Física I para Engenharia
IFUSP - 432195
REC - 01/08/2014

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, a lápis ou tinta. Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

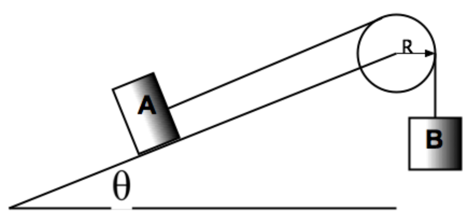
Nome	Assinatura	Nº. USP	Turma

1) No sistema da figura abaixo, dois corpos com massas M_A e M_B estão ligados por uma corda de massa desprezível, passando por uma polia de raio R e momento de inércia I em relação ao seu eixo. Esta pode girar livremente (sem atrito) em torno do seu eixo. Sendo a aceleração gravitacional g, e o atrito do corpo A com o plano μ (considerando o coeficiente de atrito estático igual ao cinético), responda:

a) (1,0) Qual é a aceleração do conjunto supondo que a direção do movimento é tal que o corpo A sobe a rampa?

b) (1,0) Qual é a tensão T_A na extremidade da corda ligada ao corpo A e qual é a tensão T_B na corda ligada ao corpo B?

c) (0,5) Supondo $\theta = 30^o$ e $\mu = 1/\sqrt{3}$, qual deve ser a razão entre as massas M_B/M_A para que o sistema se movimente com velocidade constante?



SOLUÇÃO:

a) Vamos primeiramente escrever as equações do movimento de translação.

$$\begin{array}{c} \begin{cases} M_B g - T_B = M_B a \\ T_A - M_A g sen\theta - F_{at} = M_A a \end{cases} \\ \hline M_B g - M_A g sen\theta - \mu M_A g cos\theta + T_A - T_B = a\left(M_A + M_B\right) \end{array}$$

Torque:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \left(\mathbf{T_B} - \mathbf{T_A}\right) &= I\alpha \\ T_B - T_A &= \frac{Ia}{R^2} \end{aligned}$$

Substituindo a expressão $T_B - T_A$ na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned}
M_B g - M_A g\left(sen\theta + \mu cos\theta\right) &= \frac{Ia}{R^2} + a\left(M_A + M_B\right) \\
a &= \frac{M_B g - M_A g\left(sen\theta + \mu cos\theta\right)}{\frac{I}{R^2} + \left(M_A + M_B\right)}
\end{aligned}$$

b) Tensão na corda.

$$\begin{aligned}
T_B &= M_B\left(g - a\right) \\
&= M_B g - \frac{M_B g - M_A g\left(sen\theta + \mu cos\theta\right)}{\frac{I}{R^2} + \left(M_A + M_B\right)} \\
T_A &= M_A\left(g sen\theta + \mu g cos\theta + a\right)
\end{aligned}$$

c) Se o sistema possui velocidade constante então sua aceleração é nula, logo:

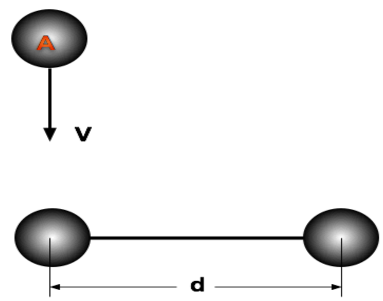
$$\begin{aligned}
0 &= \frac{M_B g - M_A g\left(sen\theta + \mu cos\theta\right)}{\frac{I}{R^2} + \left(M_A + M_B\right)} \\
M_B g &= M_A g\left(sen\theta + \mu cos\theta\right) \\
\frac{M_B}{M_A} &= \left(sen\theta + \mu cos\theta\right) = 1
\end{aligned}$$

2) Um haltere é formado por duas partículas de massa m ligadas por uma haste rígida, de massa desprezível e comprimento d. O haltere pode deslizar sem atrito sobre a mesa. Uma partícula A de massa m, com velocidade inicial v (perpendicular a haste do haltere) colide com uma das partículas, como mostrado na figura abaixo.

a) (0,5) Para uma colisão perfeitamente inelástica (as partículas permanecem coladas após a colisão) obtenha a velocidade do centro de massa do conjunto após a colisão.

b) (1.0) Obtenha a posição do centro de massa antes e depois da colisão. Sugestão: faça com que a origem do sistema de coordenadas coincida com o centro da haste que une as partículas.

c) (1,0) Obtenha a velocidade angular do conjunto após a colisão.



SOLUÇÃO:

a) Como a somatória das forças externas é nula o momento linear deve se conservar, portanto podemos escrever que:

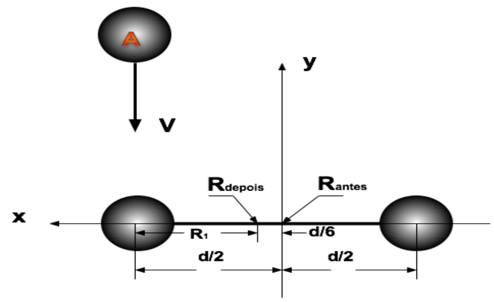
$$\begin{aligned} mv &= MV_{CM} \\ V_{CM} &= \frac{m}{M}v = \frac{m}{3m}v = \frac{v}{3} \end{aligned}$$

b) Posição do centro de massa antes da colisão:

$$\begin{aligned} R_{antes} &= \frac{1}{M}\sum m_i x_i \\ &= \frac{1}{2m}(mx - mx) = 0 \end{aligned}$$

Posição do centro de massa depois da colisão:

$$\begin{aligned} R_{depois} &= \frac{1}{M}\sum m_i x_i \\ &= \frac{1}{3m}(2mx - mx) \\ &= \frac{d}{6} \end{aligned}$$



c) Velocidade angular:

Como a somatória dos torque também é nula, o momento angular deve se conservar.

$$\begin{aligned}\omega I &= mR_1 v \\ \omega &= \frac{mR_1 v}{I}\end{aligned}$$

onde I é o momento de inércia do haltere após a colisão e R_1 é o raio de rotação que é determinado pela posição do novo centro de massa.

$$R_1 = \frac{d}{2} - \frac{d}{6} = \frac{d}{3}$$

Substituindo na equação acima:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{mR_1 v}{2mR_1^2 + m\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{d}{3}v}{2\frac{d^2}{9} + 4\frac{d}{9}^2} \\ &= \frac{v}{2d}\end{aligned}$$

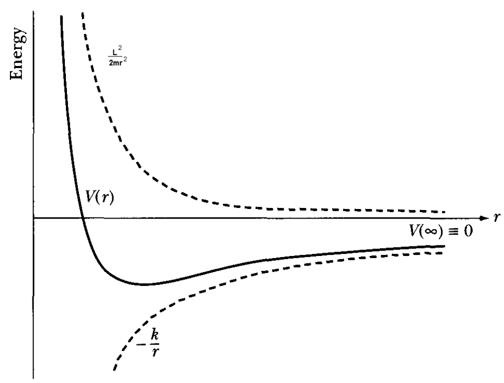
3) Considere um planeta de massa m orbitando uma estrela de massa M , com $M \gg m$. Pela mecânica newtoniana, é possível mostrar que esse planeta possui uma energia potencial dada por:

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

onde L e G são constantes positivas, e r é a distância entre o planeta e a estrela (que se encontra na origem do sistema de coordenadas).

(a) (1,0) Esboce o gráfico da energia potencial.
(b) (0,5) Determine a expressão para a força que age sobre o planeta.
(c) (1,0) Determine r_0 que corresponde a posição de equilíbrio desse planeta.

Solução:
a)



b)

$$\begin{aligned} F &= -\frac{d}{dr}U(r) \\ F &= -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}\right) \\ \mathbf{F} &= \left(\frac{L^2}{mr^3} - \frac{GmM}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

c)Para o equilíbrio, precisamos que

$$\left.\frac{dU(r)}{dr}\right|_{r=r_0} = 0$$

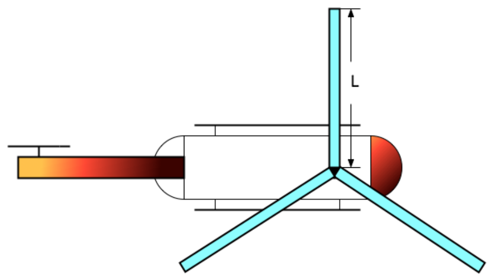
ou seja

$$\frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{GmM}{r_0^2} = 0 \rightarrow \frac{L^2}{m} - GmMr_0 = 0$$

então

$$\boxed{r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}}$$

4) Considere o rotor de um helicóptero como sendo formado por três pás, cada uma com comprimento L e massa M, unidas em suas extremidades (a largura e a espessura são desprezíveis em relação a L). O eixo do rotor é perpendicular ao plano das pás (vide figura abaixo).



a) (0,75) Calcule o momento de inércia de cada pá em relação ao eixo do rotor e o momento de inércia total do rotor.

b) (0.75) Se $M = 200kg$ e $L = 5m$, calcule o torque necessário para que a velocidade angular do rotor varie uniformemente de zero a $300rpm$ em 5 segundos.

c) (1,0) Considere que o momento de inércia da cabine do helicóptero em relação ao eixo do rotor seja de $I_{cab} = 25000kg.m^2$. Se não houvessem forças externas atuando sobre o conjunto cabine+rotor, qual seria a velocidade angular da cabine ao final do intervalo de tempo do tem b)?

SOLUÇÃO:

a) Momento de inércia da pá.

$$\begin{aligned} I_{pa} &= \int_0^L \rho^2 dm \\ &= \int_0^L x^2 \lambda dx \\ &= \frac{M}{L}\left(\frac{L^3}{3} - 0\right) = \frac{ML^2}{3} \end{aligned}$$

momento do rotor.

$$I_{rotor} = 3.I_{pa} = ML^2$$

b) Torque.

$$\tau = I\alpha$$

onde α é a aceleração angular e como ela é constante pode ser calculada como segue:

$$\alpha = \frac{\triangle\omega}{\triangle t} = \frac{\frac{2\pi}{T} - 0}{5}$$

onde T é o período e como a velocidade angular final é $300rpm$, o que corresponde a $5rps$, o período é de $1/5s$. Logo temos que:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\frac{2\pi}{1/5}}{5} = 2\pi rad/s^2 \\
\tau &= I\alpha \\
&= 200.5^2.2.\pi = 10^4\pi N.m
\end{aligned}
$$

c) Velocidade angular.

Se não houverem torques externos atuando sobre o sistema cabine+rotor, o momento angular será conservado, logo $L_i^{rotor} + L_i^{cab} = L_f^{rotor} + L_f^{cab}$. No início do movimento, os momentos angulares da cabine e do rotor são nulos, logo :

$$
\begin{aligned}
L_f^{rotor} &= -L_f^{cab} \\
I_{cab}\omega_{cab} &= -I_{rotor}\omega_{rotor} \\
\omega_{cab} &= -\frac{I_{rotor}\omega_{rotor}}{I_{cab}} \\
&= -\frac{200.5^2.10.\pi}{2,5.10^4} = -2\pi rad/s
\end{aligned}
$$