Lista de Exercícios 2

1) Verifique se os seguintes pares (A, B) são controláveis:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) Considere o sistema de controle linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + u_1 \\ \dot{y} = 2y + z - u_2 \\ \dot{z} = z + 2u_1 - u_2 \end{cases}$$

Verifique se o sistema é controlável.

3) Verifique se o sistema de controle linear abaixo é controlável

$$\dddot{y} + a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = u$$

4) Dada a equação $\ddot{x}(t) = u(t)$ com as condições iniciais: $x(0) = 100$ e $\dot{x}(0) = 50$, encontre um controle admissível, constante por partes, que leve o sistema deste estado inicial ao estado $(0, 10)$. (Pode ser em qualquer tempo)

5) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que o par (A, B) não é controlável. As matrizes estão na forma normal de Kalman? Dê um exemplo de um ponto de $\mathbb{R}^2$ que não pode ser atingido a partir de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

6) Coloque os seguintes pares de matrizes (A, B) na forma de Kalman:

a) $A = \begin{bmatrix} -111 & 12 & 21 \\ -92 & -40 & 20 \\ 11 & 4 & -137 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

7) Se temos a seguinte forma de blocos para as matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \mathbf{0} & A_3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

com $A_1 \in M_{k\times k}$ e $B_1 \in M_{k\times m}$, e se o posto de $[B|AB|...|A^{n-1}B]$ é k, mostre que o posto de $[B_1|A_1B_1|...|A_1^{k-1}B_1]$ é k.

8) Sejam A e B as matrizes de um sistema linear $\dot{x} = Ax + Bu$, e seja $T > 0$. Mostre que se um vetor $x \in \mathbb{R}^2$ está no espaço ortogonal de $\mathcal{A}(T)$, então está também no núcleo da matriz de controlabilidade Q_T.

9) Dado o sistema linear $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ache uma base do espaço vetorial $\mathcal{A}(T)$.

10) Dado um sistema linear $\dot{x} = Ax + Bu$, defina o operador linear:

$$L : \mathbb{R}^m \times ... \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$L(u_0, ..., u_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B u_k$$

Mostre que o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ que contém a imagem de B e é invariante por A coincide com a imagem do operador L.