MAP2310 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2012 - Prof. Nelson Kuhl

$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Exercício 1 Obtenha a solução da equação diferencial ordinária $x' = f(t,x)$ onde f é dada por:

$$\text{a) } \frac{1+x}{1+t}, \quad \text{b) } \frac{1+x^2}{1+t^2}, \quad \text{c) } (1+t)(1+x),$$
$$\text{d) } 2tx + t, \quad \text{e) } \mathrm{tg}(t)x + \cos(t).$$

Exercício 2 Para as equações anteriores, determine a solução do problema de valor inicial com $x(0) = 1$ e também o domínio de definição da solução.

Exercício 3 *Equações homogêneas*

a) Equações para as quais $f(t,x)$ é da forma

$$f(t,x) = g\left(\frac{x}{t}\right), \quad t \neq 0$$

são chamadas homogêneas. Prove que a mudança de variáveis $x = yt$ transforma equações homogêneas em equações separáveis.

b) Resolva a equação

$$x' = \frac{x+t}{t}, \quad x(1) = 0.$$

Exercício 4 *Equação de Bernoulli.* A equação

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)x^n$$

onde p e q são funções contínuas em um intervalo (a,b) e n é inteiro, é conhecida como equação de Bernoulli.

a) Se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, mostre que a mudança de variável dependente $y = x^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli em uma equação linear (nos casos $n = 0$ e $n = 1$ a equação já é linear).

b) Resolva os problemas de valor inicial

$$x' = -\frac{1}{t}x + \cos(t)x^{-2}, \quad x(1) = 1,$$
$$x' = -t^2x + \frac{1}{t^2}x^4, \quad x(-1) = -2.$$

Exercício 5 *Equação de Riccati.* A equação do tipo

$$x' = r(t)x^2 + a(t)x + b(t) \tag{1}$$

chama-se equação de Riccati. Mostre que se φ_1 é uma solução de (1) então $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ é solução de (1) se e somente se φ_2 é uma solução da equação de Bernoulli

$$y' = (a(t) + 2r(t)\varphi_1(t))y + r(t)y^2.$$

Ache as soluções de

$$x' = \frac{x}{t} + t^3x^2 - t^5$$

sabendo que esta equação admite $\varphi_1(t) = t$ como solução.

Exercício 6 Suponha que $\{x_n\}$, $n \geq 0$, é uma seqüência de números não negativos satisfazendo a desigualdade

$$x_{n+1} \leq (1 + A)x_n + B, \quad n \geq 0$$

onde A e B são constantes positivas. Prove que

$$x_n \leq (1 + A)^n x_0 + \frac{(1 + A)^n - 1}{A} B, \quad n \geq 1.$$

Exercício 7 O problema de valor inicial

$$x' = -2x + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4, \quad x(0) = \frac{1}{8}$$

tem a solução exata (verifique!)

$$\varphi(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{12}t^4.$$

Use o método de Euler com passos $h = 2^{-p}$, $p = 1, 2, \ldots, 8$ para aproximar $\varphi(1)$. Verifique que não apenas $\lim_{h\to 0} \frac{e(1,h)}{h}$ existe, mas também $\lim_{h\to 0} \frac{e(1,h)}{h^2}$ parece existir. Isto contradiz a teoria?

Exercício 8 O método de Heun para equação $x' = f(t, x)$ é dado por

$$\eta_{j+1} = \eta_j + h\Phi(t_j, \eta_j, h)$$

onde

$$\Phi(t, x, h) = \frac{1}{2}\left[f(t, x) + f(t + h, x + hf(t, x))\right].$$

a) Prove que o método tem ordem de consistência 2.

b) Mostre que se f é Lipschitziana, então Φ também é. Obtenha a constante de Lipscitz para Φ em termos da constante de f.

c) Verifique numericamente a ordem de convergência do método calculando aproximações para a solução do problema $x' = -2tx^2$, $x(0) = 1$ no intervalo $[0, 1]$ usando $h = 0.1$, 0.05 e 0.025, comparando os erros entre a solução exata e as aproximações nas respectivas malhas.