Lista de Exercícios 5

1) Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções, com a, b e c fixos:

a) $f(t) = cos(at + b)$ b) $f(t) = cos(t)sen(t)$ c) $f(t) = t^2e^{-at}$

d) $f(t) = e^{-at}cos(bt)$ e) $f(t) = t^2 + 2t + 1$ f) $f(t) = sen^2(t)$

g) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ a & \text{se } 0 \leq t < b \\ -a & \text{se } b \leq t \leq c \\ 0 & \text{se } c < t \end{cases}$

2) Mostre que se existe a Transformada de Laplace de f e $\mathcal{L}(f(t)) = F(z)$ então $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{dF(z)}{dz}$. Calcule a Transformada de Laplace de $f(t) = tsen(\omega t)$.

3) Calcule a Anti-transformada de Laplace das funções a seguir.

a) $F(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}$ b) $F(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$ c) $F(z) = \frac{z^2+2z+3}{(z+1)^3}$

d) $F(z) = \frac{2}{z} + \frac{1}{z+2}$ e) $F(z) = \frac{z^3+5z^2+10z+7}{z^2+3z+2}$ f) $F(z) = \frac{5z+10}{z^2(z+1)(z+3)}$

g) $F(z) = \frac{z+1}{z^3+z^2-6z}$ h) $F(z) = \frac{3}{z(z^2+2z+5)}$ i) $F(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2}$

4) Resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias usando a Transformada de Laplace:

a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 4x = 0$, com $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 2$
b) $\ddot{x} + 20\dot{x} + 200x = 0$, com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 20$
c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = cos^2(t)$, com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$
d) $\ddot{x} + k\dot{x} - 2k^2x = 0$, com $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 2k$
e) $\dddot{x} + 2\ddot{x} + 5\dot{x} - 3 = 0$, com $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ e $\ddot{x}(0) = 0$
f) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = e^{-t}$, com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$
g) $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = t^2 - 4$, com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$
h) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = f(t)$, com $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ e $f(t)$ é uma função periódica, de período 2π que no intervalo $[0, 2\pi]$ vale:

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ \pi - t, & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

i) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t + t$, com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$
j) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = r(t)$, com $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ e a função $r(t)$ é dada por:

$$r(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ t^2, & \text{se } 1 < t \end{cases}$$

5) Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais usando a Transformada de Laplace:

a) $\begin{cases} \dot{x} = -x + e^{-t} \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$ com $x(0) = 0$ e $y(0) = -2$

b) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases}$ com $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$

c) $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{y} - x + y = 1 \\ \ddot{y} + \dot{x} - x + y = 0 \end{cases}$ com $x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$

6) Considere o sistema de controle linear dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Para as matrizes A, B e C especificadas nos itens a seguir, obtenha a função de transferência e a resposta ao impulso.

a) $A = \begin{bmatrix} 12 & -14 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -8 & -25 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7) Considere o sistema de controle linear dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

a) Se $A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$, mostre que a função de transferência do sistema é dada por $T(z) = \frac{c_1 z + c_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$.

b) Se $A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, mostre que a função de transferência do sistema é dada por $T(z) = \frac{c_1 z^2 + c_2 z + c_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$.

8) Encontre uma realização para as seguintes funções de transferência:

a) $T(z) = \frac{z+5}{z^2-2z+2}$ b) $T(z) = \frac{1}{z^2-z-1}$ c) $T(z) = \frac{5z+11}{6z^3-z+4}$

d) $T(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z^2} \end{bmatrix}$ e) $T(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-2} \\ \frac{1}{z+5} \end{bmatrix}$ f) $T(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} \\ \frac{z}{z^2+2z-3} \end{bmatrix}$

9) Para as funções de transferência a seguir, encontre uma realização que seja controlável e observável.

a) $T(z) = \frac{z^2+2z+1}{z^3-z^2+4z+3}$ b) $T(z) = \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2-1} \\ \frac{1}{z^2+2z+1} \end{bmatrix}$ c) $T(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} \\ \frac{z-2}{z^2} \end{bmatrix}$

d) $T(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} \\ \frac{5}{z-3} \end{bmatrix}$ e) $T(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} \\ \frac{2}{z-1} \end{bmatrix}$ f) $T(z) = \begin{bmatrix} \frac{2z-3}{z^2-z-6} \\ \frac{z}{z^2-z-6} \end{bmatrix}$

10) Seja (A, B, C) uma realização minimal para a função de transferência $T(z)$ e suponha que $T(z)$ é simétrica, ou seja, $T(z) = (T(z))'$ para todo z. Mostre que (A', C', B') também é uma realização minimal para $T(z)$.