Lista de Exercícios 3

1) Verifique se os seguintes pares (A, C) são observáveis:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$

2) Considere o sistema de controle linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y + u_1 \\ \dot{y} &= 2y + z - u_2 \\ \dot{z} &= z + 2u_1 - u_2 \end{aligned}$$

Com a saída do sistema dada por

$$w = y + z$$

Verifique se o sistema é controlável e observável.

3) Para o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, use o critério de Routh para dar condições necessárias e suficientes sobre os coeficientes reais a, b e c para que o polinômio seja estável.

4) Verifique se a matriz A é estável:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

5) Seja o polinômio com coeficientes reais $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$. Mostre que se $p(\lambda)$ é estável, então todos os coeficientes a_i são maiores do que zero.

6) Verifique se os polinômios abaixo são estáveis:

a) $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 1$
b) $p(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 2$
c) $p(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
d) $p(x) = x^{10} + 3x^9 + 2x^8 + 5x^7 + 4x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 7$
e) $p(x) = x^6 + x^5 + 7x^4 + 5x^3 + 7x^2 + x + 1$
f) $p(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 8x + 7$

7) Mostre que para um polinômio qualquer $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_n$, com coeficientes complexos, o polinômio:

$$q(z) = (z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_n)(z^n + \overline{a_1} z^{n-1} + ... + \overline{a_{n-1}}z + \overline{a_n})$$

tem coeficientes reais. Formule então uma condição necessária e suficiente sobre $q(z)$ para que $p(z)$ tenha raízes com a parte real negativa.

8) Mostre que se uma matriz quadrada A de dimensão n é tal que $\omega(A) > -1$ então existe um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\lim_{t\to\infty} e^t ||e^{tA}v|| = \infty$$