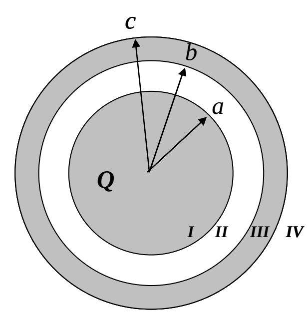
Física III para Engenharia Elétrica
IFUSP - 4320292
Psub – 2/07/2014 GABARITO

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, à lápis ou tinta.

Justifique suas respostas. Não basta copiar a fórmula do formulário. Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

Nome	Assinatura	No. USP	Turma



Q1. Um capacitor esférico foi construído combinando duas esferas metálicas condutoras concêntricas como na figura, ambas inicialmente descarregadas. A esfera interna é maciça. A espessura da casca da esfera externa é *(c – b)*. Coloca-se uma carga ***Q*** na esfera interna. Preenche-se o espaço entre as esferas com um líquido com constante dielétrica α .

a) (1,0) Determine o potencial elétrico V(r) em todo o espaço, (regiões *I, II, III e IV*) supondo a carcaça externa aterrada, V(c)=0. Esboce um gráfico de *V(r) x r*

b) (0,5) Calcule a capacitância do arranjo.

c) (1,0) Suponha agora que o líquido que preenche o espaço entre as duas esferas tenha resistividade β. Calcule a resistência do arranjo. Ou seja entre as duas esferas

solução

a) $V_{IV} = 0$

$V_{III} = 0$

$$\int_0^V dV = -\int_b^r \frac{Q}{4\pi(\alpha\varepsilon_0)} \frac{(-dr')}{r'^2}.$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi(\alpha\varepsilon_0)}\left[\frac{-1}{r'}\right]_b^r = \frac{Q}{4\pi(\alpha\varepsilon_0)}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right)$$

note que

$$\begin{cases} V(b) = 0 \\ V(a) = \dfrac{Q}{4\pi(\alpha\varepsilon_0)}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right) \end{cases}$$

$$V_I = \frac{Q}{4\pi(\alpha\varepsilon_0)}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

b) $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi(\alpha\varepsilon_0)}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)} = \frac{4\pi(\alpha\varepsilon_0)ab}{a-b}$$

c) $R = \dfrac{\rho\ell}{A}$ traduzindo para os termos do problema: Numa casca esférica com espessura dr

$$dR = \frac{\beta dr}{4\pi r^2} \qquad R = \frac{\beta}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\beta}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{\beta(b-a)}{4\pi ab}$$

Q2. O campo elétrico num determinado meio é dado por:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-\alpha t} \sin(\beta z - \gamma t)\hat{x}$$

a) (1.0) Determine a relação entre $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *e* $\boldsymbol{\gamma}$, para que este campo satisfaça uma Equação Diferencial de Ondas.

b) (0,5) Calcule a velocidade dessa onda;

c) (0,5) Determine o campo magnético $\vec{B}$;

d) (0,5) Determine a densidade de corrente associada.

Solução. Há várias formas de resolver o problema. O mais simples e direto:

a) Uma onda EM harmônica têm equação: $\vec{E} = E_0 \sin(kz - \omega t)\hat{x}$.

Por comparação direta: $\alpha = 0$ e $v = \omega / k = \gamma / \beta < c$

b) $v = \gamma / \beta$

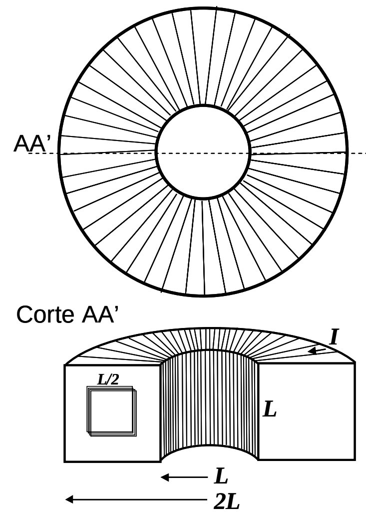
c) $\vec{B} = \dfrac{E_0 \beta}{\gamma} \sin(\beta z - \gamma t)\hat{y}$

d) $\vec{J} = \nabla \times \dfrac{\vec{B}}{\mu} - \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\qquad \vec{J} = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x} + \gamma\varepsilon E_0 \cos(\beta z - \gamma t)\hat{x}$

$$\vec{J} = \left[-\frac{\beta^2}{\mu\gamma} + \gamma\varepsilon\right] E_0 \cos(\beta z - \gamma t)\hat{x}$$

Q3. No centro de um toróide de seção quadrada de lado L, construído com raio menor L e raio maior 2L, é colocada uma bobina teste com N_1 espiras, também quadrada de lado L/2, conforme mostra a figura. O toróide foi construído com um total de N_2 espiras que conduzem uma corrente

$$I = I_0 \cos \omega t\, I.$$

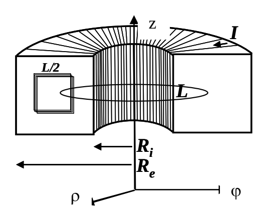


a) (0,5) Determine o campo magnético no toróide (indique claramente os componentes vetoriais);

b) (1,0) Determine o fluxo do campo magnético na espira teste.

c) (1,0) Determine a tensão induzida em circuito aberto na espira teste.

a) $\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I$ ao longo de uma espira com raio $\boldsymbol{r}$ coaxial com o eixo do toróide. O sinal foi obtido pela regra da mão direita:



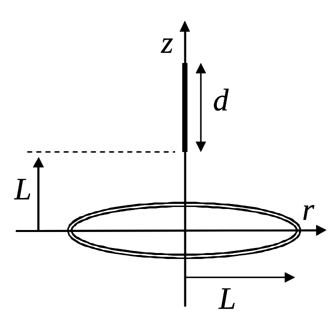
$$2\pi\, rB = \mu_0 N_2 I \qquad \vec{B} = \left(-\frac{\mu_0 N_2 I_0}{2\pi\, r} \cos \omega t \right) \hat{\varphi}$$

b) $\phi_B = \int -\frac{\mu_0 N_2 I_0}{2\pi\, r} \cos \omega t \hat{\varphi} \cdot ds \hat{\varphi} \qquad \phi_B = -\frac{\mu_0 N_2 I_0 \cos \omega t}{2\pi} \int_0^{L/2} dz \int_{5L/4}^{7L/4} \frac{1}{r} dr$

$$\phi_B = -\frac{\mu_0 N_2 I_0 \cos \omega t}{2\pi} \frac{L}{2} \ln \frac{7}{5}$$

c) $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 N_2 I_0 \omega \sin \omega t}{2\pi} \frac{L}{2} \ln \frac{7}{5}$

Q4. Monta-se uma barra isolante com comprimento d no eixo de um anel também isolante com raio L conforme ilustrado na figura. O anel e a barra têm a mesma densidade de carga uniforme, α



a) (0,5) Determine a carga elétrica no anel e na barra;

b) (0,5) Calcule o campo elétrico criado pelo anel num ponto qualquer de seu eixo.

c) (0,5) Calcule o campo elétrico criado pela barra num ponto qualquer do anel;

d) (1,0) Calcule a força elétrica que o anel exerce na barra.

Solução

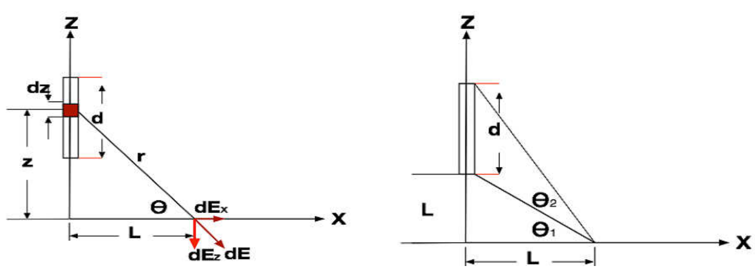
a) $Q_{anel} = \alpha\, 2\pi\, L \qquad Q_{barra} = \alpha\, d$

b) Só há componente em z

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(L^2+z^2\right)}\frac{z}{\sqrt{L^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{\left(L^2+z^2\right)^{3/2}}$$

c)

O campo $d\mathbf{E}$ produzido pelo elemento de carga dq disposto no eixo Z faz um ângulo θ com o eixo X. Os vetores correspondentes a cada elemento de carga disposto no eixo Z terão orientações distintas, isto implica que durante a somatória (integração) é preciso ter em conta a orientação espacial dos vetores. Para contornar este problema vamos calcular separadamente as componentes deste vetor ou seja dE_Z e dE_X isto fará com que a integral seja escalar.



De acordo com a figura acima, as componentes dos dE_Z e dE_X podem ser expressas como seguem:

$$dE_Z = dE sen\theta = \frac{dq sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\alpha dZ sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$dE_X = dE cos\theta = \frac{\alpha dZ cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Temos ainda que:

$$cos\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{cos^2\theta}$$

$$tg\theta = \frac{Z}{L} \Rightarrow Z = Ltg\theta \Rightarrow dZ = \frac{L}{cos^2\theta}d\theta$$

Substituindo estes valores nas expressões acima obtemos que:

$$dE_Z = \frac{\alpha dZ sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\alpha L d\theta sen\theta cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 L^2 cos^2\theta} = \frac{\alpha d\theta sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

$$dE_X = \frac{\alpha dZ cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\alpha L d\theta cos\theta cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 L^2 cos^2\theta} = \frac{\alpha d\theta cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

Com isto temos que:

$$E_Z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\alpha d\theta cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 L} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[sen\theta_2 - sen\theta_1\right] = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\frac{L+d}{\sqrt{L^2+(L+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$E_X = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\alpha d\theta sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 L} = \frac{-\alpha}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[cos\theta_2 - cos\theta_1\right] = \frac{-\alpha}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\frac{L}{\sqrt{L^2+(L+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Finalmente o campo em um lugar qualquer do anel pode ser escrito como:

$$\mathbf{E} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[-\left(\frac{L}{\sqrt{L^2+(L+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{i} + \left(\frac{L+d}{\sqrt{L^2+(L+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{k}\right]$$

d) $dF_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{\left(L^2+z^2\right)^{3/2}}\alpha\, dz$

$$F_z = \frac{\alpha^2 2\pi L}{4\pi\varepsilon_0}\int_L^{L+d}\frac{zdz}{\left(L^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\alpha^2 2\pi L}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\left(L^2+z^2\right)^{1/2}}\right]_L^{L+d}$$

$$F_z = \frac{\alpha^2 2\pi L}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(2L^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(L^2+(L+d)^2\right)^{1/2}}\right]$$

Formulário

Constantes e definições

$mol = 6{,}02\times 10^{23}$ $\ln(2) = 0{,}693$ $\varepsilon_0 = 8.854\times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$

$\mu_0 = 1{,}26\times 10^{-6} H/m$ $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\, T.m/A$ $e = 1{,}6\times 10^{-19} C$ $c = 3{,}00\times 10^{8}$ ms^{-1}

$n = \frac{c}{v}$

Campos elétricos e magnéticos

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$ $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$ $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$

$\vec{F} = q\vec{E} + q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$ $id\vec{l} = dq\vec{v}$ $d\vec{F} = id\vec{l}\times\vec{B}$

Leis de Maxwell

$\oint \varepsilon\vec{E}.d\vec{s} = q$ $\oint \vec{B}.d\vec{s} = 0$ $\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial\phi_B}{\partial t}$ $\oint \frac{\vec{B}}{\mu}.d\vec{l} = I + \varepsilon\frac{\partial\phi_E}{\partial t}$

$\vec{\nabla}.\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \rho$ $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\times\frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Campos na matéria

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$ $\chi_e = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) = k_E - 1$ $k_E = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M}$ $\frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{H}$ $\frac{\left|\vec{M}\right|}{\left|\vec{H}\right|} = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 = \chi_m$ $\vec{\mu} = I\vec{A}$ $k_m = \frac{\mu}{\mu_0}$

Indutância, lei de Ohm, etc.

$\varepsilon = \oint_c \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$ $\varepsilon = -L\frac{di}{dt}$ $L = N\frac{\phi_B}{i}$ $U = RI$ $P = UI$

$$\varepsilon = -N\frac{d\phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad \varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt} \qquad M_{21} = \frac{N_2\phi_{21}}{I_1}$$

$$\vec{\mu}_m = I\cdot\vec{A} \qquad \vec{p} = q\cdot\vec{d} \qquad \vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$q = \int \rho dV \qquad i = \frac{dq}{dt} \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad R = \rho\frac{\ell}{A} \qquad Q = CV \qquad C = \varepsilon\frac{A}{d}$$

Onda EM

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0 \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad p = \frac{U}{c}$$

$$\vec{S} = c^2\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \qquad I_m = \left\langle \left|S(t)\right| \right\rangle_t \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \lambda = vT$$

Cálculo

$$\int sen^2 ax\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{sen2ax}{4a}\right) \qquad \int \cos^2 ax\,dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{sen2ax}{4a}\right) \qquad \int sen\,ax dx = -\frac{\cos ax}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) \qquad \int \frac{dx}{\left(x^2 \pm a^2\right)^{3/2}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\nabla U = \hat{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$$

$$\nabla U = \hat{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}dV = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}, \quad \int_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$