples, I é o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto O. Embora I seja mais igual a mL^2 (pois depende da forma do pêndulo físico), ainda é proporcional a m.

Um pêndulo físico não oscila se o ponto fixo é o centro de massa. Formalmente, isso corresponde a fazer $h = 0$ na Eq. 15-29. Nesse caso temos $T = \infty$, o que significa que o pêndulo jamais chega a completar uma oscilação.

A todo pêndulo físico com um ponto fixo O que oscila com período T corresponde um pêndulo simples de comprimento L_0 e com o mesmo período T. Podemos usar a Eq. 15-28 para calcular o valor de L_0. O ponto do pêndulo físico que fica a uma distância L_0 do ponto O é chamado de *centro de oscilação* do pêndulo físico para o ponto de suspensão dado.

Medindo g

Podemos usar um pêndulo físico para medir a aceleração de queda livre g em um certo ponto da superfície da Terra. (Milhares de medições desse tipo foram feitas como parte de estudos geofísicos.)

Para analisar um caso simples, tome o pêndulo como sendo uma barra uniforme de comprimento L suspensa por uma das extremidades. Para essa configuração, h da Eq. 15-29, a distância entre o ponto fixo e o centro de massa é $L/2$. De acordo com a Tabela 10-2*e*, o momento de inércia desse pêndulo em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo centro de massa é $\frac{1}{12}mL^2$. Aplicando o teorema dos eixos paralelos da Eq. 10-36 ($I = I_{CM} + Mh^2$), descobrimos que o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular passando por uma das extremidades da barra é

$$I = I_{CM} + mh^2 = \tfrac{1}{12}mL^2 + m(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{3}mL^2. \qquad (15\text{-}30)$$

Fazendo $h = L/2$ e $I = mL^2/3$ na Eq. 15-29 e explicitando g, obtemos

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}. \qquad (15\text{-}31)$$

Assim, medindo L e o período T podemos determinar o valor de g no local onde se encontra o pêndulo. (Para medidas de precisão são necessários alguns refinamentos, como colocar o pêndulo em uma câmara evacuada.)

TESTE 4 Três pêndulos físicos, de massas m_0, $2m_0$ e $3m_0$, têm a mesma forma e tamanho e estão suspensos pelo mesmo ponto. Ordene as massas de acordo com o período de oscilação do pêndulo, começando pelo maior.

Exemplo 15-5

Na Fig. 15-11*a* uma régua de um metro oscila em torno de um ponto fixo em uma das extremidades, a uma distância h do centro de massa da régua.

(a) Qual é o período de oscilação T?

IDÉIA-CHAVE A régua não é um pêndulo simples, porque a massa não está concentrada na extremidade oposta ao ponto fixo; a régua é, portanto, um pêndulo físico.

Cálculos: O período de um pêndulo físico é dado pela Eq. 15-29, que exige o conhecimento do momento de inércia da régua em relação ao ponto fixo. Vamos tratar a régua como uma barra uniforme de comprimento L e massa m. Nesse caso, de acordo com a Eq. 15-30, $I = \frac{1}{3}mL^2$ a distância h da Eq. 15-29 é $L/2$. Substituindo esses valores na Eq. 15-29, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg(\frac{1}{2}L)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \tag{15-32}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(2)(1{,}00\text{ m})}{(3)(9{,}8\text{ m/s}^2)}} = 1{,}64\text{ s} \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que este resultado não depende da massa m do pêndulo.

(b) Qual é a distância L_0 entre o ponto fixo O da régua e o centro de oscilação?

Cálculos: Estamos interessados em determinar o comprimento L_0 do pêndulo simples (desenhado na Fig. 15-11*b*), que possui o mesmo período que o pêndulo físico (a régua) da Fig. 15-11*a*. Igualando as Eqs. 15-28 e 15-32, obtemos

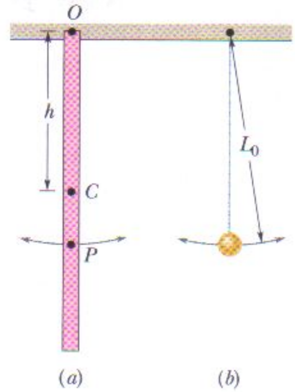


FIG. 15-11 (*a*) Uma régua de um metro suspensa por uma das extremidades para formar um pêndulo físico. (*b*) Um pêndulo simples cujo comprimento L_0 é escolhido para que os períodos dos dois pêndulos sejam iguais. O ponto P do pêndulo (*a*) é o centro de oscilação.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Podemos ver, por inspeção, que

$$L_0 = \tfrac{2}{3}L = (\tfrac{2}{3})(100\text{ cm}) = 66{,}7\text{ cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Na Fig. 15-11*a* o ponto P está a essa distância do ponto fixo O. Assim, o ponto P é o centro de oscilação da barra para o ponto fixo dado.

Exemplo 15-6 Aumente sua capacidade

Um trampolim de competição repousa sobre um fulcro que está a cerca de um terço do comprimento do trampolim a partir da extremidade fixa (Fig. 15-12*a*). Na corrida para o mergulho um saltador dá três passos rápidos no trampolim, passando pelo fulcro e fazendo a extremidade livre do trampolim girar para baixo. Quando o trampolim volta à posição horizontal o saltador pula para cima e para a frente, em direção à extremidade livre do trampolim (Fig. 15-12*b*). Um saltador experiente atinge a extremidade livre exatamente no momento em que o trampolim completou 2,5 oscilações a partir do início do salto. Isso significa que o saltador pisa na extremidade livre exatamente no momento em que esta está se deslocando para baixo com a velocidade máxima (Fig. 15-12*c*). Dessa forma, o saltador faz a extremidade livre descer mais ainda e consegue um grande impulso para o alto.

A Fig. 15-12*d* mostra um modelo simples, mas realista, de um trampolim de competição. A parte do trampolim à direita do fulcro é tratada como uma barra rígida de comprimento L, que pode girar em torno de uma articulação no fulcro, comprimindo uma mola (imaginária) abaixo da extremidade livre do trampolim. Se a massa da barra é $m = 20{,}0$ kg e o salto dura $t_s = 0{,}620$ s, qual deve ser a constante elástica k para que o saltador pise o trampolim no momento certo?

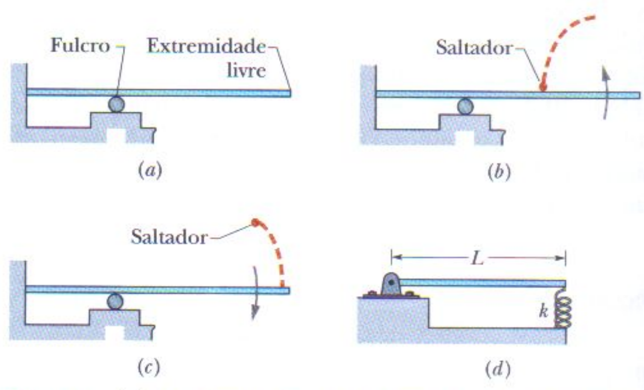


FIG. 15-12 (*a*) Um trampolim. (*b*) O saltador pula para cima e para a frente quando o trampolim passa pela posição horizontal. (*c*) O saltador pisa novamente na tábua 2,5 oscilações depois. (*d*) Modelo do trampolim usando uma barra e uma mola.

IDÉIA-CHAVE Se o movimento da barra é um MHS, a aceleração e o deslocamento da extremidade livre estão relacionados por uma expressão como a da Eq. 15-8 ($a = -\omega^2 x$). Isso significa que podemos calcular ω e em seguida o valor desejado, k, a partir dessa expressão.

Torque e força: Como a barra gira em torno da articulação enquanto a extremidade livre oscila, estamos interessados no torque $\vec{\tau}$ aplicado à barra em relação à articulação. Esse torque é produzido pela força $\vec{F}$ que a mola exerce sobre a barra. Como $\vec{F}$ varia com o tempo, $\vec{\tau}$ também varia. Entretanto, em qualquer instante os módulos de $\vec{\tau}$ e $\vec{F}$ estão relacionados pela Eq. 10-39 ($\tau = rF$ sen ϕ). Temos ainda

$$\tau = LF \operatorname{sen} 90^\circ, \tag{15-33}$$

onde L é o braço de alavanca da força $\vec{F}$ e 90° é o ângulo entre o braço de alavanca e a linha de ação da força. Combinando a Eq. 15-33 com a Eq. 10-44 ($\tau = I\alpha$), obtemos

$$I\alpha = LF, \tag{15-34}$$

onde I é o momento de inércia da barra em relação à articulação e α é a aceleração angular da barra em relação a esse mesmo ponto. De acordo com a Eq. 15-30, o momento de inércia I da barra é $\frac{1}{3}mL^2$.

Vamos agora traçar mentalmente um eixo x vertical passando pela extremidade direita da barra, com o sentido positivo para cima. Nesse caso, a força exercida pela mola sobre a extremidade direita da barra é $F = -kx$, onde x é o deslocamento vertical da extremidade direita.

Substituindo essas expressões de I e F na Eq. 15-34, obtemos

$$\frac{mL^2\alpha}{3} = -Lkx. \tag{15-35}$$

Mistura: Agora temos uma mistura de deslocamento linear x (vertical) e aceleração angular α (em relação à articulação). Podemos substituir α na Eq. 15-35 pela aceleração (linear) a ao longo do eixo x usando a Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$), que relaciona a aceleração tangencial à aceleração angular. No nosso caso, a aceleração tangencial é a e o raio de rotação é L, de modo que $\alpha = a/L$. Com essa substituição, a Eq. 15-35 se torna

$$\frac{mL^2 a}{3L} = -Lkx,$$

o que nos dá

$$a = -\frac{3k}{m}x. \tag{15-36}$$

A Eq. 15-36 tem a mesma forma que a Eq. 15-8 ($a = -\omega^2 x$). Isso significa que a barra realiza um MHS. Comparando as Eqs. 15-36 e 15-8, constatamos que

$$\omega^2 = \frac{3k}{m}.$$

Explicitando k e substituindo ω pelo seu valor, dado pela Eq. 15-5 ($\omega = 2\pi/T$), obtemos

$$k = \frac{m}{3}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \tag{15-37}$$

onde T é o período das oscilações da barra que representa o trampolim. Queremos que o tempo do salto, t_s, seja igual a 2,5 oscilações do trampolim, ou seja, que $t_s = 2{,}5T$. Substituindo este e outros valores conhecidos na Eq. 15-37, temos:

$$k = \frac{m}{3}\left(\frac{2\pi}{t_s}2{,}5\right)^2 \tag{15-38}$$

$$= \frac{(20{,}0 \text{ kg})}{3}\left(\frac{2\pi}{0{,}620 \text{ s}}2{,}5\right)^2$$

$$= 4{,}28 \times 10^3 \text{ N/m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta deve ser a constante elástica do trampolim.

Treinamento: De acordo com a Eq. 15-38, quanto maior a duração t_s do salto menor deve ser a constante elástica k para que o saltador pise no trampolim no momento certo. O valor de k pode ser reduzido, afastando-se o fulcro da extremidade livre, ou aumentado, deslocando-se o fulcro no sentido oposto. Um saltador experiente procura manter constante o tempo de salto t_s durante o treinamento, e ajusta a posição do fulcro para conseguir o melhor resultado possível.

15-7 | Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme

Em 1610, Galileu descobriu os quatro maiores satélites de Júpiter usando o telescópio que acabara de construir. Após algumas semanas de observação ele constatou que os satélites estavam se deslocando de um lado para outro do planeta no que hoje chamaríamos de movimento harmônico simples; o disco do planeta era o ponto médio do movimento. As observações de Galileu, escritas de próprio punho, chegaram aos nossos dias. A. P. French, do MIT, usou os dados colhidos por Galileu para determinar a posição da lua Calisto em relação a Júpiter. Nos resultados mostrados na Fig. 15-13 os pontos são baseados nas observações de Galileu, e a curva representa um ajuste aos dados. A curva sugere que o movimento do satélite pode ser descrito aproximadamente pela Eq. 15-3, a função do MHS. De acordo com o gráfico, o período do movimento é de 16,8 dias.

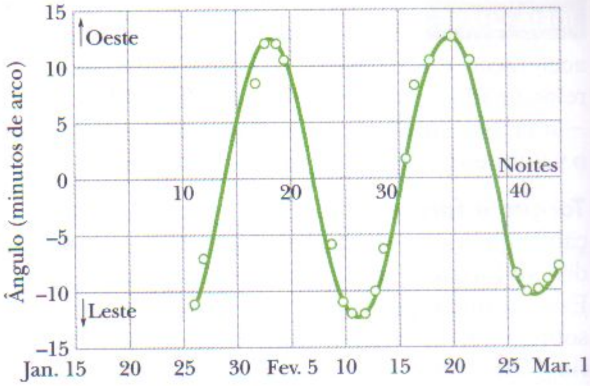
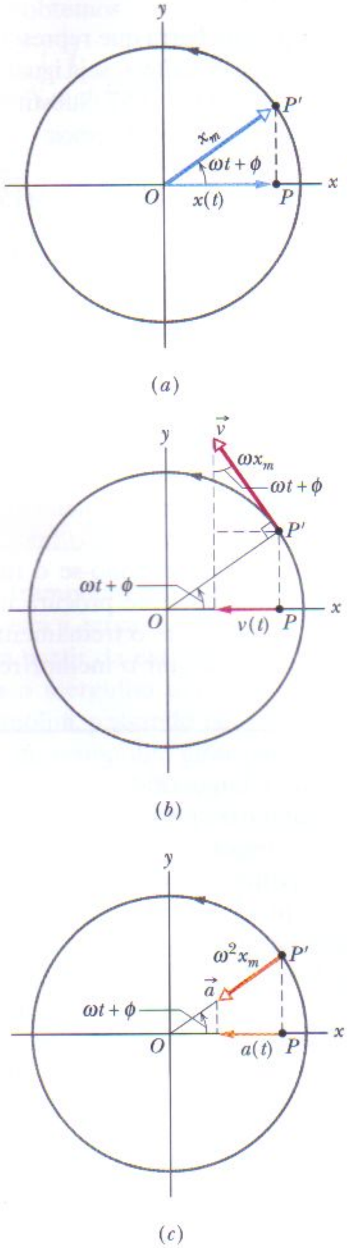


FIG. 15-13 O ângulo entre Júpiter e o satélite Calisto do ponto de vista da Terra. Os pontos se baseiam nas observações de Galileu, em 1610, e a curva representa um ajuste aos dados, sugerindo um movimento harmônico simples. Para a distância média entre Júpiter e a Terra 10 minutos de arco correspondem a cerca de 2×10^6 km. (Adaptado de A.P. French, *Newtonian Mechanics*, W.W. Norton & Company, New York, 1971, p. 288.)

Na realidade, Calisto se move com velocidade praticamente constante em uma órbita quase circular em torno de Júpiter. O verdadeiro movimento não é um movimento harmônico simples, e sim um movimento circular uniforme. O que Galileu viu, e o leitor pode ver com um bom binóculo e um pouco de paciência, foi a projeção desse movimento circular uniforme em uma reta no plano do movimento. As notáveis observações de Galileu nos levam à conclusão de que o movimento harmônico simples é o movimento circular uniforme visto de perfil. Em uma linguagem mais formal:

O movimento harmônico simples é a projeção do movimento circular uniforme em um diâmetro da circunferência ao longo da qual acontece o movimento circular.



A Fig. 15-14*a* mostra um exemplo. Uma *partícula de referência P′* executa um movimento circular uniforme com velocidade angular ω (constante) em uma *circunferência de referência*. O raio x_m da circunferência é o módulo do vetor posição da partícula. Em um instante t a posição angular da partícula é $\omega t + \phi$, onde ϕ é a posição angular no instante $t = 0$.

A projeção da partícula P' no eixo x é um ponto P, que consideramos como uma segunda partícula. A projeção do vetor posição da partícula P' no eixo x fornece a localização $x(t)$ de P. Assim, temos

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

que é exatamente a Eq. 15-3. Nossa conclusão está correta. Se a partícula de referência P' executa um movimento circular uniforme, sua projeção, a partícula projetada P, executa um movimento harmônico simples em um diâmetro do círculo.

A Fig. 15-14*b* mostra a velocidade $\vec{v}$ da partícula de referência. De acordo com a Eq. 10-18 ($v = \omega r$), o módulo do vetor velocidade é ωx_m; sua projeção no eixo x é

$$v(t) = \omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi),$$

que é exatamente a Eq. 15-6. O sinal negativo aparece porque a componente da velocidade de P na Fig. 15-14*b* está dirigida para a esquerda, no sentido negativo do eixo x.

A Fig. 15-14*c* mostra a aceleração radial $\vec{a}$ da partícula de referência. De acordo com a Eq. 10-23 ($a_r = \omega^2 r$), o módulo do vetor aceleração radial é $\omega^2 x_m$; sua projeção no eixo x é

FIG. 15-14 (*a*) Uma partícula de referência P' descrevendo um movimento circular uniforme em uma circunferência de raio x_m. A projeção P da posição da partícula no eixo x executa um movimento harmônico simples. (*b*) A projeção da velocidade $\vec{v}$ da partícula de referência é a velocidade do MHS. (*c*) A projeção da aceleração radial $\vec{a}$ da partícula de referência é a aceleração do MHS.

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi),$$

que é exatamente a Eq. 15-7. Assim, tanto para o deslocamento como para a velocidade e para a aceleração a projeção do movimento circular uniforme é de fato um movimento harmônico simples.

15-8 | Movimento Harmônico Simples Amortecido

Um pêndulo oscila apenas por um curto período de tempo debaixo d'água, pois a água exerce sobre o pêndulo uma força de arrasto que elimina rapidamente o movimento. Um pêndulo oscilando no ar funciona melhor, mas ainda assim o movimento ocorre durante um tempo limitado, porque o ar exerce uma força de arrasto sobre o pêndulo (e uma força de atrito age no ponto de sustentação), roubando energia do movimento do pêndulo.

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa dizemos que o oscilador e seu movimento são **amortecidos**. Um exemplo idealizado de um oscilador amortecido é mostrado na Fig. 15-15, na qual um bloco de massa m oscila verticalmente preso a uma mola de constante elástica k. Uma barra liga o bloco a uma palheta imersa em um líquido. Vamos supor que a barra e a palheta têm massa desprezível. Quando a palheta se move para cima e para baixo o líquido exerce uma força de arrasto sobre ela e, portanto, sobre todo o sistema. A energia mecânica do sistema bloco-mola diminui com o tempo, à medida que a energia é transferida para energia térmica do líquido e da palheta.

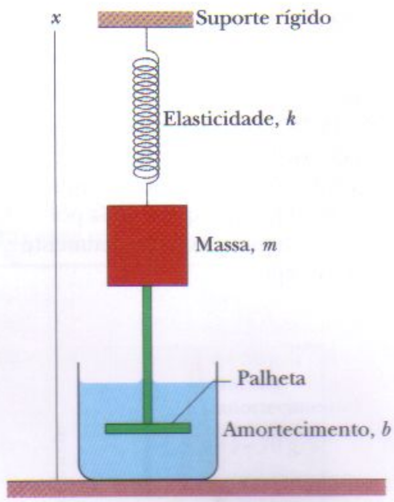


FIG. 15-15 Um oscilador harmônico simples amortecido ideal. Uma palheta imersa em um líquido exerce uma força de amortecimento sobre o bloco, enquanto este oscila paralelamente ao eixo x.

Vamos supor que o líquido exerce uma **força de amortecimento** $\vec{F}_a$ proporcional à velocidade $\vec{v}$ da palheta e do bloco (uma hipótese que constitui uma boa aproximação se a palheta se move lentamente). Nesse caso, para componentes ao longo do eixo x na Fig. 15-15 temos:

$$F_a = -bv, \tag{15-39}$$

onde b é uma **constante de amortecimento** que depende das características tanto da pá como do líquido e tem unidades de quilograma por segundo no SI. O sinal negativo indica que $\vec{F}_a$ se opõe ao movimento.

A força exercida pela mola sobre o bloco é $F_m = -kx$. Vamos supor que a força gravitacional a que o bloco está submetido seja desprezível em comparação com F_a e F_m. Nesse caso, podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo x ($F_{\text{res},x} = ma_x$) como

$$-bv - kx = ma. \tag{15-40}$$

Substituindo v por dx/dt, a por d^2x/dt^2 e reagrupando os termos, obtemos a equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{15-41}$$

A solução desta equação é

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \tag{15-42}$$

onde x_m é a amplitude e ω' é a freqüência angular do oscilador amortecido. Esta freqüência angular é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \tag{15-43}$$

Se $b = 0$ (na ausência de amortecimento), a Eq. 15-43 se reduz à Eq. 15-12 ($\omega = \sqrt{k/m}$) para a freqüência angular de um oscilador não-amortecido, e a Eq. 15-42 se reduz à Eq. 15-3 para o deslocamento de um oscilador não-amortecido. Se a constante de amortecimento é pequena mas diferente de zero (de modo que $b \ll \sqrt{km}$), então $\omega' \approx \omega$.

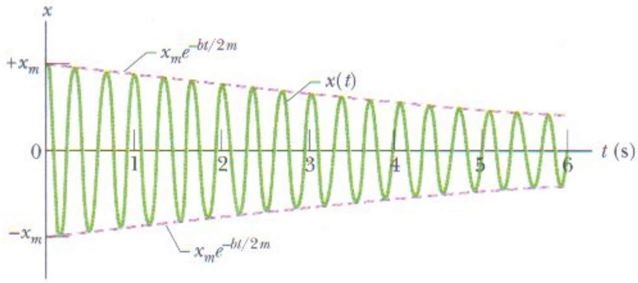


FIG. 15-16 A função deslocamento $x(t)$ do oscilador amortecido da Fig. 15-15, para os valores do Exemplo 15-7. A amplitude, que é dada por $x_m e^{-bt/2m}$, diminui exponencialmente com o tempo.

Podemos considerar a Eq. 15-42 como uma função co-seno cuja amplitude, dada por $x_m e^{-bt/2m}$, diminui gradualmente com o tempo, como mostra a Fig. 15-16. Para um oscilador não-amortecido a energia mecânica é constante e é dada pela Eq. 15-21 ($E = \frac{1}{2}kx_m^2$). Se o oscilador é amortecido a energia mecânica não é constante e diminui com o tempo. Se o amortecimento é pequeno, podemos determinar $E(t)$ substituindo x_m na Eq. 15-21 por $x_m e^{-bt/2m}$, a amplitude das oscilações amortecidas. Fazendo isso, obtemos a equação

$$E(t) \approx \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}, \qquad (15\text{-}44)$$

que nos diz que, como a amplitude, a energia mecânica diminui exponencialmente com o tempo.

TESTE 5 A tabela mostra três conjuntos de valores para a constante elástica, a constante de amortecimento e a massa do oscilador amortecido da Fig. 15-15. Ordene os conjuntos de acordo com o tempo necessário para que a energia mecânica se reduza a um quarto do valor inicial em ordem decrescente.

Conjunto 1	$2k_0$	b_0	m_0
Conjunto 2	k_0	$6b_0$	$4m_0$
Conjunto 3	$3k_0$	$3b_0$	m_0

Exemplo 15-7

Para o oscilador amortecido da Fig. 15-15, m = 250 g, k = 85 N/m e b = 70 g/s.

(a) Qual é o período do movimento?

IDÉIA-CHAVE Como $b \ll \sqrt{km}$ = 4,6 kg/s, o período é aproximadamente o de um oscilador não-amortecido.

Cálculo: De acordo com a Eq. 15-13, temos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}25\text{ kg}}{85\text{ N/m}}} = 0{,}34\text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o tempo necessário para que a amplitude das oscilações amortecidas se reduza à metade do valor inicial?

IDÉIA-CHAVE A amplitude num instante t é dada na Eq. 15-42 como $x_m e^{-bt/2m}$.

Cálculos: A amplitude é x_m no instante t = 0; assim, devemos encontrar o valor de t para o qual

$$x_m e^{-bt/2m} = \tfrac{1}{2}x_m.$$

Cancelando x_m e tomando o logaritmo natural da equação restante, temos ln(1/2) do lado direito e

$$\ln(e^{-bt/2m}) = -bt/2m$$

do lado esquerdo. Assim,

$$t = \frac{-2m\ln\frac{1}{2}}{b} = \frac{-(2)(0{,}25\text{ kg})(\ln\frac{1}{2})}{0{,}070\text{ kg/s}}$$
$$= 5{,}0\text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Como T = 0,34 s, isso corresponde a cerca de 15 períodos de oscilação.

(c) Quanto tempo é necessário para que a energia mecânica se reduza à metade do valor inicial?

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 15-44, a energia mecânica no instante t é $\frac{1}{2}kx_m^2\,e^{-bt/m}$.

Cálculos: A energia mecânica é $\frac{1}{2}kx_m^2$ no instante $t = 0$; assim, devemos encontrar o valor de t para o qual

$$\tfrac{1}{2}kx_m^2\,e^{-bt/m} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}kx_m^2\right).$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por $\frac{1}{2}kx_m^2$ e explicitando t como no item anterior, obtemos

$$t = \frac{-m\ln\frac{1}{2}}{b} = \frac{-(0{,}25\text{ kg})(\ln\frac{1}{2})}{0{,}070\text{ kg/s}} = 2{,}5\text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Este valor é exatamente metade do tempo calculado no item (b), ou cerca de 7,5 períodos de oscilação. A Fig. 15-16 foi desenhada para ilustrar esse exemplo.

15-9 | Oscilações Forçadas e Ressonância

Uma criança que se diverte em um balanço sem que ninguém a empurre constitui um exemplo de *oscilações livres*. Caso, porém, alguém empurre o balanço periodicamente dizemos que o balanço está executando *oscilações forçadas*. Existem *duas* freqüências angulares associadas a um sistema que executa oscilações forçadas: (1) a freqüência angular *natural* ω, que é a freqüência angular com a qual o sistema oscilaria livremente depois de sofrer uma perturbação brusca de curta duração; (2) a freqüência angular ω_e da força externa que produz as oscilações forçadas.

Podemos usar a Fig. 15-15 para representar um oscilador harmônico simples forçado ideal se supusermos que a estrutura indicada como "suporte rígido" se move para cima e para baixo com uma freqüência angular variável ω_e. Um oscilador forçado desse tipo oscila com a freqüência angular ω_e da força externa, e seu deslocamento $x(t)$ é dado por

$$x(t) = x_m \cos(\omega_e t + \phi), \qquad (15\text{-}45)$$

onde x_m é a amplitude das oscilações.

O valor da amplitude do deslocamento x_m depende de uma função complicada de ω e ω_e. A amplitude da velocidade v_m das oscilações é mais simples de descrever: ela é máxima para

$$\omega_e = \omega \quad \text{(ressonância)}, \qquad (15\text{-}46)$$

uma situação conhecida como **ressonância**. A Eq. 15-46 expressa também, *aproximadamente*, a situação para a qual a amplitude do deslocamento, x_m, é máxima. Assim, se empurramos um balanço com a freqüência angular natural de oscilação as amplitudes do deslocamento e da velocidade atingem valores elevados, um fato que as crianças aprendem depressa por tentativa e erro. Se empurramos com outra freqüência angular, maior ou menor, as amplitudes do deslocamento e da velocidade são menores.

A Fig. 15-17 mostra a variação da amplitude do deslocamento de um oscilador com a freqüência angular ω_e da força externa para três valores do coeficiente de amortecimento b. Observe que para os três valores a amplitude é aproximadamente máxima para $\omega_e/\omega = 1$ (a condição de ressonância da Eq. 15-46). As curvas da Fig. 15-17 mostram que a um amortecimento menor está associado um *pico de ressonância* mais alto e mais estreito.

Todas as estruturas mecânicas possuem uma ou mais freqüências angulares naturais; se a estrutura é submetida a uma força externa cuja freqüência coincide com uma dessas freqüências angulares naturais as oscilações resultantes podem fazer com que a estrutura se rompa. Assim, por exemplo, os projetistas de aeronaves devem se certificar de que nenhuma das freqüências angulares naturais com as quais uma asa pode oscilar coincida com a freqüência angular dos motores durante o vôo. Uma asa que vibrasse violentamente para certas velocidades dos motores obviamente tornaria qualquer vôo muito perigoso.

A ressonância parece ter sido uma das causas do desabamento de muitos edifícios na Cidade do México em setembro de 1985, quando um grande terremoto (8,1 na escala Richter) aconteceu na costa oeste do México. As ondas sísmicas do terre-

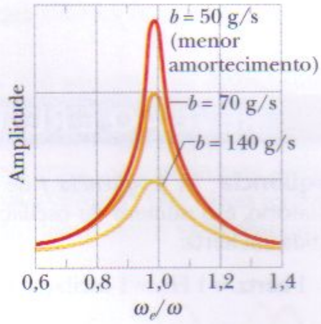


FIG. 15-17 A amplitude do deslocamento x_m de um oscilador forçado varia quando a freqüência angular ω_e da força externa varia. As curvas da figura correspondem a três valores da constante de amortecimento b.

FIG. 15-18 Em 1985, edifícios de altura intermediária desabaram na Cidade do México por causa de um terremoto que ocorreu longe da cidade. Edifícios mais altos e mais baixos permaneceram de pé. *(John T. Barr/Getty Images News and Sport Services)*

moto eram provavelmente fracas demais para causar grandes danos quando chegaram à Cidade do México, a cerca de 400 km de distância. Entretanto, a Cidade do México foi, em sua maior parte, construída sobre o leito de um lago antigo, onde o solo ainda é úmido e macio. Embora a amplitude das ondas sísmicas fosse pequena no solo firme a caminho da Cidade do México, aumentou consideravelmente no solo macio da cidade. As amplitudes das acelerações das ondas chegaram a 0,20g, e a freqüência angular se concentrou (surpreendentemente) em torno de 3 rad/s. Não só o solo oscilou violentamente, mas muitos edifícios de altura intermediária tinham freqüências de ressonância da ordem de 3 rad/s. A maioria desses edifícios desabou durante os tremores (Fig. 15-18), enquanto edifícios mais baixos (com freqüências angulares de ressonância maiores) e mais altos (com freqüências angulares de ressonância menores) permaneceram de pé.

REVISÃO E RESUMO

Freqüência A *freqüência* f de um movimento periódico, ou oscilatório, é o número de oscilações por segundo. No SI, ela é medida em hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1 \text{ s}^{-1}. \qquad (15\text{-}1)$$

Período O *período* T é o tempo necessário para uma oscilação completa, ou **ciclo**. Ele está relacionado à freqüência através da equação

$$T = \frac{1}{f}. \qquad (15\text{-}2)$$

Movimento Harmônico Simples No *movimento harmônico simples* (MHS) o deslocamento $x(t)$ de uma partícula a partir da posição de equilíbrio é descrito pela equação

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(deslocamento)}, \qquad (15\text{-}3)$$

onde x_m é a **amplitude** do deslocamento, a grandeza $(\omega t + \phi)$ é a **fase** do movimento e ϕ é a **constante de fase**. A **freqüência angular** ω está relacionada ao período e à freqüência do movimento através da equação

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{(freqüência angular)}. \qquad (15\text{-}5)$$

Derivando a Eq. 15-3, chega-se às equações da velocidade e da aceleração de uma partícula em MHS em função do tempo:

$$v = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{(velocidade)} \qquad (15\text{-}6)$$

e

$$a = -\omega^2 xm \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(aceleração)}. \qquad (15\text{-}7)$$

Na Eq. 15-6 a grandeza positiva ωx_m é a **amplitude da velocidade** do movimento, v_m. Na Eq. 15-7 a grandeza positiva $\omega^2 x_m$ é a **amplitude da aceleração** do movimento, a_m.

O Oscilador Linear Uma partícula de massa m que se move sob a influência de uma força restauradora dada pela lei de Hooke $F = -kx$ exibe um movimento harmônico simples com

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(freqüência angular)} \qquad (15\text{-}12)$$

e

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(período)}. \qquad (15\text{-}13)$$

Um sistema desse tipo é chamado de **oscilador harmônico simples linear**.

Energia Uma partícula em movimento harmônico simples possui, em qualquer instante, uma energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ e uma energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. Se não há atrito, a energia mecânica $E = K + U$ permanece constante mesmo que K e U variem.

Pêndulos Exemplos de dispositivos que executam um movimento harmônico simples são o **pêndulo de torção** da Fig. 15-7, o **pêndulo simples** da Fig. 15-9 e o **pêndulo físico** da Fig. 15-10. Os períodos de oscilação desses pêndulos para pequenas oscilações são, respectivamente,

$$T = 2\pi\sqrt{I/\kappa} \quad \text{(pêndulo de torção)}, \qquad (15\text{-}23)$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad \text{(pêndulo simples)}, \qquad (15\text{-}28)$$

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgh} \quad \text{(pêndulo físico)}. \qquad (15\text{-}29)$$

Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme O movimento harmônico simples é a projeção do movimento circular uniforme em um diâmetro da circunferência na qual ocorre o movimento circular uniforme. A Fig. 15-14 mostra que as projeções de todos os parâmetros do movimento circular (posição, velocidade e aceleração) fornecem os valores correspondentes dos parâmetros do movimento harmônico simples.

Movimento Harmônico Amortecido A energia mecânica E de sistemas oscilatórios reais diminui durante as oscilações porque forças externas, como a força de arrasto, inibem as oscilações e transferem energia mecânica para a energia térmica. Nesse caso, dizemos que o oscilador real e o seu movimento são **amortecidos**. Se a **força de amortecimento** é dada por $\vec{F}_a = -b\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade do oscilador e b é uma **constante de amortecimento**, o deslocamento do oscilador é dado por

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \qquad (15\text{-}42)$$

onde ω', a freqüência angular do oscilador amortecido, é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \qquad (15\text{-}43)$$

Se a constante de amortecimento é pequena ($b \ll \sqrt{km}$), $\omega' \approx \omega$, onde ω é a freqüência angular do oscilador não-amortecido. Para pequenos valores de b, a energia mecânica E do oscilador é dada por

$$E(t) \approx \tfrac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}. \qquad (15\text{-}44)$$

Oscilações Forçadas e Ressonância Se uma força externa de freqüência angular ω_e age sobre um sistema oscilatório de freqüência angular *natural* ω, o sistema oscila com freqüência angular ω_e. A amplitude da velocidade v_m do sistema é máxima para

$$\omega_e = \omega, \qquad (15\text{-}46)$$

uma situação conhecida como **ressonância**. A amplitude x_m do sistema é (aproximadamente) máxima na mesma situação.

PERGUNTAS

1 O gráfico da Fig. 15-19 mostra a aceleração $a(t)$ de uma partícula que executa um MHS. (a) Qual dos pontos indicados corresponde à partícula na posição $-x_m$? (b) No ponto 4, a velocidade da partícula é positiva, negativa ou nula? (c) No ponto 5, a partícula está em $-x_m$, em $+x_m$, em 0, entre $-x_m$ e 0 ou entre 0 e $+x_m$?

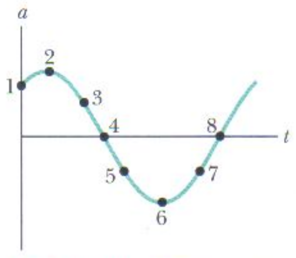


FIG. 15-19 Pergunta 1.

2 Qual das seguintes relações entre a aceleração a e o deslocamento x de uma partícula corresponde a um MHS: (a) $a = 0{,}5x$, (b) $a = 400x^2$, (c) $a = -20x$, (d) $a = -3x^2$?

3 Qual dos seguintes intervalos se aplica ao ângulo ϕ do MHS da Fig. 15-20*a*:

(a) $-\pi < \phi < -\pi/2$,

(b) $\pi < \phi < 3\pi/2$,

(c) $-3\pi/2 < \phi < -\pi$?

4 A velocidade $v(t)$ de uma partícula que executa um MHS é mostrada no gráfico da Fig. 15-20*b*. A partícula está momentaneamente em repouso, está se deslocando em direção a $-x_m$ ou está se deslocando em direção a $+x_m$ (a) no ponto A do gráfico e (b) no ponto B? A partícula está em $-x_m$, em $+x_m$, em 0, entre $-x_m$ e 0 ou entre 0 e $+x_m$ quando sua velocidade é representada (c) pelo ponto A e (d) pelo ponto B? A velocidade da partícula está aumentando ou diminuindo (e) no ponto A e (f) no ponto B?

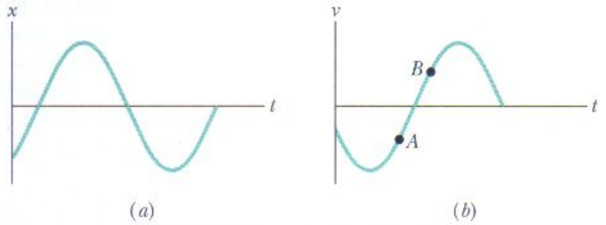


FIG. 15-20 Perguntas 3 e 4.

5 A Fig. 15-21 mostra as curvas $x(t)$ obtidas em três experimentos fazendo um certo sistema bloco-mola oscilar em um MHS. Ordene as curvas de acordo com (a) a freqüência angular do sistema, (b) a energia potencial da mola no instante $t = 0$, (c) a energia cinética do bloco no instante $t = 0$, (d) a velocidade do bloco no instante $t = 0$ e (e) a energia cinética máxima do bloco, em ordem decrescente.

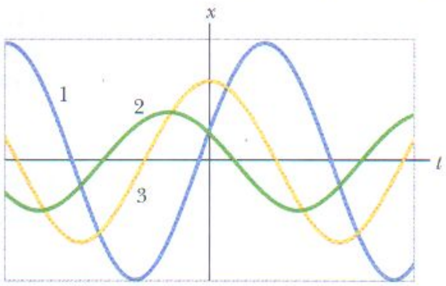


FIG. 15-21 Pergunta 5.

6 A Fig. 15-22 mostra, para três situações, os deslocamentos $x(t)$ de um par de osciladores harmônicos simples (A e B) que são iguais em tudo, exceto na fase. Para cada par, qual o deslocamento de fase (em radianos e em graus) necessário para deslocar a curva A e fazê-la coincidir com a curva B? Das várias respostas possíveis, escolha o deslocamento com o menor valor absoluto.

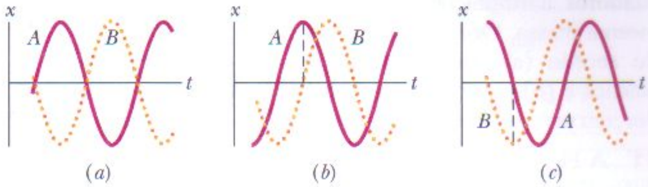


FIG. 15-22 Pergunta 6.

7 Você deve completar a Fig. 15-23*a* para que seja o gráfico da velocidade v em função do tempo t do oscilador bloco-mola que é mostrado na Fig. 15-23*b* para $t = 0$. (a) Na Fig. 15-23*a*, em qual dos pontos indicados por letras ou em que região entre os pontos o eixo v (vertical) deve interceptar o eixo t? (Por exemplo, ele deve interceptar o eixo t no ponto A, ou, talvez, na região entre os pontos A e B?) (b) Se a velocidade do bloco é dada por $v = -v_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, qual é o valor de ϕ? Suponha que é positivo, e se não puder especificar um valor (como $+\pi/2$ rad), forneça uma faixa de valores (como $0 < \phi < \pi/2$).

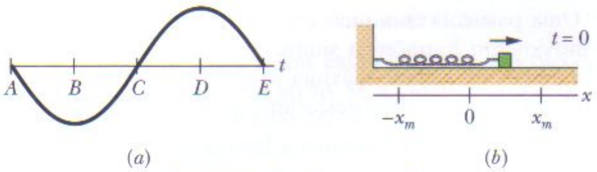


FIG. 15-23 Pergunta 7.

8 Você deve completar a Fig. 15-24*a* para que seja o gráfico da aceleração a em função do tempo t do oscilador bloco-mola que é mostrado na Fig. 15-24*b* para $t = 0$. (a) Na Fig. 15-24*a*, em qual dos pontos indicados por letras ou em que região entre os pontos o eixo v (vertical) deve interceptar o eixo t? (Por exemplo, ele

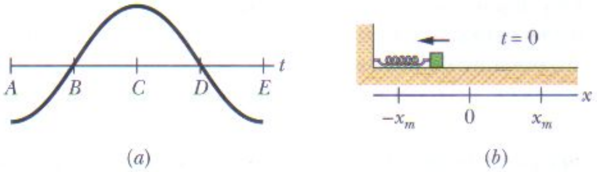


FIG. 15-24 Pergunta 8.

deve interceptar o eixo t no ponto A, ou, talvez, na região entre os pontos A e B?) (b) Se a aceleração do bloco é dada por $a = -a_m$ sen$(\omega t + \phi)$, qual é o valor de ϕ? Suponha que é positivo, e se não puder especificar um valor (como $+\pi/2$ rad), forneça uma faixa de valores (como $0 < \phi < \pi/2$).

9 Na Fig. 15-25, um sistema bloco-mola é colocado em MHS em dois experimentos. No primeiro o bloco é puxado até sofrer um deslocamento d_1 em relação à posição de equilíbrio, e depois liberado. No segundo, é puxado até sofrer um deslocamento maior d_2, e depois liberado. (a) A amplitude, (b) o período, (c) a freqüência, (d) a energia cinética máxima e (e) a energia potencial máxima do movimento no segundo experimento são maiores, menores ou iguais às do primeiro experimento?

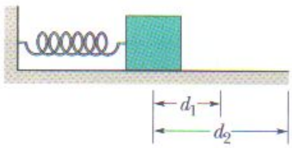


FIG. 15-25 Pergunta 9.

10 A Fig. 15-26 mostra os gráficos da energia cinética K em função da posição x para três osciladores harmônicos que têm a mesma massa. Ordene os gráficos de acordo (a) com a constante elástica e (b) o período do oscilador, em ordem decrescente.

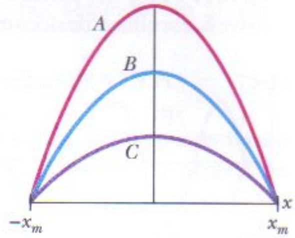


FIG. 15-26 Pergunta 10.

11 A Fig. 15-27 mostra três pêndulos físicos formados por esferas uniformes iguais, rigidamente ligadas por barras iguais de massa desprezível. Os pêndulos são verticais e podem oscilar em torno do ponto de suspensão O. Ordene os pêndulos de acordo com o período das oscilações, em ordem decrescente.

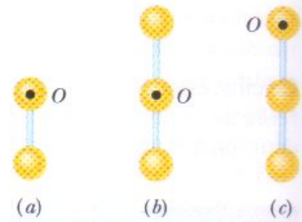


FIG. 15-27 Pergunta 11.

12 Você deve construir o dispositivo de transferência de oscilação mostrado na Fig. 15-28. Ele é composto por dois sistemas bloco-mola pendurados em uma barra flexível. Quando a mola do sistema 1 é distendida e depois liberada, o MHS resultante do sistema 1, de freqüência f_1, faz a barra oscilar. A barra exerce uma força sobre o sistema 2, com a mesma freqüência f_1. Você pode escolher entre quatro molas com constantes elásticas k de 1600, 1500, 1400 e 1200 N/m e entre quatro blocos com massas m de 800, 500, 400 e 200 kg. Determine mentalmente que mola deve ser ligada a que bloco nos dois sistemas para maximizar a amplitude das oscilações do sistema 2.

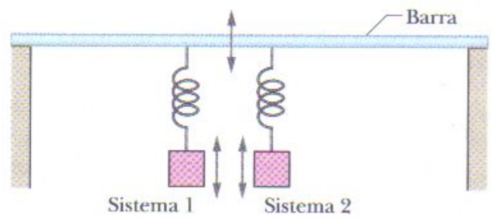


FIG. 15-28 Pergunta 12.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 15-3 A Lei do Movimento Harmônico Simples

•1 Qual é a aceleração máxima de uma plataforma que oscila com uma amplitude de 2,20 cm e uma freqüência de 6,60 Hz?

•2 Uma partícula com uma massa de $1{,}00 \times 10^{-20}$ kg descreve um movimento harmônico simples com um período de $1{,}00 \times 10^{-5}$ s e uma velocidade máxima de $1{,}00 \times 10^3$ m/s. Calcule (a) a freqüência angular e (b) o deslocamento máximo da partícula.

•3 Em um barbeador elétrico a lâmina se move para a frente e para trás, ao longo de uma distância de 2,0 mm, em um movimento harmônico simples com uma freqüência de 120 Hz. Determine (a) a amplitude, (b) a velocidade máxima da lâmina e (c) o módulo da aceleração máxima da lâmina.

•4 Um corpo de 0,12 kg executa um movimento harmônico simples de amplitude 8,5 cm e período 0,20 s. (a) Qual é o módulo da força máxima que age sobre o corpo? (b) Se as oscilações são produzidas por uma mola, qual é a constante elástica da mola?

•5 Um objeto que executa um movimento harmônico simples leva 0,25 s para se deslocar de um ponto de velocidade nula para o ponto seguinte do mesmo tipo. A distância entre esses pontos é 36 cm. Calcule (a) o período, (b) a freqüência e (c) a amplitude do movimento.

•6 Do ponto de vista das oscilações verticais, um automóvel pode ser considerado como estando apoiado em quatro molas iguais. As molas de um certo carro são ajustadas de tal forma que as oscilações têm uma freqüência de 3,00 Hz. (a) Qual é a constante elástica de cada mola se a massa do carro é 1450 kg e está igualmente distribuída pelas molas? (b) Qual será a freqüência de oscilação se cinco passageiros pesando, em média, 73,0 kg entrarem no carro e a distribuição de massa continuar uniforme?

•7 Um oscilador é formado por um bloco com uma massa de 0,500 kg ligado a uma mola. Quando é posto em oscilação com uma amplitude de 35,0 cm o oscilador repete o movimento a cada 0,500 s. Determine (a) o período, (b) a freqüência, (c) a freqüência angular, (d) a constante elástica, (e) a velocidade máxima e (f) o módulo da força máxima que a mola exerce sobre o bloco.

•8 Um sistema oscilatório bloco-mola oscilante leva 0,75 s para começar a repetir seu movimento. Determine (a) o período, (b) a freqüência em hertz e (c) a freqüência angular em radianos por segundo.

•9 Um alto-falante produz um som musical através das oscilações de um diafragma cuja amplitude é limitada a 1,00 μm. (a) Para que freqüência o módulo a da aceleração do diafragma é igual a g? (b) Para freqüências maiores, a é maior ou menor que g?

•10 Qual é a constante de fase do oscilador harmônico cuja função posição $x(t)$ aparece na Fig. 15-29 se a função posição é da forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$? A escala do eixo vertical é definida por $x_s = 6{,}0$ cm.

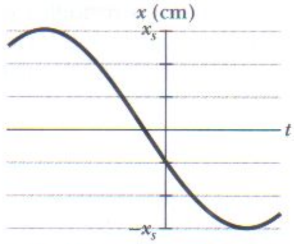


FIG. 15-29 Problema 10.

•11 A função $x = (6{,}0 \text{ m}) \cos[(3\pi \text{ rad/s})t + \pi/3 \text{ rad}]$ descreve o movimento harmônico simples de um corpo. Em $t = 2{,}0$ s, quais são (a) o deslocamento, (b) a velocidade, (c) a aceleração e (d) a fase do movimento? Quais são também (e) a freqüência e (f) o período do movimento?

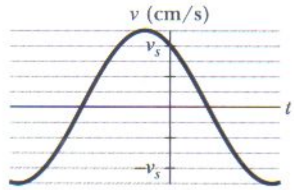


FIG. 15-30 Problema 12.

•12 Qual é a constante de fase do oscilador harmônico cuja função velocidade $v(t)$ aparece na Fig. 15-30 se a função posição $x(t)$ é da forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$? A escala do eixo vertical é definida por $v_s = 4{,}0$ cm/s.

•13 Na Fig. 15-31 duas molas iguais, de constante elástica 7580 N/m, estão ligadas a um bloco de massa 0,245 kg. Qual é a freqüência de oscilação no piso sem atrito?

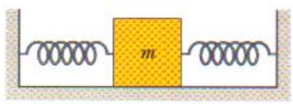


FIG. 15-31
Problemas 13 e 23.

••14 A Fig. 15-32 mostra o bloco 1, de massa 0,200 kg, deslizando para a direita, sobre uma superfície elevada, com uma velocidade de 8,00 m/s. O bloco sofre uma colisão elástica com o bloco 2, inicialmente em repouso, que está preso a uma mola de constante elástica 1208,5 N/m. (Suponha que a mola não afeta a colisão.) Após a colisão, o bloco 2 inicia um MHS com um período de 0,140 s e o bloco 1 desliza para fora da extremidade oposta da superfície elevada, indo cair a uma distância horizontal d dessa superfície, depois de descer uma distância $h = 4{,}90$ m. Qual é o valor de d?

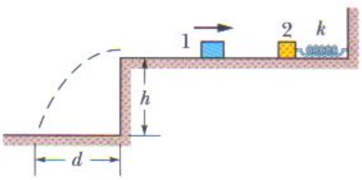


FIG. 15-32 Problema 14.

••15 Um oscilador é formado por um bloco preso a uma mola ($k = 400$ N/m). Em um certo instante t a posição (medida a partir da posição de equilíbrio do sistema), a velocidade e a aceleração do bloco são $x = 0{,}100$ m, $v = -13{,}6$ m/s e $a = -123$ m/s^2. Calcule (a) a freqüência de oscilação, (b) a massa do bloco e (c) a amplitude do movimento.

••16 Em um certo ancoradouro as marés fazem com que a superfície do oceano suba e desça uma distância d (do nível mais alto ao nível mais baixo) em um movimento harmônico simples com um período de 12,5 h. Quanto tempo é necessário para que a água desça uma distância de $0{,}250d$ a partir do nível mais alto?

••17 Um bloco está em uma superfície horizontal (uma mesa oscilante) que se move horizontalmente para a frente e para trás em um movimento harmônico simples com uma freqüência de 2,0 Hz. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície é 0,50. Qual o maior valor possível da amplitude do MHS para que o bloco não deslize pela superfície?

••18 Duas partículas executam movimentos harmônicos simples de mesma amplitude e freqüência ao longo de retas paralelas próximas. Elas passam uma pela outra, movendo-se em sentidos opostos, toda vez que seu deslocamento é de metade da amplitude. Qual é a diferença de fase entre elas?

••19 Duas partículas oscilam em movimento harmônico simples ao longo de um segmento retilíneo comum de comprimento A. As duas partículas têm um período de 1,5 s, mas existe uma diferença de fase de $\pi/6$ rad entre seus movimentos. (a) Qual é a distância entre as partículas (em termos de A) 0,50 s após a partícula atrasada passar por uma das extremidades da trajetória? (b) Nesse instante, as partículas estão se movendo no mesmo sentido, em sentidos opostos, se aproximando uma da outra, ou em sentidos opostos, se afastando uma da outra?

••20 A Fig. 15-33a é um gráfico parcial da função posição $x(t)$ de um oscilador harmônico simples com uma freqüência angular de 1,20 rad/s; a Fig. 15-33b é um gráfico parcial da função velocidade $v(t)$ correspondente. As escalas dos eixos verticais são definidas por $x_s = 5{,}0$ cm e $v_s = 5{,}0$ cm/s. Qual é a constante de fase do MHS se a função posição $x(t)$ é dada na forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$?

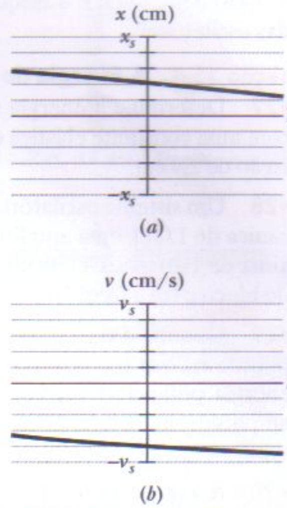


FIG. 15-33 Problema 20.

••21 Um bloco está apoiado em um êmbolo que se move verticalmente em um movimento harmônico simples. (a) Se o MHS tem um período de 1,0 s, para que valor da amplitude do movimento o bloco e o êmbolo se separam? (b) Se o êmbolo se move com uma amplitude de 5,0 cm, qual é a maior freqüência para a qual o bloco e o êmbolo permanecem continuamente em contato?

••22 Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco de massa 2,00 kg preso a uma mola de constante elástica 100 N/m. Em $t = 1{,}00$ s a posição e a velocidade do bloco são $x = 0{,}129$ m e $v = 3{,}415$ m/s. (a) Qual é a amplitude das oscilações? Quais eram (b) a posição e (c) a velocidade do bloco em $t = 0$ s?

••23 Na Fig. 15-31 duas molas estão presas a um bloco que pode oscilar em um piso sem atrito. Se a mola da esquerda é removida o bloco oscila com uma freqüência de 30 Hz. Se a mola removida é a da direita, o bloco oscila com uma freqüência de 45 Hz. Com que freqüência o bloco oscila se as duas molas estão presentes?

•••24 Na Fig. 15-34 dois blocos ($m = 1{,}8$ kg e $M = 10$ kg) e uma mola ($k = 200$ N/m) estão dispostos em uma superfície horizontal sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é 0,40. Que amplitude do movimento harmônico simples do sistema blocos-mola faz com que o bloco menor fique na iminência de deslizar sobre o bloco maior?

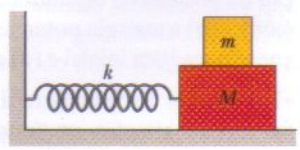


FIG. 15-34 Problema 24.

•••25 Na Fig. 15-35 um bloco pesando 14,0 N, que pode deslizar sem atrito em um plano inclinado de ângulo $\theta = 40{,}0°$, está ligado ao alto do plano inclinado por uma mola de massa desprezível com 0,450 m de comprimento, quando está relaxada, e constante elástica 120 N/m. (a) A que distância do alto do plano inclinado fica o ponto de equilíbrio do bloco? (b) Se o bloco é puxado ligeiramente para baixo ao longo do plano inclinado e depois liberado, qual é o período das oscilações resultantes?

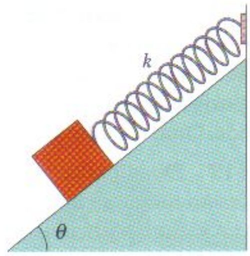


FIG. 15-35 Problema 25.

•••26 Na Fig. 15-36 duas molas são ligadas entre si e a um bloco de massa 0,245 kg que oscila em um piso sem atrito. As duas molas possuem uma constante elástica k = 6430 N/m. Qual é a freqüência das oscilações?

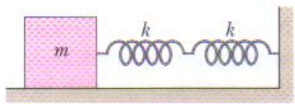


FIG. 15-36 Problema 26.

seção 15-4 A Energia do Movimento Harmônico Simples

•27 Determine a energia mecânica de um sistema bloco-mola com uma constante elástica de 1,3 N/cm e uma amplitude de oscilação de 2,4 cm.

•28 Um sistema oscilatório bloco-mola possui uma energia mecânica de 1,00 J, uma amplitude de 10,0 cm e uma velocidade máxima de 1,20 m/s. Determine (a) a constante elástica, (b) a massa do bloco e (c) a freqüência de oscilação.

•29 Quando o deslocamento em um MHS é de metade da amplitude x_m, que fração da energia total é (a) energia cinética e (b) energia potencial? (c) Para que deslocamento, como fração da amplitude, a energia do sistema é metade energia cinética e metade energia potencial?

•30 A Fig. 15-37 mostra o poço de energia potencial unidimensional no qual se encontra uma partícula de 2,0 kg (a função $U(x)$ é da forma bx^2 e a escala do eixo vertical é definida por U_s = 2,0 J). (a) Se a partícula passa pela posição de equilíbrio com uma velocidade de 85 cm/s, ela retorna antes de chegar ao ponto x = 15 cm? (b) Caso a resposta seja afirmativa, calcule a posição do ponto de retorno; caso a resposta seja negativa, calcule a velocidade da partícula no ponto x = 15 cm.

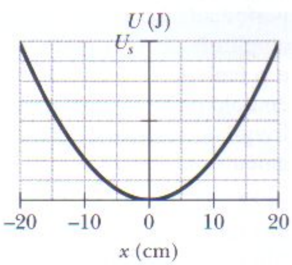


FIG. 15-37 Problema 30.

•31 Um objeto de 5,00 kg que repousa em uma superfície horizontal sem atrito está preso a uma mola com k = 1000 N/m. O objeto é deslocado horizontalmente 50,0 cm a partir da posição de equilíbrio e recebe uma velocidade inicial de 10,0 m/s na direção da posição de equilíbrio. Quais são (a) a freqüência do movimento, (b) a energia potencial inicial do sistema bloco-mola, (c) a energia cinética inicial e (d) a amplitude do movimento?

•32 A Fig. 15-38 mostra a energia cinética K de um oscilador harmônico simples em função de sua posição x. A escala vertical é definida por K_s = 4,0 J. Qual é a constante elástica?

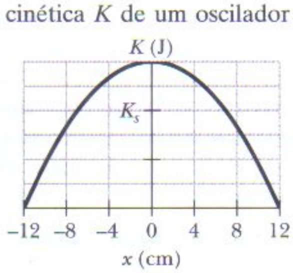


FIG. 15-38 Problema 32.

••33 Uma partícula de 10 g executa um MHS com uma amplitude de 2,0 mm, uma aceleração máxima de módulo 8,0 × 10^3 m/s² e uma constante de fase desconhecida ϕ. Quais são (a) o período do movimento, (b) a velocidade máxima da partícula e (c) a energia mecânica total do oscilador? Qual é o módulo da força que age sobre a partícula quando ela está (d) em seu deslocamento máximo e (e) na metade do deslocamento máximo?

••34 Se o ângulo de fase de um sistema bloco-mola em MHS é $\pi/6$ rad e a posição do bloco é dada por $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, qual é a razão entre a energia cinética e a energia potencial no instante $t = 0$?

••35 Um bloco de massa M = 5,4 kg, em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito, está ligado a um suporte rígido através de uma mola de constante elástica k = 6000 N/m. Uma bala de massa m = 9,5 g e velocidade $\vec{v}$ de módulo 630 m/s atinge o bloco e fica alojada nele (Fig. 15-39). Supondo que a compressão da mola é desprezível até a bala se alojar no bloco, determine (a) a velocidade do bloco imediatamente após a colisão e (b) a amplitude do movimento harmônico simples resultante.

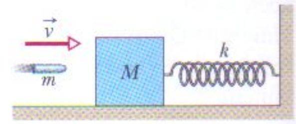


FIG. 15-39 Problema 35.

••36 Na Fig. 15-40 o bloco 2, de massa 2,0 kg, oscila na extremidade de uma mola em MHS com período de 20 ms. A posição do bloco é dada por x = (1,0 cm) $\cos(\omega t + \pi/2)$. O bloco 1, de massa 4,0 kg, desliza em direção ao bloco 2 com uma velocidade de módulo 6,0 m/s, dirigida ao longo do comprimento da mola. Os dois blocos sofrem uma colisão perfeitamente inelástica no instante t = 5,0 ms. (A duração da colisão é muito menor que o período do movimento.) Qual é a amplitude do MHS após a colisão?

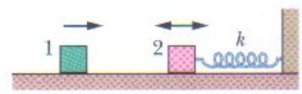


FIG. 15-40 Problema 36.

•••37 Uma mola de massa desprezível está pendurada em um teto com um pequeno objeto preso à extremidade inferior. O objeto é inicialmente mantido em repouso em uma posição y_i tal que a mola se encontra no estado relaxado. Em seguida, o objeto é liberado e passa a oscilar para cima e para baixo, com a posição mais baixa 10 cm abaixo de y_i. (a) Qual é a freqüência das oscilações? (b) Qual é a velocidade do objeto quando se encontra 8,0 cm abaixo da posição inicial? (c) Um objeto de massa 300 g é preso ao primeiro objeto, após o que o sistema passa a oscilar com metade da freqüência original. Qual é a massa do primeiro objeto? (d) A que distância abaixo de y_i está a nova posição de equilíbrio (repouso), com os dois objetos presos à mola?

seção 15-5 Um Oscilador Harmônico Simples Angular

•38 Uma esfera maciça com uma massa de 95 kg e 15 cm de raio está suspensa por um fio vertical. Um torque de 0,20 N · m é necessário para fazer a esfera girar 0,85 rad e manter essa orientação. Qual é o período das oscilações que ocorrem quando a esfera é liberada?

••39 O balanço de um relógio antigo oscila com uma amplitude angular de π rad e um período de 0,500 s. Determine (a) a velocidade angular máxima do balanço, (b) a velocidade angular no momento em que o deslocamento é $\pi/2$ rad e (c) o módulo da aceleração angular no momento em que o deslocamento é $\pi/4$ rad.

seção 15-6 Pêndulos

•40 Suponha que um pêndulo simples é formado por um pequeno peso de 60,0 g pendurado na extremidade de uma corda de massa desprezível. Se o ângulo θ entre a corda e a vertical é dado por

$$\theta = (0{,}0800 \text{ rad}) \cos[(4{,}43 \text{ rad/s})t + \phi],$$

quais são (a) o comprimento da corda e (b) a energia cinética máxima do peso?

•41 (a) Se o pêndulo físico do Exemplo 15-5 é invertido e pendurado pelo ponto P, qual é o período de oscilação? (b) O período é maior, menor ou igual ao valor anterior?

•42 No Exemplo 15-5 vimos que um pêndulo físico possui um centro de oscilação a uma distância $2L/3$ do ponto de suspensão. Mostre que a distância entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação para um pêndulo de qualquer formato é I/mh, onde I e h têm os significados da Eq. 15-29 e m é a massa do pêndulo.

•43 Na Fig. 15-41 o pêndulo é formado por um disco uniforme de raio r = 10,0 cm e 500 g de massa preso a uma barra uniforme de comprimento L = 500 mm e 270 g de massa. (a) Calcule o momento de inércia em relação ao ponto de suspensão. (b) Qual é a distância entre o ponto de suspensão e o centro de massa do pêndulo? (c) Calcule o período de oscilação.

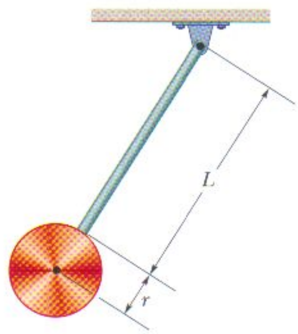


FIG. 15-41 Problema 43.

•44 Um pêndulo físico é formado por uma régua de um metro, cujo ponto de suspensão é um pequeno furo feito na régua a uma distância d da marca de 50 cm. O período de oscilação é 2,5 s. Determine o valor de d.

•45 Na Fig. 15-42 um pêndulo físico é formado por um disco uniforme (de raio R = 2,35 cm) sustentado em um plano vertical por um pino situado a uma distância d = 1,75 cm do centro do disco. O disco é deslocado de um pequeno ângulo e liberado. Qual é o período do movimento harmônico simples resultante?

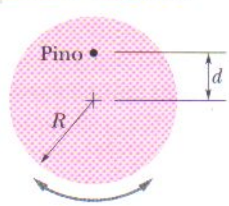


FIG. 15-42 Problema 45.

•46 Um pêndulo físico é formado por duas réguas de um metro de comprimento unidas da forma indicada na Fig. 15-43. Qual é o período de oscilação do pêndulo em torno de um pino que passa pelo ponto A situado no centro da régua horizontal?

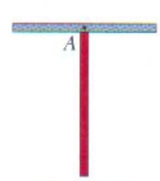


FIG. 15-43 Problema 46.

•47 Uma artista de circo, sentada em um trapézio, está balançando com um período de 8,85 s. Quando fica de pé, elevando assim de 35,0 o centro de massa do sistema *trapézio + artista*, qual é o novo período do sistema? Trate o sistema *trapézio + artista* como um pêndulo simples.

••48 Uma barra fina uniforme (massa = 0,50 kg) oscila em torno de um eixo que passa por uma das extremidades da barra e é perpendicular ao plano de oscilação. A barra oscila com um período de 1,5 s e uma amplitude angular de 10°. (a) Qual é o comprimento da barra? (b) Qual é a energia cinética máxima da barra?

••49 Na Fig. 15-44 uma barra de comprimento L = 1,85 m oscila como um pêndulo físico. (a) Que valor da distância x entre o centro de massa da barra e o ponto de suspensão O corresponde ao menor período? (b) Qual é esse período?

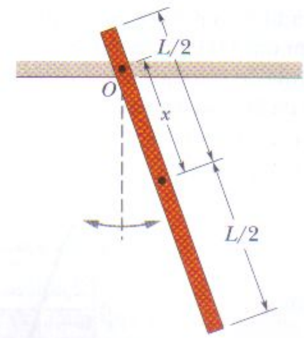


FIG. 15-44 Problema 49.

••50 O cubo de 3,00 kg na Fig. 15-45 tem d = 6,00 cm de aresta e está montado em um eixo que passa pelo seu centro. Uma mola (k = 1200 N/m) liga o vértice superior do cubo a uma parede rígida. Inicialmente a mola está relaxada. Se o cubo é girado de 3° e liberado, qual é o período do MHS resultante?

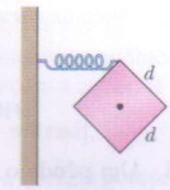


FIG. 15-45 Problema 50.

••51 Na vista superior da Fig. 15-46 uma barra longa e uniforme de massa 0,600 kg está livre para girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. Uma mola de constante elástica k = 1850 N/m é ligada horizontalmente entre uma das extremidades da barra e uma parede fixa. Quando a barra está em equilíbrio fica paralela à parede. Qual é o período das pequenas oscilações que acontecem quando a barra é girada ligeiramente e depois liberada?

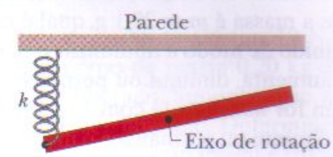


FIG. 15-46 Problema 51.

••52 Um bloco retangular, com faces de largura a = 35 cm e comprimento b = 45 cm, é suspenso por uma barra fina que passa por um pequeno furo no seu interior e colocado para oscilar como um pêndulo, com uma amplitude suficientemente pequena para que se trate de um MHS. A Fig. 15-47 mostra uma possível posição do furo, a uma distância r do centro do bloco, sobre a reta que liga o centro a um dos vértices. (a) Plote o período do pêndulo em função da distância r de modo que o mínimo da curva fique evidente. (b) O mínimo acontece para que valor de r? Na realidade existe um lugar geométrico em torno do centro do bloco para o qual o período de oscilação possui o mesmo valor mínimo. (c) Qual é a forma desse lugar geométrico?

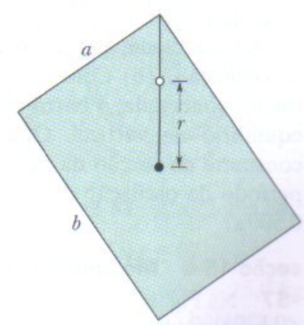


FIG. 15-47 Problema 52.

••53 O ângulo do pêndulo da Fig. 15-9b é dado por $\theta = \theta_m \cos[(4{,}44 \text{ rad/s})t + \phi]$. Se, em $t = 0$, θ = 0,040 rad e $d\theta/dt$ = −0,200 rad/s, quais são (a) a constante de fase ϕ e (b) o ângulo máximo θ_m? (*Atenção:* Não confunda a taxa de variação de θ, $d\theta/dt$, com a freqüência angular ω do MHS.)

••54 Na Fig. 15-48a uma placa de metal está montada em um eixo que passa pelo seu centro de massa. Uma mola com k = 2000 N/m está ligada a uma parede e a um ponto da borda da placa a uma distância r = 2,5 cm do centro de massa. Inicialmente a mola está relaxada. Se a placa é girada de 7° e liberada, oscila em torno do eixo em um MHS, com sua posição angular dada pela Fig. 15-48b. A escola do eixo horizonte é definida por t_s = 20 ms. Qual é o momento de inércia da placa em relação ao centro de massa?

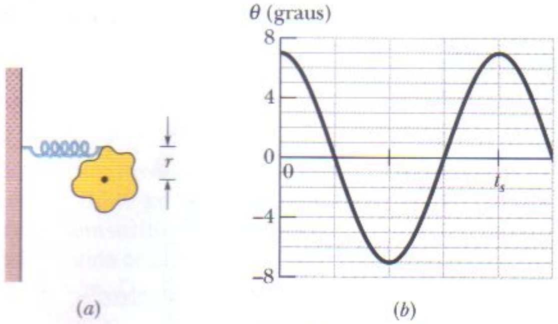


FIG. 15-48 Problema 54.

•••55 Um pêndulo é formado suspendendo-se por um ponto uma barra longa e fina. Em uma série de experimentos o período é medido em função da distância x entre o ponto de suspensão e o centro da barra. (a) Se o comprimento da barra é L = 2,20 m e a massa é m = 22,1 g, qual é o menor período? (b) Se x é escolhido de modo a minimizar o período e L é aumentado, o período aumenta, diminui ou permanece o mesmo? (c) Se, em vez disso, m for aumentada com L mantido constante, o período aumenta, diminui ou permanece o mesmo?

•••56 Na Fig. 15-49 um disco de 2,50 kg com D = 42,0 cm de diâmetro está preso a uma das extremidades de uma barra de comprimento L = 76,0 cm e massa desprezível que está suspensa pela outra extremidade. (a) Com a mola de torção de massa desprezível desconectada, qual é o período de oscilação? (b) Com a mola de torção conectada, a barra fica em equilíbrio na vertical. Qual é a constante de torção da mola se o período de oscilação diminuiu de 0,500 s?

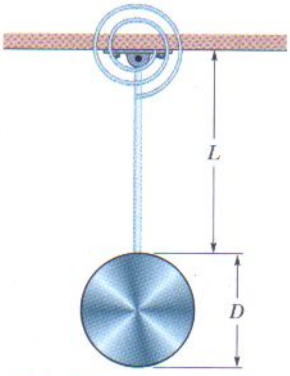


FIG. 15-49 Problema 56.

seção 15-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido

•57 Na Fig. 15-15 o bloco possui uma massa de 1,50 kg e a constante elástica é 8,00 N/m. A força de amortecimento é dada por $-b(dx/dt)$, onde b = 230 g/s. O bloco é puxado 12,0 cm para baixo e liberado. (a) Calcule o tempo necessário para que a amplitude das oscilações resultantes diminua para um terço do valor inicial. (b) Quantas oscilações o bloco realiza nesse intervalo de tempo?

•58 No Exemplo 15-7, qual é a razão entre a amplitude das oscilações amortecidas e a amplitude inicial após 20 ciclos?

•59 A amplitude de um oscilador fracamente amortecido diminui de 3,0% a cada ciclo. Que porcentagem da energia mecânica do oscilador é perdida em cada ciclo?

••60 O sistema de suspensão de um automóvel de 2000 kg "cede" 10 cm quando o chassis é colocado no lugar. Além disso, a amplitude das oscilações diminui de 50% a cada ciclo. Estime os valores (a) da constante elástica k e (b) da constante de amortecimento b do sistema mola-amortecedor de uma das rodas, supondo que cada roda sustente 500 kg.

seção 15-9 Oscilações Forçadas e Ressonância

•61 Suponha que, na Eq. 15-45, a amplitude x_m é dada por

$$x_m = \frac{F_m}{[m^2(\omega_d^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_d^2]^{1/2}},$$

onde F_m é a amplitude (constante) da força externa alternada exercida sobre a mola pelo suporte rígido da Fig. 15-15. Na ressonância, quais são (a) a amplitude do movimento e (b) a amplitude da velocidade do bloco?

•62 Nove pêndulos com os seguintes comprimentos são pendurados em uma viga horizontal: (a) 0,10; (b) 0,30; (c) 0,40; (d) 0,80; (e) 1,2; (f) 2,8; (g) 3,5; (h) 5,0; (i) 6,2 m. A viga sofre oscilações horizontais com freqüências angulares na faixa de 2,00 rad/s a 4,00 rad/s. Quais dos pêndulos entram (fortemente) em oscilação?

••63 Um carro de 1000 kg com quatro ocupantes de 82 kg viaja em uma estrada de terra com "costelas" separadas por uma distância média de 4,0 m. O carro trepida com amplitude máxima quando está a 16 km/h. Quando o carro pára e os ocupantes saltam, qual é a variação da altura do carro?

Problemas Adicionais

64 Um bloco está em MHS na extremidade de uma mola, com a posição dada por $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Se $\phi = \pi/5$ rad, que porcentagem da energia mecânica total é energia potencial no instante $t = 0$?

65 A Fig. 15-50 mostra a posição de um bloco de 20 g oscilando em um MHS na extremidade de uma mola. A escala do eixo horizontal é definida por t_s = 40,0 ms. Quais são (a) a energia cinética máxima do bloco e (b) o número de vezes por segundo que esse máximo é atingido? (*Sugestão:* Medir a inclinação de uma curva provavelmente fornecerá valores muito pouco precisos. Tente encontrar outro método.)

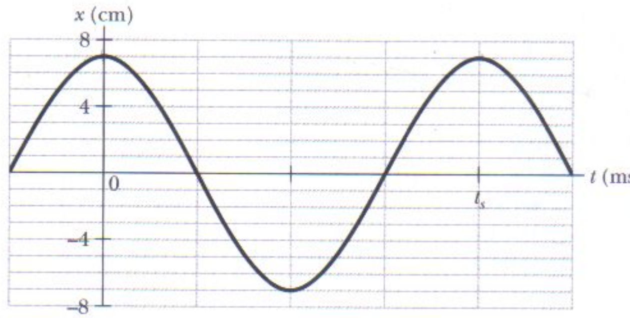


FIG. 15-50 Problemas 65 e 66.

66 A Fig. 15-50 mostra a posição $x(t)$ de um bloco oscilando em um MHS na extremidade de uma mola (t_s = 40,0 ms). Quais são (a) a velocidade e (b) o módulo da aceleração radial de uma partícula no movimento circular uniforme correspondente?

67 A Fig. 15-51 mostra a energia cinética K de um pêndulo simples em função do ângulo θ com a vertical. A escala do eixo vertical é definida por K_s = 10,0 mJ. O peso do pêndulo tem uma massa de 0,200 kg. Qual é o comprimento do pêndulo?

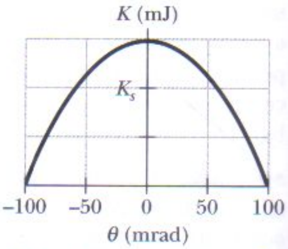


FIG. 15-51 Problema 67.

68 Embora o estado da Califórnia seja conhecido pelos terremo-

tos, possui vastas regiões com rochas precariamente equilibradas que tombariam mesmo quando submetidas a um fraco tremor de terra. As rochas permaneceram nessa situação por milhares de anos, o que sugere que terremotos maiores não ocorreram nessas regiões durante todo esse tempo. Se um terremoto submetesse uma dessas rochas a uma oscilação senoidal (paralela ao solo) com uma freqüência de 2,2 Hz, uma amplitude de oscilação de 1,0 cm faria a rocha tombar. Qual seria o módulo da aceleração máxima da oscilação, em termos de g?

69 Um bloco de 4,00 kg está suspenso por uma mola com $k = 500$ N/m. Uma bala de 50,0 g é disparada verticalmente contra o bloco, de baixo para cima, com uma velocidade de 150 m/s, e fica alojada no bloco. (a) Determine a amplitude do MHS resultante. (b) Que porcentagem da energia cinética original da bala é transferida para a energia mecânica da oscilação?

70 Um bloco de 55,0 g oscila em um MHS na extremidade de uma mola com $k = 1500$ N/m de acordo com a equação $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Quanto tempo o bloco leva para se mover da posição $+0{,}800x_m$ para a posição (a) $+0{,}600x_m$ e (b) $-0{,}800x_m$?

71 O diafragma de um alto-falante está oscilando em um movimento harmônico simples com uma freqüência de 440 Hz e um deslocamento máximo de 0,75 mm. Quais são (a) a freqüência angular, (b) a velocidade máxima e (c) o módulo da aceleração máxima?

72 A ponta de um diapasão executa um MHS com uma freqüência de 1000 Hz e uma amplitude de 0,40 mm. Para esta ponta, qual é o módulo (a) da aceleração máxima, (b) da velocidade máxima, (c) da aceleração quando o deslocamento é 0,20 mm e (d) da velocidade quando o deslocamento é 0,20 mm?

73 Um disco plano circular uniforme possui uma massa de 3,00 kg e um raio de 70,0 cm e está suspenso em um plano horizontal por um fio vertical preso ao centro. Se o disco sofre uma rotação de 2,50 rad em torno do fio, é necessário um torque de 0,0600 N · m para manter essa orientação. Calcule (a) o momento de inércia do disco em relação ao fio, (b) a constante de torção e (c) a freqüência angular desse pêndulo de torção quando é posto para oscilar.

74 Um disco circular uniforme cujo raio R é 12,6 cm está suspenso por um ponto da borda para formar um pêndulo físico. (a) Qual é o período? (b) A que distância do centro $r < R$ existe um ponto de suspensão para o qual o período é o mesmo?

75 Qual é a freqüência de um pêndulo simples de 2,0 m de comprimento (a) em uma sala, (b) em um elevador acelerando para cima a 2,0 m/s^2 e (c) em queda livre?

76 Uma partícula executa um MHS linear com uma freqüência de 0,25 Hz em torno do ponto $x = 0$. Em $t = 0$ ela tem um deslocamento $x = 0{,}37$ cm e velocidade nula. Determine os seguintes parâmetros do MHS: (a) período, (b) freqüência angular, (c) amplitude, (d) deslocamento $x(t)$, (e) velocidade $v(t)$, (f) velocidade máxima, (g) módulo da aceleração máxima, (h) deslocamento em $t = 3{,}0$ s e (i) velocidade em $t = 3{,}0$ s.

77 Uma pedra de 50,0 g está oscilando na extremidade inferior de uma mola vertical. Se a maior velocidade da pedra é 15,0 cm/s e o período é 0,500 s, determine (a) a constante elástica da mola, (b) a amplitude do movimento e (c) a freqüência de oscilação.

78 Um bloco de 2,00 kg está pendurado em uma mola. Quando Um corpo de 300 g é pendurado no bloco a mola sofre uma distensão adicional de 2,00 cm. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) Determine o período do movimento se o corpo de 300 g é removido e o bloco é posto para oscilar.

79 A extremidade de uma mola oscila com um período de 2,0 s quando um bloco com massa m está ligado a ela. Quando a massa é aumentada de 2,0 kg o período do movimento passa a ser 3,0 s. Determine o valor de m.

80 Um bloco de 0,10 kg oscila em linha reta em uma superfície horizontal sem atrito. O deslocamento em relação à origem é dado por

$$x = (10 \text{ cm}) \cos[(10 \text{ rad/s})t + \pi/2 \text{ rad}].$$

(a) Qual é a freqüência de oscilação? (b) Qual é a velocidade máxima velocidade do bloco? (c) Para que valor de x a velocidade é máxima? (d) Qual é o módulo da aceleração máxima do bloco? (e) Para que valor de x a aceleração é máxima? (f) Que força, aplicada ao bloco pela mola, produz uma oscilação como esta?

81 Uma partícula de 3,0 kg está em movimento harmônico simples em uma dimensão e se move de acordo com a equação

$$x = (5{,}0 \text{ m}) \cos[(\pi/3 \text{ rad/s})t - \pi/4 \text{ rad}],$$

com t em segundos. (a) Para que valor de x a energia potencial da partícula é igual à metade da energia total? (b) Quanto tempo a partícula leva para se mover até esta posição x a partir da posição de equilíbrio?

82 Uma mola de massa desprezível e constante elástica 19 N/m está pendurada verticalmente. Um corpo de massa 0,20 kg é preso na extremidade livre da mola e liberado. Suponha que a mola estava relaxada antes de o corpo ser liberado. Determine (a) a distância que o corpo atinge abaixo da posição inicial e (b) a freqüência e (c) a amplitude do MHS resultante.

83 O êmbolo de uma locomotiva tem um curso (o dobro da amplitude) de 0,76 m. Se o êmbolo executa um movimento harmônico simples com uma freqüência angular de 180 rev/min, qual é sua velocidade máxima?

84 Uma roda pode girar livremente em torno do seu eixo fixo. Uma mola é presa a um dos raios a uma distância r do eixo, como mostra a Fig. 15-52. (a) Supondo que a roda é um anel de massa m e raio R, qual é a freqüência angular ω das pequenas oscilações desse sistema em termos de m, R, r e da constante elástica k? Qual é o valor de ω para (b) $r = R$ e (c) $r = 0$?

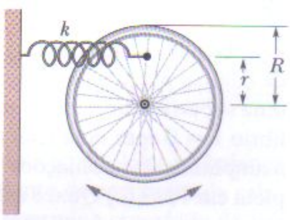


FIG. 15-52 Problema 84.

85 A escala de uma balança de mola que mede de 0 a 15,0 kg tem 12,0 cm de comprimento. Um pacote suspenso na balança oscila verticalmente com uma freqüência de 2,00 Hz. (a) Qual é a constante elástica? (b) Quanto pesa o pacote?

86 Uma mola uniforme com $k = 8600$ N/m é cortada em dois pedaços, 1 e 2, cujos comprimentos no estado relaxado são $L_1 = 7{,}0$ cm e $L_2 = 10$ cm. Qual é o valor (a) de k_1 e (b) de k_2? Um bloco preso na mola original, como na Fig. 15-5, oscila com uma freqüência de 200 Hz. Qual é a freqüência de oscilação se o bloco for preso (c) no pedaço 1 e (d) no pedaço 2?

87 Na Fig. 15-53 três vagonetes de minério de 10.000 kg são mantidos em repouso sobre os trilhos

FIG. 15-53 Problema 87.

de uma mina por um cabo paralelo aos trilhos, que possuem uma inclinação $\theta = 30°$ em relação à horizontal. O cabo sofre um alongamento de 15 cm imediatamente antes de o engate entre os dois vagonetes de baixo se romper, liberando um deles. Supondo que o cabo obedece à lei de Hooke, determine (a) a freqüência e (b) a amplitude das oscilações dos dois vagonetes que restam.

88 Um pêndulo simples com 20 cm de comprimento e 5,0 g de massa está suspenso em um carro de corrida que se move com velocidade constante de 70 m/s, descrevendo uma circunferência com 50 m de raio. Se o pêndulo sofre pequenas oscilações na direção radial em torno da posição de equilíbrio, qual é a freqüência dessas oscilações?

89 Uma mola vertical sofre uma distensão de 9,6 cm quando um bloco de 1,3 kg é pendurado na sua extremidade. (a) Calcule a constante elástica. O bloco é deslocado de mais 5,0 cm para baixo e liberado a partir do repouso. Determine (b) o período, (c) a freqüência, (d) a amplitude e (e) a velocidade máxima do MHS resultante.

90 Um bloco pesando 20 N oscila na extremidade de uma mola vertical para a qual $k = 100$ N/m; a outra extremidade da mola está presa a um teto. Em um certo instante a mola está esticada 0,30 m além do comprimento relaxado (o comprimento quando nenhum objeto está preso à mola) e o bloco possui velocidade nula. (a) Qual é a força resultante aplicada ao bloco nesse instante? Quais são (b) a amplitude e (c) o período do movimento harmônico simples? (d) Qual é a energia cinética máxima do bloco?

91 Um bloco de 1,2 kg deslizando sobre uma superfície horizontal sem atrito está preso a uma mola horizontal com $k = 480$ N/m. Seja x o deslocamento do bloco a partir da posição na qual a mola se encontra relaxada. Em $t = 0$ o bloco passa pelo ponto $x = 0$ com uma velocidade de 5,2 m/s no sentido positivo de x. Quais são (a) a freqüência e (b) a amplitude do movimento do bloco? (c) Escreva uma expressão para o deslocamento x em função do tempo.

92 Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco de 0,80 kg preso a uma mola ($k = 200$ N/m). O bloco desliza em uma superfície horizontal sem atrito em torno da posição de equilíbrio $x = 0$ com uma energia mecânica total de 4,0 J. (a) Qual é a amplitude das oscilações? (b) Quantas oscilações o bloco completa em 10 s? (c) Qual é a energia cinética máxima do bloco? (d) Qual é a velocidade do bloco em $x = 0,15$ m?

93 Um engenheiro possui um objeto de 10 kg de forma irregular e precisa conhecer o momento de inércia do objeto em relação a um eixo que passa pelo centro de massa. O objeto é preso a um fio esticado cuja orientação é a mesma do eixo. O fio possui uma constante de torção $\kappa = 0,50$ N · m. Se este pêndulo de torção sofre 20 oscilações completas em 50 s, qual é o momento de inércia do objeto?

94 O pêndulo de um relógio do vovô é formado por um fino disco de latão de raio $r = 15,00$ cm e massa 1,000 kg ligado a uma barra longa e fina de massa desprezível. O pêndulo oscila livremente em torno de um eixo perpendicular à barra que passa pela extremidade oposta à do disco, como mostra a Fig. 15-54. Se o pêndulo deve ter um período de 2,000 s para pequenas oscilações num local onde $g = 9,800$ m/s^2, qual deve ser o comprimento L da haste com precisão de décimos de milímetro?

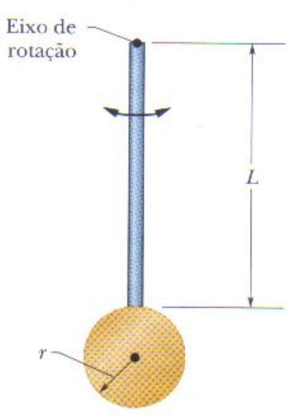


FIG. 15-54 Problema 94.

95 Um bloco que desliza em uma superfície horizontal sem atrito está preso a uma mola horizontal de constante elástica 600 N/m. O bloco executa um MHS em torno da posição de equilíbrio com um período de 0,40 s e uma amplitude de 0,20 m. Quando o bloco está passando pela posição de equilíbrio uma bola de massa de modelar de 0,50 kg é deixada cair verticalmente no bloco. Se a massa fica grudada no bloco, determine (a) o novo período do movimento e (b) a nova amplitude do movimento.

96 Quando uma lata de 20 N é pendurada na extremidade inferior de uma mola vertical a mola sofre uma distensão de 20 cm. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) A mesma mola é colocada horizontalmente em uma mesa sem atrito. Uma das extremidades é mantida fixa e a outra é presa a uma lata de 5,0 N. A lata é deslocada (esticando a mola) e liberada a partir do repouso. Qual é o período da oscilação produzida?

97 Um bloco de 4,00 kg pendurado em uma mola produz um alongamento de 16,0 cm em relação à posição relaxada. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) O bloco é removido e um corpo de 0,500 kg é pendurado na mesma mola. Se a mola é distendida e liberada, qual é o período de oscilação?

98 Um oscilador harmônico amortecido é formado por um bloco ($m = 2,00$ kg), uma mola ($k = 10,0$ N/m) e uma força de amortecimento ($F = -bv$). Inicialmente o bloco oscila com uma amplitude de 25,0 cm; devido ao amortecimento a amplitude cai a três quartos do valor inicial após quatro oscilações completas. (a) Qual é o valor de b? (b) Qual é a energia "perdida" durante as quatro oscilações?

99 Um brinquedo muito apreciado pelas crianças é o *balanço elástico*, um assento sustentado por cordas elásticas (Fig. 15-55). Suponha que existe apenas uma corda em cada lado, a despeito do arranjo mais realista mostrado na figura. Quando uma criança é colocada no assento ambos descem uma distância d_s quando as cordas se distendem (trate-as como se fossem molas). Em seguida o assento é puxado para baixo de uma distância adicional d_m e liberado, o que faz a criança oscilar verticalmente, como um bloco na extremidade de uma mola. Suponha que você seja um engenheiro de segurança da empresa que fabrica o brinquedo. Você não quer que o módulo da aceleração da criança ultrapasse $0,20g$ para que a criança não fique com torcicolo. Se $d_m = 10$ cm, que valor de d_s corresponde a esse módulo da aceleração?

FIG. 15-55 Problema 99.

100 Qual é a constante de fase do oscilador harmônico cuja função aceleração $a(t)$ aparece na Fig. 15-56 se a função posição $x(t)$ é da forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ e $a_s = 4,0$ m/s^2?

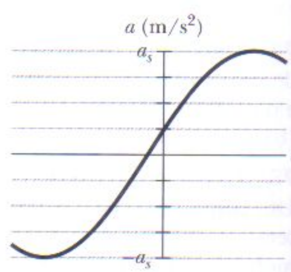


FIG. 15-56 Problema 100.

101 Um pêndulo de torção é formado por um disco de metal com um fio soldado no centro. O fio é montado verticalmente e esticado. A Fig. 15-57a mostra o módulo τ do torque necessário para fazer o disco girar em torno do centro (torcendo o fio) em função do ângulo de rotação θ. A escala do eixo vertical é definida por $\tau_s = 4{,}0 \times 10^{-3}$ N · m. O disco é girado até $\theta = 0{,}200$ rad e depois liberado. A Fig. 15-57b mostra a oscilação resultante em termos da posição angular θ em função do tempo t. (a) Qual é o momento de inércia do disco em relação ao centro? (b) Qual é a velocidade angular máxima $d\theta/dt$ do disco? (*Atenção:* Não confunda a freqüência angular [constante] do MHS e a velocidade angular [variável] do disco, que normalmente são representadas pelo mesmo símbolo, ω. *Sugestão:* A energia potencial U do pêndulo de torção é igual a $\frac{1}{2}\kappa\theta^2$, uma expressão análoga à da energia potencial de uma mola, $U = \frac{1}{2}kx^2$.)

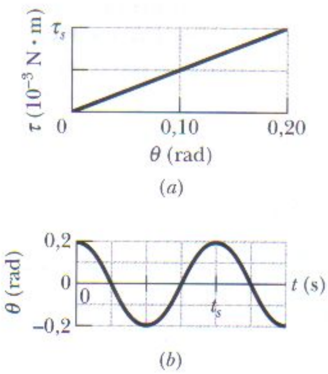


FIG. 15-57 Problema 101.

102 Uma aranha fica sabendo se a teia capturou, digamos, uma mosca porque os movimentos da mosca fazem oscilar os fios da teia. A aranha pode avaliar até mesmo o tamanho da mosca pela freqüência das oscilações. Suponha que uma mosca oscile no *fio de captura* como um bloco preso a uma mola. Qual é a razão entre as freqüências de oscilação de uma mosca de massa m e de uma mosca de massa $2{,}5m$?

103 Determine a amplitude angular θ_m das oscilações de um pêndulo simples para a qual a diferença entre o torque restaurador necessário para o movimento harmônico simples e o torque restaurador verdadeiro seja igual a 1,0%. (Veja "Expansões Trigonométricas" no Apêndice E.)

104 Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco preso a uma mola com $k = 200$ N/m. O bloco desliza em uma superfície sem atrito, com o ponto de equilíbrio em $x = 0$ e uma amplitude de 0,20 m. O gráfico da velocidade v do bloco em função do tempo t aparece na Fig. 15-58. Quais são (a) o período do MHS, (b) a massa do bloco, (c) o deslocamento do bloco em $t = 0$, (d) a aceleração do bloco em $t = 0{,}10$ s e (e) a energia cinética máxima do bloco?

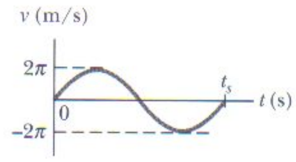


FIG. 15-58 Problema 104.

105 Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco de 0,50 kg preso a uma mola. O bloco oscila em linha reta, de um lado para outro, em uma superfície sem atrito, com o ponto de equilíbrio em $x = 0$. Em $t = 0$, o bloco está em $x = 0$ e se move no sentido positivo de x. A Fig. 15-59 mostra o módulo da força $\vec{F}$ aplicada em função da posição do bloco. A escala vertical é definida por $F_s = 75{,}0$ N. Quais são (a) a amplitude do movimento, (b) o período do movimento, (c) o módulo da aceleração máxima e (d) a energia cinética máxima?

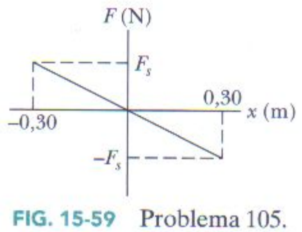


FIG. 15-59 Problema 105.

106 Na Fig. 15-60 um cilindro maciço preso a uma mola horizontal (k = 3,00 N/m) rola sem deslizar em uma superfície horizontal. Se o sistema é liberado a partir do repouso quando a mola está distendida de 0,250 m, determine (a) a energia cinética de translação e (b) a energia cinética de rotação do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio. (c) Mostre que, nessas condições, o centro de massa do cilindro executa um movimento harmônico simples de período

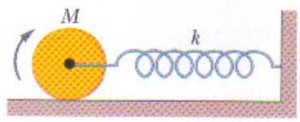


FIG. 15-60 Problema 106.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}},$$

onde M é a massa do cilindro. (Sugestão: Calcule a derivada em relação ao tempo da energia mecânica total.)

107 Um bloco pesando 10,0 N está preso à extremidade inferior de uma mola vertical ($k = 200{,}0$ N/m). A outra extremidade está presa a um teto. O bloco oscila verticalmente e possui uma energia cinética de 2,00 J ao passar pelo ponto no qual a mola está relaxada. (a) Qual é o período de oscilação? (b) Use a lei de conservação da energia para determinar os maiores deslocamentos do bloco acima e abaixo do ponto no qual a mola fica relaxada. (Os dois valores não são necessariamente iguais.) (c) Qual é a amplitude de oscilação? (d) Qual é a energia cinética máxima do bloco?

108 Um bloco de 2,0 kg executa um MHS preso a uma mola horizontal de constante elástica 200 N/m. A velocidade máxima do bloco enquanto desliza em uma superfície horizontal sem atrito é 3,0 m/s. Quais são (a) a amplitude do movimento do bloco, (b) o módulo da aceleração máxima e (c) o módulo da aceleração mínima? (d) Quanto tempo o bloco leva para completar 7,0 ciclos do seu movimento?

109 As freqüências de vibração dos átomos nos sólidos em temperaturas normais são da ordem de 1013 Hz. Imagine que os átomos estão ligados uns aos outros através de molas. Suponha que um átomo de prata em um sólido vibre com essa freqüência e que todos os outros átomos estejam em repouso. Calcule a constante elástica efetiva. Um mol ($6{,}02 \times 10^{23}$ átomos) de prata tem uma massa de 108 g.

110 Na Fig. 15-61 uma bola de demolição de 2500 kg balança na ponta de um guindaste. O comprimento do segmento de cabo que se move com a bola é 17 m. (a) Determine o período do balanço, supondo que o sistema pode ser tratado como um pêndulo simples. (b) O período depende da massa da bola?

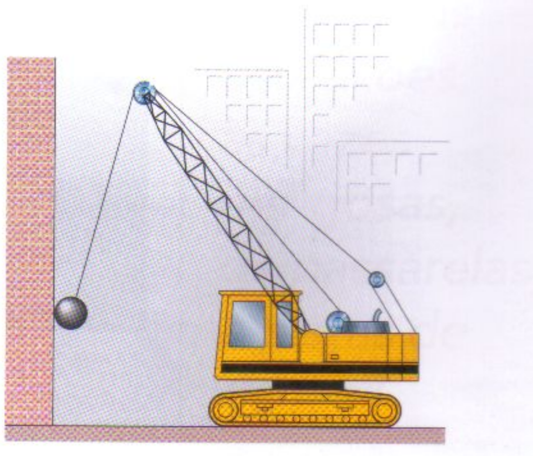


FIG. 15-61 Problema 110.

111 O centro de oscilação de um pêndulo físico possui a seguinte propriedade interessante: se um impulso (horizontal e no plano de oscilação) é aplicado ao centro de oscilação, nenhuma oscilação é sentida no ponto de apoio. Os jogadores de beisebol (e os jogadores de muitos outros esportes) sabem que a menos que a bola se choque com o bastão nesse ponto (chamado de "ponto doce" pelos atletas), as oscilações produzidas pelo impacto serão transmitidas às mãos. Para demonstrar essa propriedade, suponha que a régua da Fig. 15-11a simule um bastão de beisebol. Suponha que uma força horizontal $\vec{F}$ (devido ao impacto da bola) age para a direita em P, o centro de oscilação. O batedor segura o bastão em O, o ponto de sustentação da régua. (a) Que aceleração a força $\vec{F}$ imprime ao ponto O? (b) Que aceleração angular é produzida por $\vec{F}$ em relação ao centro de massa da régua? (c) Como resultado da aceleração angular calculada no item (b), qual é a aceleração linear do ponto O? (d) Considerando os módulos e orientações das acelerações calculadas nos itens (a) e (c), convença-se de que o ponto P é, de fato, um "ponto doce".

112 Um bloco de 2,0 kg é preso a uma das extremidades de uma mola com uma constante elástica de 350 N/m e forçado a oscilar por uma força $F = (15\ \text{N})\ \text{sen}(\omega_d t)$, onde $\omega_d = 35$ rad/s. A constante de amortecimento é $b = 15$ kg/s. Em $t = 0$ o bloco está em repouso com a mola no comprimento relaxado. (a) Use integração numérica para plotar o deslocamento do bloco durante o primeiro 1,0 s. Use o movimento perto do final do intervalo de 1,0 s para estimar a amplitude, o período e a freqüência angular. Repita os cálculos para (b) $\omega_d = \sqrt{k/m}$ e (c) $\omega_d = 20$ rad/s.