Lista de Revisão de Álgebra Linear

1) Calcule o polinômio característico e minimal das matrizes abaixo.

a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -13 & 5 & 5 \\ -15 & 7 & 5 \\ -15 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -3 & 4 \\ 10 & 1 & 0 & -9 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ g) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) Mostre uma possível forma canônica de Jordan de uma matriz quadrada A, tal que o polinômio característico de A seja $p(\lambda) = (\lambda+1)^4(\lambda-2)^2(\lambda+3)^2$, e o polinômio minimal de A seja $p_m(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda+3)^2$.

Teorema (Cayley-Hamilton) Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ e $p(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$ o polinômio característico de A. Então $p(A) = 0$.

Como consequência desse teorema, temos que uma função analítica de matrizes f dada por $f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$ pode ser expressa por $f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i A^i$.

3) Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, calcule e^{tA} para:

a) $A = \begin{bmatrix} 12 & -14 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -8 & -25 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 10 & -7 & 10 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3w^2 & 0 & 0 & 2w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2w & 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde $w \neq 0$

4) Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, calcule A^{-1} para:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} -8 & -6 & 0 & 9 \\ -6 & -5 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & -6 \\ -6 & -6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

5) Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, calcule A^m para:

a) $A = \begin{bmatrix} -7 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $m = 7$

b) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $m = 10$ e $m = 33$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $m = 20$ e $m = 51$