

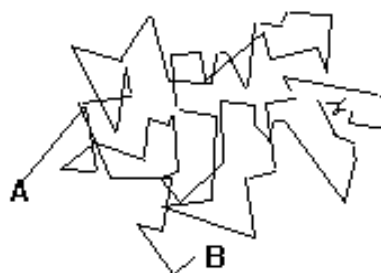
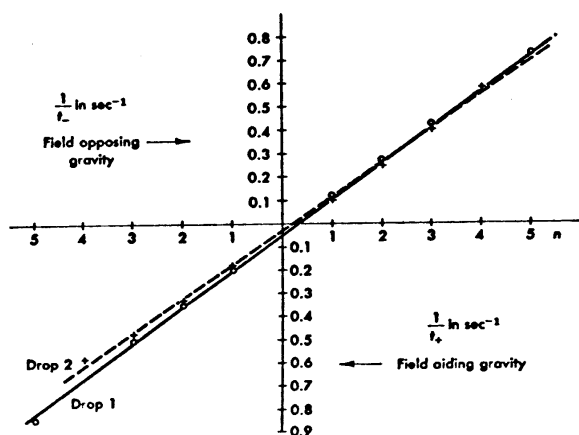
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



Instituto de Física

Física Experimental 5 - 4300313

Experimentos de Millikan e movimento browniano



Esta apostila cobre dois experimentos que, embora distintos, estão profundamente relacionados: o experimento de Millikan e o experimento de movimento browniano. Além de dividirem o mesmo equipamentos e método de análise, eles oferecem um aspecto da Física Experimental que é encontrado em muitos casos: a fonte de erro de uma medida pode conter informações relevantes ao processo de medida. No caso, o movimento browniano é uma das fontes principais de incerteza aleatória e a determinação de quanto afeta a medida da posição permite estimar a constante de Avogadro.

O texto está baseado em apostilas destes experimentos dos anos anteriores a 2014, atualizado para os equipamentos agora disponíveis.

1 - EXPERIÊNCIA DE MILLIKAN

Objetivos:

- Verificar a natureza discreta da carga elétrica;
- Determinar a carga do elétron;
- Analisar o método de medida;
- Identificar os fatores experimentais que interferem na experiência.

Material Disponível:

- Suporte tripé com condensador de placas paralelas e fonte de luz;
- Fonte de tensão contínua com chave inversora de polaridade;
- Câmera de vídeo para registrar o movimento da gotícula;
- Voltímetro;
- Paquímetro;
- Nebulizador com óleo;
- Nível de bolha;
- Escala graduada para calibração da escala na ocular.

Introdução:

Devido à importância histórica desse experimento, é de interesse para o aluno ler com atenção a descrição circunstanciada dos fatos [1] e das personalidades envolvidas. A verificação experimental da natureza quântica da carga elétrica, bem como a determinação do seu valor mínimo, é de realização conceitualmente simples. Quando efetuada pela primeira vez, em 1910, por Fletcher e Millikan, causou um impacto sobre os conceitos até então vigentes em física atômica a ponto de render a Millikan o prêmio Nobel [2]. Logo a seguir, foram publicados mais quatro trabalhos discutindo diversos aspectos sobre a mesma série de experimentos [3-6]. Para um estudo dos fundamentos teóricos dessa experiência, o aluno deverá selecionar textos da literatura, entre os quais citamos algumas referências [7-10]. Algumas discussões e relatos de experimentos específicos, ainda relacionados com o mesmo assunto, foram publicados em artigos mais recentes [11-15] mostrando que sempre é possível desenvolver aspectos ainda inexplorados em uma questão qualquer. A criatividade não tem limites.

A experiência consiste em determinar a carga elétrica de uma gota de óleo eletrizada, medindo seu movimento de descida e de subida entre as placas de um condensador posicionado

horizontalmente. Em primeiro lugar, vamos desenvolver um método para determinar o raio da gota a partir de medidas das velocidades de descida v_d e de subida v_s para percorrer uma trajetória vertical delimitada pelo campo de visão da câmera de vídeo. A dimensão vertical do campo da câmera é de cerca de 1mm. Deve-se utilizar um mesmo potencial, tanto para a descida como para a subida da gota, cujo valor seja tal que os tempos para varrer a tela sejam da ordem de 10 segundos. Fica a cargo do estudante fazer um esboço de todas as forças envolvidas (supondo que a gota se movimenta em equilíbrio dinâmico) e escrever a equação do movimento. A partir das equações de movimento e utilizando a correção no coeficiente de viscosidade do ar (vide Apêndice B), pode-se mostrar que o raio da gota é dado pela relação:

$$a = -\frac{b}{2p} + \sqrt{\frac{b^2}{4p^2} + \frac{9\eta_0(v_d - v_s)}{4g(\rho - \rho_{ar})}} \quad (1)$$

onde:

- a = raio da gota;
- b = constante = $6,17 \times 10^{-4}$ (cm de Hg).cm;
- p = pressão atmosférica;
- η = coeficiente de viscosidade à temperatura ambiente (vide Apêndice B);
- ρ = densidade do óleo;
- ρ_{ar} = densidade do ar;
- g = aceleração da gravidade;
- v_d = velocidade da descida da gota;
- v_s = velocidade da subida da gota.

A carga elétrica da gota é dada pela expressão:

$$q = \frac{3\pi\eta ad}{V}(v_s + v_d) \quad (2)$$

onde:

- V = potencial aplicado às placas do condensador;
- d = distância entre as placas do condensador; e:
- $\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{b}{pa}\right)^{-1}$ é a viscosidade corrigida (vide apêndice B, eq.(B.1))

As velocidades v_d e v_s devem ser obtidas a partir da filmagem de dez subidas e descidas com campo, calculando-se em seguida o valor médio $\langle v \rangle$ e o desvio padrão da média $\sigma_{\langle v \rangle}$. Não confundir $\sigma_{\langle v \rangle}$ com o desvio padrão das velocidades (σ_v)!

A velocidade de queda livre v_q (campo nulo) pode ser comparada com a metade da diferença das velocidades com campo, o que permite de verificar a consistência das medidas:

$$v_q = \frac{1}{2}(v_d - v_s)$$

Nas expressões acima, as velocidade v_d , v_s e v_q são tratadas em módulo.

Procedimento Experimental:

O movimento das gotas de óleo será observado para se medir as velocidades de descida e de subida entre as placas de um condensador (com campo elétrico produzido por uma diferença de potencial V). As gotículas são iluminadas por um feixe de luz e observadas através de um microscópio posicionado na horizontal. No lugar de uma ocular há uma câmera de vídeo, ligada a um microcomputador para capturar o movimento. O condensador está adaptado a um tripé em conjunto com o microscópio e uma fonte de luz como mostra a figura abaixo.



Fotografia do aparato. À esquerda, câmera de vídeo acoplada ao microscópio. No centro, capacitor de placas paralelas. À direita, fonte de luz.

As expressões (1) e (2) contém os parâmetros a serem medidos para calcular a carga q .

Partículas que se movimentam em meio líquido ou gasoso estão sempre sofrendo choques de moléculas do meio. Devido à existência de flutuações na densidade do fluido, as partículas pequenas ($a \approx 10^{-5}$ cm) ficam sujeitas a um movimento aleatório que acarreta uma incerteza na sua posição. Este efeito, que é uma consequência da natureza atômica da matéria, é o chamado movimento browniano e é objeto da segunda parte deste experimento. A equação (5) adiante mostra que o quadrado da incerteza na posição da partícula é proporcional ao tempo de observação e inversamente proporcional ao raio a :

$$\langle \Delta x^2 \rangle \propto \frac{\Delta t}{a} \quad (3)$$

onde:

Δx = deslocamento da partícula devido ao movimento browniano ou desvio na posição da partícula;

Δt = tempo de observação; e:

$\langle \Delta x^2 \rangle$ = desvio quadrático médio da posição x .

No caso do arranjo, o tempo de observação é o intervalo entre cada quadro filmado.

Podemos afirmar, então, que a incerteza da posição prevista da gota é tão maior quanto maior for o tempo t de descida ou de subida ou quanto menor for o seu raio a . Por outro lado, segundo o artigo, se $t \leq 5s$, o erro introduzido nas medidas de tempo, devido à variação do tempo de reflexo do operador, passará a predominar nos resultados. No caso do arranjo, este fator não existe pois não há este tempo de reflexo. No entanto, uma taxa muito elevada de quadros significa um tempo curto entre medida de posição e portanto muitos valores iguais: não se vê a gota se deslocar e é preciso ter uma taxa baixa de filmagem. Recomenda-se algo da ordem de 1 a 4 quadros por segundo. Uma taxa alta também implica em arquivos enormes de difícil manuseio e armazenagem. Durante a fase de ajuste, a câmera pode e deve ser operada em taxa mais alta, 20 a 30 quadros/s, pois a imagem “flue” mais suavemente com resposta mais rápida aos ajustes.

Em um artigo mais recente [11], a análise deste problema levou à representação gráfica de $\sigma_q/q \times t$ que passa por um mínimo para $t \approx 10s$. É conveniente, então, a escolha do potencial V tal que $5s \leq (t_s \text{ e } t_d) \leq 30s$ para que se obtenha $\sigma_q/q \leq 0,10$ (na melhor das hipóteses, espera-se obter $\sigma_q/q = 0,05$).

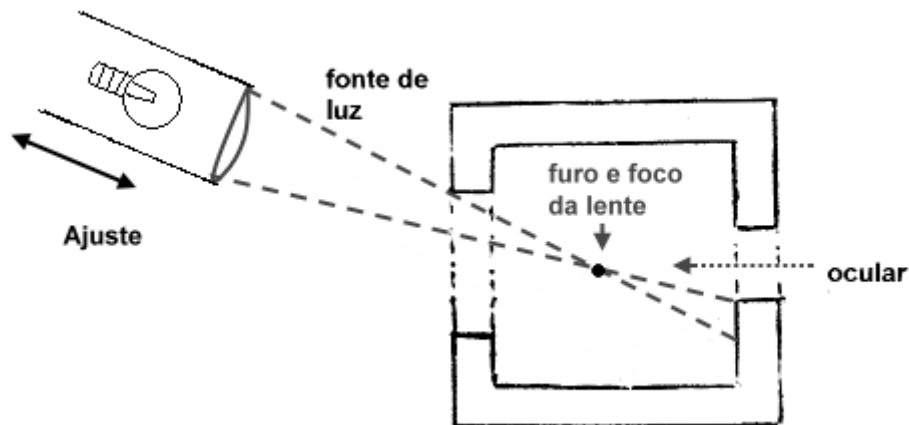
O condensador contém, na placa superior, orifícios por onde devem entrar as gotículas de óleo. Ele deve ser bem limpo e os orifícios desimpedidos. Se você tiver dificuldade em observar a gota, evite nebulizar em excesso, pois só irá contribuir para obstruir os orifícios. Ao lidar com o nebulizador, observe atentamente o processo que se desenvolve em seu interior e procure explicar o princípio de seu funcionamento, é muito interessante.

Certifique-se de que as placas do condensador estão bem niveladas. Ao determinar a distância entre as placas lembre-se de efetuar várias medidas em lugares diferentes. As direções de iluminação e de observação através do microscópio devem ser ajustadas de modo a conseguir a visualização de uma nuvem de gotículas quando se aciona o nebulizador. Estas direções são bastante críticas e importantes para a realização de medidas. A operação de ajustar a iluminação, na qual se deve adquirir um certo treino, é a primeira que deve ser feita. Note que o condensador é fechado lateralmente e possui duas janelas opostas de tamanhos diferentes que permitirão a observação e a entrada de luz. A situação correta de montagem está esquematizada abaixo. Para se obter o posicionamento inicial do foco do microscópio coloca-se, através de um dos orifícios do condensador, um fio de cobre que deverá ser iluminado e observado com a câmera.

A fonte de luz tem 3 ajustes para a otimização da iluminação. A haste permite um deslocamento vertical. Com ele, certifique-se que a parte mais intensa do feixe ilumine a parte interna, entre as placas do capacitor. A fonte de luz pode também girar em torno desta haste e esta em torno do eixo do capacitor, ajustes que permitem maximizar o brilho do fio e o contraste. Deve-se evitar que o feixe incida diretamente na câmera ou que a luz reflita nas bordas internas do capacitor e ilumine a câmera. Uma situação de iluminação favorável à posterior observação das gotículas é aquela em que o fio aparece com contorno bem brilhante (maximize o brilho) num fundo acinzentado. Quanto maior o contraste, melhor. Conseguida essa situação, experimente injetar as gotas e refinar o ajuste. Não se esqueça de retirar o fio antes de ligar o circuito.

O conjunto microscópio e câmera tem os mesmos ajustes de altura e ângulos que a fonte de luz. A altura e rotação do suporte devem ser ajustados de forma que a câmara veja o centro do capacitor, equidistante das faces, com o eixo ótico perpendicular à face do capacitor. A câmera

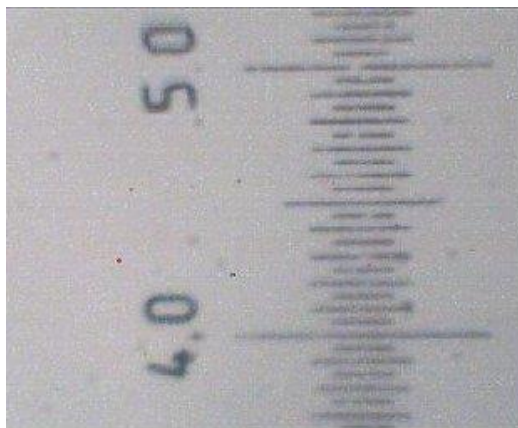
deve ser rodada em torno do eixo ótico de forma que as gotas pareçam cair verticalmente, de preferência de cima para baixo.



A diferença de potencial no condensador será medida por um voltímetro ligado convenientemente à saída da fonte de tensão. A fonte possui uma chave inversora que permite alterar a polaridade das placas sem alterar o módulo da diferença de potencial. Uma terceira posição da chave, a do meio corresponde à interrupção do fornecimento de tensão às placas, ao mesmo tempo em que são ligadas em curto-circuito para que não permaneça qualquer carga residual, o que poderia falsear as medidas efetuadas durante a queda livre da gota.

O valor da diferença de potencial pode ser fixo em um valor localizado entre 100 e 300 V escolhido de tal modo que $5s < t_s, t_d < 30s$. Estabeleça uma diferença de potencial no condensador e observe o movimento das gotículas. A maior parte delas, eletrizadas pelo atrito do óleo com o vidro do nebulizador, tem carga negativa.

A calibração da escala da ocular é feita por comparação com uma escala padrão que se coloca sobre o pedestal no lugar do condensador, quando TODAS as filmagens terminarem. O foco do microscópio não deve ser alterado. A escala padrão deve ser deslocada de forma a estar no foco para garantir que ela está exatamente onde as gotas foram filmadas. Observe essa escala através do microscópio e filme alguns quadros, no mesmo modo das filmagens das gotas. Uma imagem bem clara pode ser obtida colocando uma folha de papel sulfite branco entre a fonte de luz e o condensador, com o feixe de luz alinhado com o eixo ótico do microscópio. A imagem aparece em preto sobre fundo branco. Faça um gráfico representando os valores da posição dos traços da escala nas abscissas e os da escala padrão nas ordenadas. Você espera obter uma reta nesse gráfico? Por quê?



Escala para calibração. Cada divisão numerada corresponde a 1mm, menor divisão 50 μ m

A medida da temperatura será lida em um termômetro localizado na sala de aula. Esse procedimento poderá introduzir erros nos parâmetros que dependem da temperatura. Lembre-se de que as gotículas são fortemente iluminadas e de que a absorção da luz no interior do condensador certamente irá acarretar um aquecimento (efeito estufa). Procure, de algum modo, minimizar esse problema. Anote também a pressão atmosférica, necessária para a correção da viscosidade do ar e o cálculo do raio da gota.

Análise do procedimento e escolha da gota:

Em primeiro lugar, convém exercitar a viabilidade de se determinar com presteza os valores aproximados do raio a e da carga q da gota. A partir da expressão (1), com $v_c = l_c / t_c$ onde v_c , l_c e t_c são, respectivamente, a velocidade, o percurso e o tempo de queda livre ($V = 0$) (fazendo-se $l_c = 1\text{mm}$, aproximadamente a tela inteira, por exemplo) pode-se construir um gráfico de $a \times t_c$ em papel di-log, ou então aproveitar o Gráfico 1 do Apêndice A. Em geral como é mais provável encontrar as menores cargas nas menores gotas, o valor de t_c poderá ser muito maior do que 30s para $l_c = 1\text{ mm}$. É recomendável, então, escolher um valor conveniente de l_c para evitar tempos de queda longos demais. A velocidade terminal é atingida em cerca de 10^{-6}s , pelo que a consideramos constante, bastando usar uma regra de três simples antes de usar o gráfico.

O gráfico 2 do Apêndice A foi construído a partir da expressão (2) com a suposição de que a carga total da gota é um múltiplo do valor da carga elementar. A partir do conhecimento dos tempos de subida e de queda da tensão aplicada entre as placas pode-se estimar o número de cargas elementares contidas na gota. Os gráficos 1 e 2 devem ser considerados apenas como auxiliares para a seleção da gota. Os valores de a e q deverão ser posteriormente calculados, utilizando todos os parâmetros, cuidadosamente determinados e com os respectivos erros avaliados. As condições de pressão e temperatura deverão ser medidas no início e no final da experiência.

Escolha uma gota com carga abaixo de 6 a 10 cargas elementares, de forma a poder observar a quantização das cargas.

A densidade ρ do óleo já foi previamente determinada e o seu valor está afixado em um lugar visível da sala. Os valores da densidade do ar em função da temperatura também estão afixados. A correção para o coeficiente de viscosidade η e o gráfico de η_0 (em unidades cgs, onde a

unidade chama-se *poise*) em função da temperatura aparecem no Apêndice B. Como estamos trabalhando no sistema cgs, convém lembrar que $1 \text{ volt} = 1/300 \text{ statvolt}$.

Discuta com o seu professor sobre os efeitos de fatores secundários que podem introduzir erros sistemáticos nas medidas e procure a melhor forma de controlá-los.

Sequência para medidas:

Escolhida uma gota, siga os seguintes passos:

- Inicie a filmagem
- Leve a gota até a parte superior da tela
- Corte o campo elétrico e registre a queda livre até a parte inferior da tela
- Aplique o campo para que a gota suba
- Inverta o campo para que a gota desca sob efeito da gravidade e do campo
- Repita estes últimos passos uma dezena de vezes
- Termine com a filmagem de mais uma queda livre
- Pare a filmagem e salve o arquivo

Isto deve ser repetido para 15 a 30 gotas. É possível que um filme permite observar mais de uma gota.

Conselho: divida a tela em 4 partes na vertical e faça a filmagem da subida e queda entre os dois quartos do centro. Isto aumenta a probabilidade de filmar outra gota ao mesmo tempo e evita que a gota de interesse desapareça nas bordas da tela, invalidando a medida. Isto acontece facilmente na queda com campo, que pode ser muito rápida.

Análise dos filmes:

Os filmes feitos correspondem a uma série de fôtos da(s) gota(s) feitas em intervalos constantes de tempo. Para que seja possível extrair valores é necessário digitalizar a posição da gota em cada quadro, de forma a obter uma tabela de posição em função do tempo. Supondo que a velocidade seja constante, o gráfico da posição em função do quadro (tempo) deve assemelhar-se a um dente de serra, segmentos de reta cujos coeficientes angulares são as velocidades de queda livre (primeira e última série), subida com campo e descida com campo.

Para a digitalização há duas opções: o programa VideoPoint, que pode ser copiado dos micros da sala de laboratório (licenciado para uso no IF) e roda no Windows (ou emulador Windows no Linux) ou o programa tracker (<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>). Os programas agem basicamente da mesma forma, abrem o arquivo de vídeo e o usuário clica onde acha que está centrada a gota. A posição do mouse na hora do click é registrada em pixel da imagem, junto com o número do quadro ou tempo e o programa passa para o próximo quadro. A sequência de pares é salva num arquivo que pode ser aberto como planilha (excel, oocalc, origin). A partir deste ponto cada um procede da forma que prefere, ajustando segmentos de retas para obter o coeficiente angular (o linear não tem relevância física). O tracker tem o recurso de automaticamente seguir a gota e achar a posição em cada quadro enquanto ele não se perder por causa de outra gota nas vizinhanças.

O ajuste dos segmentos de reta por mínimos quadrados permite obter uma estimativa da incerteza efetiva das medidas. As duas fontes principais de incerteza de natureza aleatória são o

movimento browniano e o click do operador digitalizador. Supondo que estes erros sejam gaussianos e de variancia constante para cada filme, pode-se obter uma estimativa para o desvio padrão S da posição a partir da expressão:

$$S^2 = \frac{\sum (y_i - y(t_i))^2}{N - 2} \quad (4)$$

onde y_i é a posição medida e $y(t_i)$ é o valor ajustado (reta). A equação (4) tem como origem que o χ^2 esperado é igual ao número de graus de liberdade, no caso $N-2$, onde N é o número de pontos da reta. Esta incerteza deve ser utilizada na propagação para o cálculo final da incerteza da carga

O mesmo procedimento deve ser utilizado com o filme da escala padrão, marcando cada traço de escala para posteriormente fazer um gráfico de posição em mm em função do pixel vertical (ou horizontal no caso do movimento browniano). O coeficiente angular define o fator de conversão de pixel para mm a ser utilizado para transformar as velocidades de pixel por quadro (ou segundo) para mm por quadro (ou segundo).

OBSERVAÇÃO: antes de se lançar na filmagem, faça um video curto e veja se consegue abrir com o programa escolhido e se o filme tem um tamanho razoável. Uma gota com 10 ciclos de subida/descida pode levar a uma filmagem de 5 a 10 minutos. O tipo de compressão e o formato do video também afetam o tamanho do arquivo e a resolução. As opções dependem do modelo da câmera em uso e os programas citados não abrem todos os formatos!

A partir da média das velocidades de subida e descida passa-se ao cálculo da carga da gota. A velocidade de queda livre permite certificar-se de que a gota filmada é a mesma do inicio ao fim (pouca evaporação). Permite também obter um valor para o raio que pode ser comparado com o obtido a partir das medidas com campo, equação (1).

Verificação da natureza discreta da carga elétrica:

Para se obter a carga do elétron é preciso, antes de mais nada, acreditar na sua existência. Convém, portanto, mostrar que a carga q da gota é um múltiplo inteiro de uma carga elementar e , cujo valor pretendemos medir. Essa verificação só é possível através da análise estatística de um número suficientemente grande de dados experimentais. Faça um histograma da frequência de valores de q nos intervalos dos valores de carga convenientemente espaçados no eixo das abscissas, utilizando o total de dados levantados pela sua classe. Cada grupo deve tentar obter o máximo número de valores de cargas tais que $q_{max}/q_{min} < 10$. Faça uma análise desse histograma concluindo se foi possível ou não provar a quantização da carga.

Determinação da carga do elétron:

Escolha os valores de uma das gotas estudadas pelo seu grupo (de preferência, com o mínimo número de elétrons). Calcule o valor de q baseado nas expressões (1) e (2) e calcule σ_q usando a teoria da propagação de erros. Apresente um desses cálculos explicitamente no seu relatório. Compare este resultado com o valor de e do elétron obtido a partir da média dos resultados de todas as cargas $e = q/n$ medidas pelo seu grupo e determine o respectivo desvio padrão. Observe que para as cargas maiores fica cada vez mais difícil definir com segurança o número de elétrons. Compare também esses resultados com o valor de e hoje aceito.

2 - ESTUDO DO MOVIMENTO BROWNIANO

Objetivos:

- Observar o movimento browniano de gotículas de óleo no ar;
- Medir o deslocamento devido ao movimento browniano;
- Obter o número de Avogadro a partir da dispersão do deslocamento;

Material Disponível:

- O mesmo do experimento de Millikan.

Introdução

O movimento Browniano já deve ter sido observado na experiência de Millikan: algumas gotas tinham movimento caótico, sem direção preferencial, que chegava a perturbar a medida dos tempos de percurso. A causa deste movimento está relacionada com a natureza discreta do gás atmosférico. O ar não é um fluido uniforme, mas é formado de moléculas. A gota está sujeita a choques com as moléculas em todas as direções. Se a gota for suficientemente pequena, o número de choques num dado intervalo de tempo, num dado sentido, pode não ser exatamente compensado pelo número de choques no sentido oposto, daí o deslocamento.

A frequência com que ocorrem as colisões, ou as distâncias percorridas entre colisões sucessivas estão relacionadas também com as características físicas do meio, que dão conta do movimento térmico das moléculas que o compõem. Consulte as referências bibliográficas (ref. [18] a [23]).

A teoria cinética dos gases também prevê uma distribuição de energia das moléculas; a energia média é proporcional ao produto kT (equipartição de energia). Assim, a energia cinética das moléculas aumenta com a temperatura e aumenta também a energia transferida num choque.

O movimento caótico da gotinha de óleo no ar está relacionado com a agitação das moléculas do ar e com o número de moléculas por unidade de volume. A medida do deslocamento médio da gotinha permite calcular o número de Avogadro. Para uma análise estatística, consulte o apêndice C e as referências [20], [25] e [26].

Experiência

O instrumental é o mesmo que foi utilizado para a experiência de Millikan. Uma gotinha de óleo de tamanho conveniente é equilibrada entre as placas do condensador e são observados seus movimentos numa dada direção. Os ajustes do aparelho e da iluminação devem ser feitos da maneira já conhecida.

A análise quantitativa do movimento da gotinha permite calcular o número de Avogadro através da expressão:

$$N_A = \frac{RTt}{3\pi\eta a \langle x^2 \rangle} \quad (5)$$

Onde R é a constante dos gases perfeitos ($R=8.37 \times 10^7$ erg/mol K), T a temperatura absoluta do sistema (K), η o coeficiente de viscosidade do ar (eq. B.1), a o raio da gota (eq. (1)), t o

intervalo de tempo em que são observados os deslocamentos e $\langle x^2 \rangle$ o deslocamento quadrático médio (veja por exemplo as referências [18] a [23]).

As questões a seguir devem ser usadas como orientação para a realização da experiência:

- Qual a melhor direção a ser escolhida para observação do movimento browniano (vertical ou horizontal)?
- Levando em conta o processo que produz esse movimento, faça uma estimativa do tamanho da gota escolhida.
- Reportando-se à experiência de Millikan, qual a grandeza mensurável que pode fornecer o raio da gotinha? (veja apêndice A para estimativa inicial do raio da gota). Procure uma gotinha de modo que seu raio possa ser determinado com erro da ordem de 5%.

Sequência para medidas:

Após nivelar preparar o sistema como no experimento de Millikan (nivelar, focalizar, etc...) escolha uma gota que pareça adequada a partir do seu tempo de queda.

- Ajuste a tensão de forma a conseguir manter a gota equilibrada no centro da tela sem que ela caia.
- Anote a tensão
- Inicie a filmagem com a taxa de 1 quadro/s. *Os programas sugeridos permitem digitalizar um quadro a cada n quadros, o que permite variar o intervalo de deslocamento sobre o mesmo conjunto de dados.*
- Aumente a tensão e leve a gota até a parte superior da tela
- Corte o campo elétrico e registre a queda livre até a parte inferior da tela
- Aplique o campo para que a gota suba
- Repita estes 2 últimos passos algumas vezes
- Traga a gota no centro e volte à tensão de equilíbrio anotada.
- Continue filmando por pelo menos 20 a 30 minutos, enquanto a gota estiver visível. Se ela escapar antes de 20 minutos, pare o filme e busque outra gota para repetir o procedimento
- Pare a filmagem e salve o arquivo

Análise:

- Seu filme tem duas partes distintas: o início com registro de queda livre e o resto, com o deslocamento com a gota equilibrada.
- Digitalize as quedas livres e obtenha a velocidade de queda livre. A partir destas, obtenha o raio da gota.
- Como dito acima os programas permitem a digitalização pulando quadros. Além desta opção, é possível digitalizar a posição da gota em todos os quadros do filme e posteriormente, na planilha, calcular as distâncias percorridas a partir das diferenças das posições.
- Por um processo ou outro, utilizando a parte da gota em equilíbrio, obtenha pelos menos 200 deslocamentos para intervalos de 10s, 20s e 30s e construa histogramas destes. Obtenha σ^2 ou $\langle x^2 \rangle$ para os três histogramas, usando os métodos descritos no apêndice C.

- O número de Avogadro N_A deve ser calculado usando σ^2 ou $\langle x^2 \rangle$? Justifique sua resposta.
- Calcule o número de Avogadro N_A e analise a necessidade de correção para o coeficiente de viscosidade. Ver apêndice B para obter a viscosidade.
- Calcule o erro associado à determinação de N_A e discuta a influência dos fatores significativos.
- Faça uma introdução ao trabalho baseada na bibliografia citada e no desenvolvimento da parte experimental realizada. Procure justificar o método utilizado e o cálculo do número de Avogadro.

Dependendo do tempo disponível, pode-se filmar diversas gotas e obter mais de um valor para N_A . Uma análise interessante que pode ser feita é utilizar o desvio padrão associado ao movimento browniano junto com o obtido no experimento de Millikan (eq. (4)) para estimar a incerteza associada à digitalização da posição da gota.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. Fletcher, "My work with Millikan on the oil-drop experiment", *Physics Today*, June 1982, p. 43 (publicação póstuma).
- [2] R.A. Millikan, "The isolation of an ion, a precision measurement of its charge, and the correction of Stoke's Law", *Science*, 30, September 1910.
- [3] R.A. Millikan & H. Fletcher, "Causes of apparent discrepancies and recent work on the elementary electrical charge", *Phys. Z.*, January 1911.
- [4] H. Fletcher, "Some contributions to the theory of Brownian movements, with experimental applications", *Phys. Z.*, January 1911.
- [5] R.A. Millikan & H. Fletcher, "The question of valency in gaseous ionization", *Phil. Mag.*, June 1911.
- [6] H. Fletcher, "A verification of the theory of Brownian movements and a direct determination of the value for gaseous ionization", *Phys. Rev.*, August 1911, and *Le radium*, 1 July 1911.
- [7] Melissinos, "Experiments in Modern Physics".
- [8] Harnwell & Livingood, "Experimental Atomic Physics".
- [9] R.A. Millikan, "Electrons (positive and negative)".
- [10] Enge, Vehr & Richards, "Introduction to Atomic Physics".
- [11] J.I. Kapusta, "Best measuring time for a Millikan oil drop experiment", *American Journal of Physics*, 43 [91], 799 (1975).
- [12] C.N. Wall & F.E. Christensen, "Dual-purpose Millikan experiment with polystyrene spheres", *American Journal of Physics* 43 [51], 408 (1975).
- [13] S. La Rue, J.D. Philips & W.H. Fairbank, "Observation of fractional charge of $(1/3)e$ on matter". *Phys. Rev. Letters* 46 [15], 967 (1981).
- [14] W.H. Fairbank, Jr. & S. Franklin, "Did Millikan observe fractional charges on oil drops?", *American Journal of Physics*, 50 [51], 394 (1982).
- [15] Y.W. Kim & P.D. Fedele, "Evidence for failure of Millikan's law of particle fall in gases". *Phys. Rev. Letters*, 48 [61], 403 (1982).
- [16] Apostila do Laboratório de Estrutura da Matéria e Física Moderna (2º semestre "Movimento Browniano") e referências internas.
- [17] Helene, O.A.H. & Vanin, V.R., "Tratamento estatístico de dados em Física Experimental".
- [18] A. Einstein - Brownian Motion

- [19] Tipler - Foundations of Modern Physics
- [20] Reif - Fundamentals of Statistical and Thermal Physics
- [21] Max Born - Fisica Atomica
- [22] Harnell e Livingood - Experimental Atomic Physics
- [23] Millikan - Electrons + and –
- [24] Evans - The Atomic Nucleus
- [25] Bevington - Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences.
- [26] Squires - Pratical Physics
- [27] Lavenda, B.H. - Brownian Motion - Sci. Amer. p. 56 (fev. 1985)
- [28] Schumacher, R.T. - Am. J. Phys. 54, 137 (1986)
- [29] Feder, J. - Fractals - Plenum Press N.Y. (1988)
- [30] Mandelbrot, B.B. - The Fractal Geometry of Nature, Freeman (1982)
- [31] Voss, R.F. - in: The Science of Fractal Images, ed. Heinz Otto - Peitgen, Springer Verlag (1988)

APÊNDICE A

ESCOLHA DA GOTA

O gráfico abaixo permite obter uma estimativa do raio da gota a partir do tempo de queda livre numa distância de 1mm, o que corresponde a aproximadamente o tamanho do campo de visão vertical do microscópio/câmera. Um bom compromisso é algo em torno de 5×10^{-5} cm

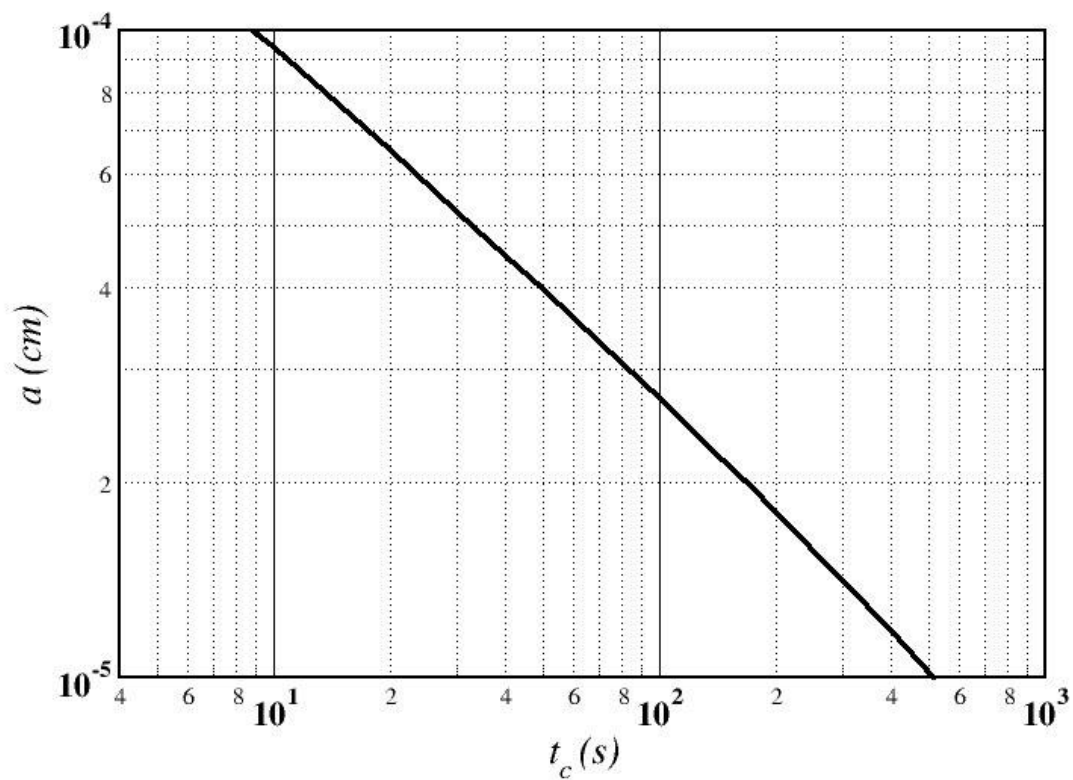


Gráfico 1. Estimativa do raio da gota a em função do tempo de queda livre t_c para um espaço percorrido de $l_c=1\text{mm}$ ($p=70.5$ cm Hg; $T \approx 25^\circ\text{C}$).

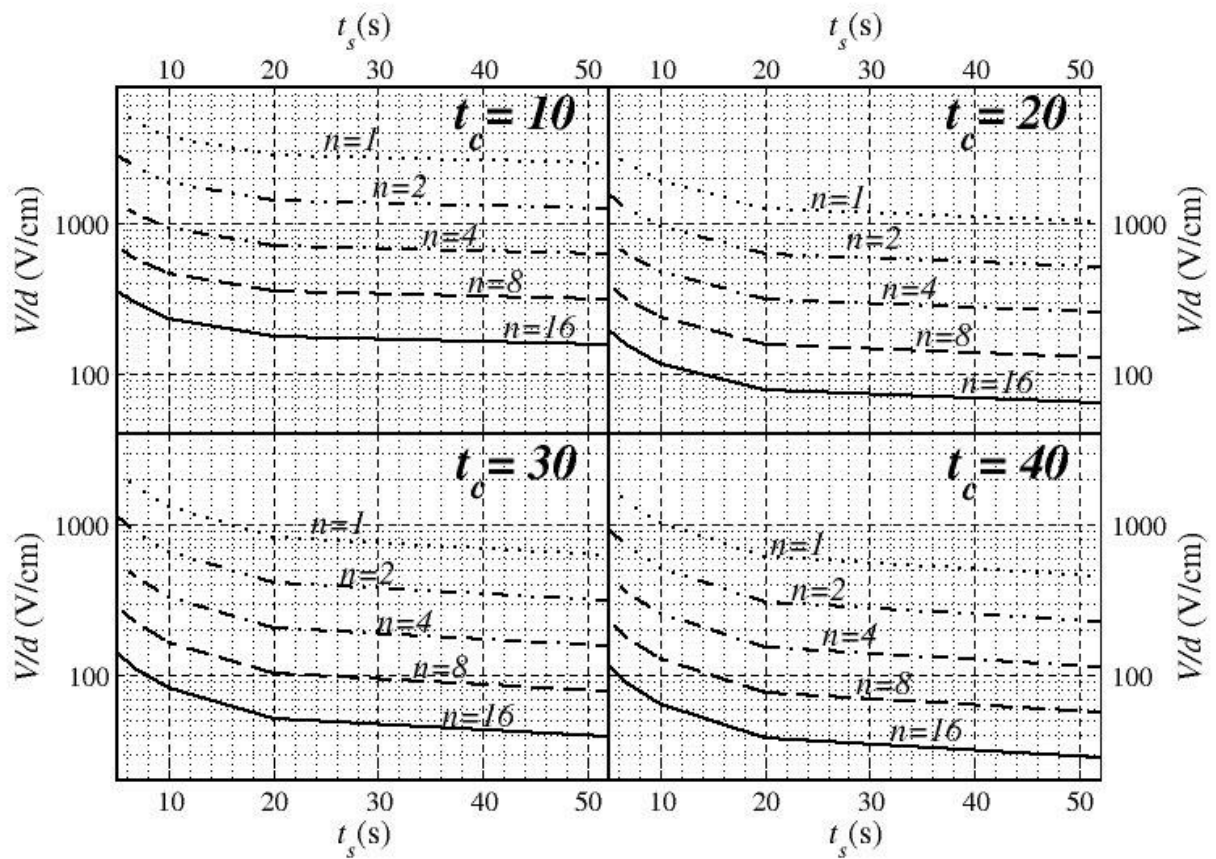


Gráfico 2. Estimativa da tensão aplicada ao condensador dividida pela distância entre as placas: V/d , em função do tempo de subida t_s para diferentes valores de tempo de queda livre t_c e da carga $q=ne$ (nas mesmas condições do Gráfico 1).

APÊNDICE B

CORREÇÃO PARA O VALOR DA VISCOSIDADE DO AR η

Tendo em vista que o diâmetro das gotículas de óleo é comparável com seu caminho livre médio no ar, não se pode desprezar a não homogeneidade do fluido. Desta maneira requer-se efetuar uma correção no coeficiente de viscosidade do ar:

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{b}{pa} \right)^{-1} \quad (\text{B.1})$$

onde:

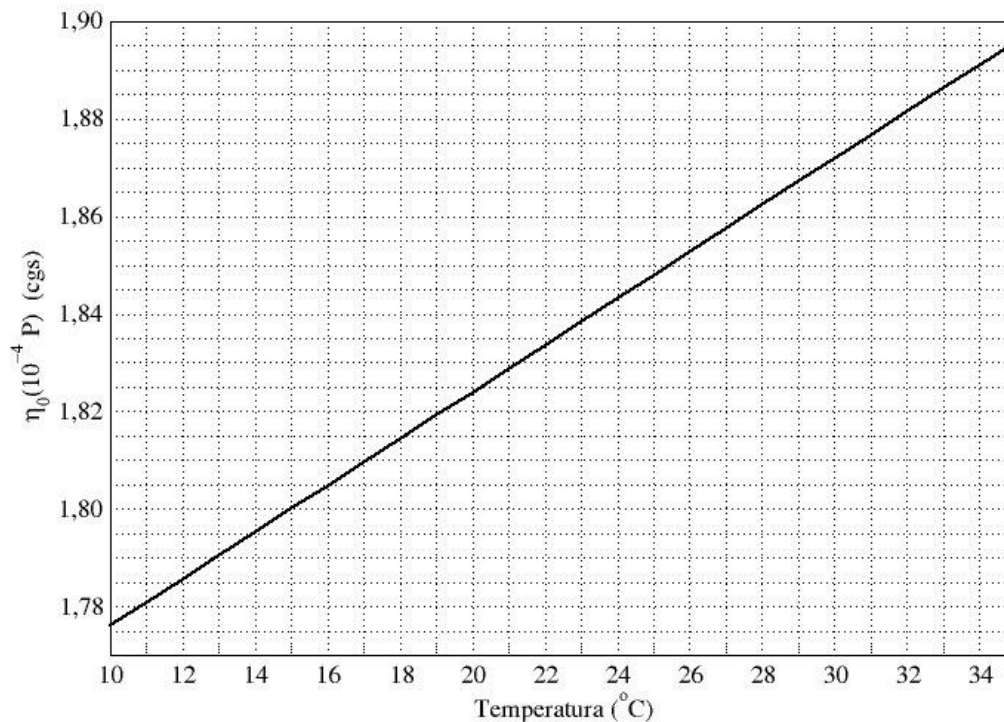
p = pressão atmosférica em cm de Hg.

η_0 = coeficiente de viscosidade à temperatura ambiente.

$b = 6,17 \times 10^{-4}$ (cm de Hg) cm, quando a pressão for medida em cm de Hg.

a = raio da gota corrigido, em cm

Esta correção na viscosidade implica em correção no raio da gota a ser utilizado para determinação da carga q . Os valores de η_0 em função da temperatura estão representados no gráfico abaixo.



APÊNDICE C

DETERMINAÇÃO DE $\langle x^2 \rangle$ PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.

Os métodos descritos abaixo não se restringem à experiência de movimento browniano, mas podem ser aplicados em geral, para ajuste de uma função arbitrária de n parâmetros.

Como foi visto acima, o número de Avogadro, cuja obtenção é um dos objetivos desta experiência, pode ser expresso como:

$$N_A = \frac{RTt}{3\pi\eta a \langle x^2 \rangle} \quad (\text{C.1})$$

Vamos tratar da avaliação de $\langle x^2 \rangle$: $\langle x^2 \rangle$ ou o desvio quadrático médio, pode ser calculado diretamente da flutuação dos deslocamentos. De fato, lembrando a definição de variância (para $N \gg 1$):

$$\sigma_f^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (\text{C.2})$$

e lembrando que a média $\langle x \rangle$ é nula (não há direção preferencial para o movimento), temos $\langle x^2 \rangle = \sigma_f^2$, calculado diretamente dos dados.

Esta é uma primeira estimativa e deve ser encarada como tal. Deve-se tratar o problema de um modo mais complexo, mas que pode ser generalizado para avaliação de parâmetros de uma curva qualquer. Os deslocamentos se distribuem de acordo com uma gaussiana de média zero e variância $\langle x^2 \rangle = \sigma_f^2$. A gaussiana normalizada é dada pela expressão:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{C.3})$$

O histograma dos deslocamentos tem Δ como passo utilizado no eixo x dos deslocamentos, y_i é o número de vezes que um deslocamento x_i é observado e N é o número total de medidas ($N = \sum y_i$). Supondo uma distribuição gaussiana para os deslocamentos e sabendo que a área sob o histograma experimental é $N\Delta$, o histograma experimental deve ser comparado com a gaussiana $f(x)$ dada por:

$$f(x_i) = \frac{N\Delta}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{C.4})$$

O melhor ajuste dará σ , ou seja $\langle x^2 \rangle$. O melhor valor de σ pode ser estimado pelo método dos mínimos quadrados, que consiste em minimizar a expressão:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - f(x_i)}{y_i} \right]^2 \quad (C.5)$$

onde y_i é o número de medidas no canal de histograma centrado em x_i e $f(x_i)$ o valor da gaussiana no canal centrado em i (ver ref. [21]).

Neste caso, poder-se-ia colocar $\frac{\partial \chi^2}{\partial \sigma} = 0$ e resolver a equação em σ , mas esta é não linear e complicada. Este problema pode ser contornado da maneira descrita a seguir.

O uso de y_i no denominador de (C.5) pressupõe que o erro associado ao valor do canal i seja $\sqrt{y_i}$, ou seja, que a contagem no canal y_i se distribui segundo uma curva de Poisson. Esta aproximação é razoável, mas tende a superestimar o erro (a distribuição correta é a binomial).

Processo para minimizar o χ^2 .

O método para minimizar o χ^2 nos casos em que a equação $\frac{\partial \chi^2}{\partial \sigma} = 0$ não pode ser resolvida sem grandes dificuldades é o seguinte:

- calcula-se o χ^2 para vários valores do parâmetro da curva teórica, no caso σ , em torno do valor de uma primeira estimativa (aqui a variância, σ_f).
- faz-se um gráfico dos χ^2 's em função do parâmetro variado σ .
- localiza-se no gráfico o mínimo, e repete-se o procedimento em torno do mínimo, refinando o valor do parâmetro (σ).

Achado este valor (σ_0), deve-se determinar seu erro. Esta tarefa é bem mais complicada.

Processos para avaliar o erro.

São apresentados três métodos usualmente empregados para esta finalidade.

Processo 1: (Especificamente para o caso de curvas que dependem de apenas um parâmetro)

Calcula-se o erro por propagação:

$$\varepsilon_{\sigma}^2 = \sum_i \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y_i} \right]^2 \varepsilon_i^2 = \sum_i \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y_i} \right]^2 y_i$$

já que $\varepsilon_i^2 = y_i$ no nosso caso. A dificuldade deste método, no presente caso, está em avaliar $\frac{\partial \sigma}{\partial y_i}$,

já que não temos σ em função de y_i . Mas a condição de minimização de χ^2 , $\frac{\partial \chi^2}{\partial \sigma} = 0$, pode ser derivada em relação a y_i :

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_i \partial \sigma} = 0$$

Pode-se então separar $\frac{\partial \chi^2}{\partial y_i}$. Mas o cálculo é longo.

Processo 2: (este processo, mais numérico, é mais frequentemente utilizado em programas de computador)

A ref. [25] trata do ajuste por mínimos quadrados de funções lineares ou não nos parâmetros. Demonstra-se que o erro ε_i de um parâmetro a_j é $\varepsilon_j^2 = \alpha_{jj}^{-1}$ onde α_{jj}^{-1} é o elemento diagonal da matriz inversa usada na expressão:

$$\alpha_{jk} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_k}$$

(Veja também a apostila do primeiro bimestre de Lab. Estrutura da Matéria I)

No nosso caso, só ha um parâmetro, σ . Portanto:

$$\alpha_{11} = \sum \frac{1}{y_i} \left[\frac{\partial f(x_i)}{\partial \sigma} \right]^2$$

$$\varepsilon_\sigma^2 = \alpha_{11}^{-1} = \frac{1}{\sum \frac{1}{y_i} \left[\frac{\partial f(x_i)}{\partial \sigma} \right]^2}$$

A derivada $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ é trivial. Este processo que dá valores exatos para uma função linear nos parâmetros, fornece bons valores se calculado na situação em que χ^2 é mínimo em todos os parâmetros.

Processo 3: (estimativa utilizada em situações complicadas)

Quando o cálculo do erro se torna demasiadamente complexo, é comum em física experimental, se usar a seguinte regra (ref. [25]):

- achado o valor mínimo (σ_o) com $\chi^2 = \chi_o^2$, procura-se o valor de σ tal que $\chi^2_\sigma = \chi_o^2 + 1$. Em geral há dois valores, um inferior e um superior. Estes delimitam uma faixa de incerteza e pode-se estimar ε_σ como a metade deste intervalo.

Do mesmo modo que foi possível avaliar $\langle x^2 \rangle_f$ a partir dos dados, existe a possibilidade de avaliar o erro de $\langle x^2 \rangle_f$. De fato, quando se faz uma medida repetidas vezes, espera-se que os valores se distribuam segundo uma gaussiana, com largura igual ao erro. É possível achar um “erro” do erro dado por:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2N - 2}} \quad (\text{ref. [26], pg. 18})$$

onde σ é o erro da medida. Veja a semelhança com a experiência realizada. Tentar medir a posição da gota que sofre movimento Browniano leva a uma indeterminação grande da posição. Mas o interesse não está na posição, mas na flutuação da posição, ou seja no *erro da posição*, que seria dado por $\langle x^2 \rangle$. então o erro de $\langle x^2 \rangle_f$ nada mais é que o erro do erro e pode-se escrever:

$$\varepsilon_{\sigma_f} = \frac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_f}}{\sqrt{2N - 2}}$$

É claro que, do mesmo modo que $\sigma_f^2 = \langle x^2 \rangle_f$, ε_{σ_f} é uma primeira aproximação que deve ser encarada como tal, como ponto de partida e ordem de grandeza.

Caso geral de uma função de vários parâmetros

Desde o início, foi imposto, como justificativa que a distribuição tinha média zero e área N . No entanto, pode acontecer que por alguma razão haja uma direção preferencial: vento, capacitor não nivelado etc. Além disso, a curva pode ter uma deformação e sua área não ser N mas um outro valor próximo (embora seja difícil aceitar que a área não seja o número de dados tomados!).

Mas para efeito de exemplo, vamos considerar que os três parâmetros não sejam determinados (embora seja necessário ter valores iniciais estimados). A ref. [25], cap. 11, trata de vários modos de determinar estes parâmetros. O processo mais simples é o da *grade*, descrito a seguir.

A função que queremos ajustar é:

$$f(x_i) = \frac{N\Delta}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

com valores iniciais $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$, N o número de dados e $\mu = \langle x \rangle$.

- fixa-se dois parâmetros (por exemplo σ e N)
- varia-se o parâmetro livre (no caso a posição μ) até achar o mínimo χ^2 .
- fixa-se este parâmetro no valor correspondente ao mínimo χ^2 , μ_0 e mantendo um dos outros fixos (p. ex. N), varia-se σ até achar o novo χ^2 mínimo.
- fixa-se σ em σ_0 (no mínimo) e varia-se o terceiro parâmetro (N) até encontrar o menor χ^2 .
- volta-se ao início, recomeçando-se com o novo (e melhor) conjunto de parâmetros.

O processo é repetido até que os parâmetros não variem significativamente de uma iteração para outra, assim como o valor de χ^2 mínimo. Tem-se então, o melhor valor para os três parâmetros simultaneamente. Este método pode ser estendido a n parâmetros mas torna-se tedioso e de convergência lenta. Para avaliar o erro pode-se usar o processo 2, montando-se a matriz α no mínimo χ^2 e invertendo-a. Ou então, o processo 3, para cada parâmetro, mantendo os outros fixos em seus pontos de mínimo.

Caso os dados apresentem uma média significativamente não nula (em relação à largura da distribuição), deve-se minimizar o χ^2 em σ e μ simultaneamente como descrito logo acima. No caso de $\mu = \langle x \rangle$ ser desprezível em relação a σ , o processo de um parâmetro, σ , pode ser usado. No caso de $\mu \neq 0$, o que se usa na equação (C.1) para calcular N_A , σ^2 ou $\langle x^2 \rangle$? Justifique.