

# Capítulo 6

## Magnetismo

### 6.1 O campo magnético\*

Há mais de dois mil anos os gregos conheciam uma pedra, o mineral que hoje chamamos de magnetita, que atraía pedaços de ferro. Existem também referências documentadas do uso de ímãs na navegação do século *XII*.

Em 1600, William Gilbert descobriu que a Terra é um grande ímã natural, com os pólos magnéticos, cada qual na vizinhança de um pólo geográfico. Como o pólo norte da agulha imantada de uma bússola aponta sempre para o pólo sul de um ímã, o que denominamos pólo norte da Terra é, na realidade, um pólo magnético.

**IMPORTANTE:** Embora as cargas elétricas e os pólo magnéticos sejam, em muitos aspectos semelhantes, existem diferenças importantes: - os pólo magnéticos sempre ocorrem aos pares. Quando se quebra um ímã em dois pedaços, pólos iguais porém opostos, aparecem nas extremidades novas dos fragmentos. O resultado é a formação de dois ímãs.

Há muito tempo se especula se existem ou não pólos magnéticos isolados. E embora até hoje não se tenham indícios da existência de um pólo magnético, a sua descoberta teria um apelo teórico imediato: explicaria porque as cargas elétricas são

quantizadas!

\* O objetivo principal desse capítulo é familiarizar você com propriedades gerais dos campos magnéticos e de como cargas se comportam quando submetidas a eles.

Os cálculos são bastante simples e você deve ter certeza de que compreendeu todos os *raciocínios* dos exemplos oferecidos e no final do capítulo ter desenvolvido uma intuição sobre ordens de grandeza que são tão diferentes no mundo microscópico.

### FATOS EXPERIMENTAIS:

1) Os campos magnéticos vêm de cargas em movimento. Uma carga elétrica cria um campo elétrico quer esteja em repouso ou em movimento. Entretanto o campo magnético só é gerado a partir de cargas elétricas em movimento. Estas cargas em movimento se encontram nos átomos que constituem o material dos ímãs.

2) Uma carga em movimento (ou uma corrente) *cria* um campo magnético também.

3) Se colocarmos uma carga elétrica em movimento ou um fio transportando uma corrente num campo magnético, uma força magnética agirá sobre ele.

### Definição de $\mathbf{B}$ e força exercida sobre cargas e correntes.

Quando estudamos o campo elétrico, nós o definimos como sendo a razão entre a força exercida sobre uma carga teste e a carga teste, i.e.,

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$$

Podemos definir o campo magnético de forma análoga, i.e, pelo seu efeito sobre uma carga  $q$  que se move com velocidade  $\mathbf{v}$ .

Testes experimentais nos mostram que a ação da força magnética se dá de acordo com a expressão abaixo

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

i.e,  $\mathbf{F}_B$  é sempre perpendicular à velocidade da partícula e também ao campo magnético existente na região. Seu papel principal é DEFLETIR partículas, no entanto; *sem realizar trabalho*

$$dW_{mag} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}dt = 0$$

### Força Magnética sobre um fio de corrente

Quando um fio condutor é percorrido por uma corrente elétrica e também está imerso numa região com campo magnético, há uma força sobre o fio que é uma soma vetorial das forças magnéticas sobre as partículas carregadas, cujo movimento responde pela corrente. A figura abaixo mostra um pequeno segmento de um fio condutor de secção reta  $A$  e comprimento  $l$ , carregando uma corrente  $I$ .

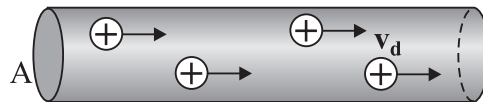


Figura 6.1: Segmento de fio condutor

Se o fio estiver numa região onde há campo magnético  $\mathbf{B}$ , a força magnética sobre cada carga é  $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ , onde  $\mathbf{v}_d$  é a velocidade de migração dos portadores de carga. O número de cargas no segmento do condutor é igual ao produto do número de cargas  $n$  por unidade de volume vezes o volume  $Al$ . Então, a força sentida pelo segmento do condutor será

$$\mathbf{F}_B = (q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B})nAl$$

A corrente no fio é, por definição

$$I = nqv_dA$$

e portanto, a força sobre o segmento será dada por

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

onde  $\mathbf{l}$  é o vetor cujo módulo corresponde ao comprimento do condutor e cuja direção coincide com a da corrente.

Podemos generalizar a equação acima para casos nos quais o condutor não seja necessariamente retilíneo, nem o campo, uniforme.

A força sobre um elemento de corrente genérico é dado por

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

( $I d\mathbf{l}$  é o elemento de corrente.)

### 6.1.1 Linhas de campo magnético

O campo magnético  $\mathbf{B}$  pode também ser representado pelas linhas de campo magnético, de maneira semelhante à da representação do campo elétrico pelas respectivas linhas de campo. Nos dois casos a direção do campo é a direção da linha do campo em cada ponto e a intensidade do campo é dada pela densidade de linhas.

Há no entanto DUAS DIFERENÇAS IMPORTANTES entre as linhas do campo magnético e as do campo elétrico.

1) As linhas do campo elétrico tem a direção da força elétrica sobre uma carga positiva. As do campo magnético são *perpendiculares* à força magnética sobre uma carga em movimento.

2) As linhas do campo elétrico principiam nas cargas positivas e terminam nas cargas negativas, ou no infinito. As linhas de campo magnético são FECHADAS. Isto é consequência direta da não existência de monopólos magnéticos. É por isso que não podem haver pontos no espaço onde as linhas principiam ou terminam.

### 6.1.2 Exercícios e aplicação do movimento de partículas carregadas em campos magnéticos

1) Um fio condutor tem a forma de meia circunferência de círculo de raio  $R$ , no plano  $xy$ . O fio é percorrido por uma corrente  $I$ , entre os pontos  $a$  e  $b$ , como

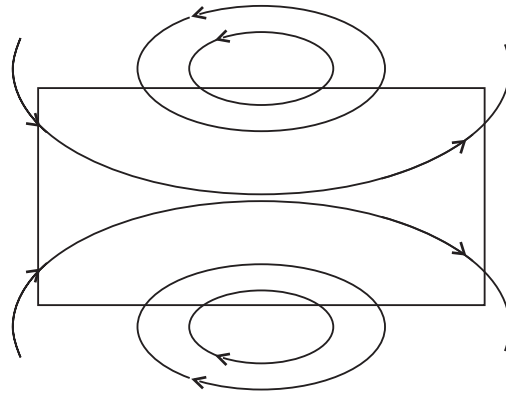


Figura 6.2: Campo magnético criado por corrente

mostra a figura. Há um campo magnético homogêneo  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$ , perpendicular ao plano do círculo. Calcule a força do campo sobre a meia circunferência.

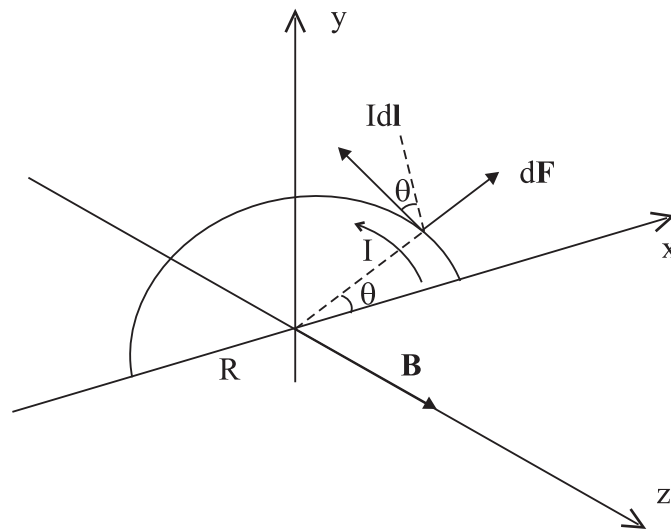


Figura 6.3: Fio condutor tipo meia-circunferência

O elemento de força  $d\mathbf{F}$  sobre um segmento do fio está no plano  $xy$  como mostra a figura. A força total pode ser obtida pela expressão de  $d\mathbf{F}$  em termos de  $\theta$  seguido de uma integração de 0 a  $\pi$ .

1. O elemento de força  $d\mathbf{F}$  sobre o elemento de corrente  $I d\mathbf{l}$  é

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Mas  $d\mathbf{l} = -dl \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + dl \cos \theta \hat{\mathbf{j}}$

Onde  $dl = R d\theta$  e  $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{k}}$ .

Então temos

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = (-IR \sin \theta d\theta \hat{\mathbf{i}} + IR \cos \theta d\theta \hat{\mathbf{j}}) \times B \hat{\mathbf{k}} = \\ &= IRB \sin \theta d\theta \hat{\mathbf{j}} + IRB \cos \theta d\theta \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Podemos agora integrar sobre  $\theta$  e obter

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= IRB \hat{\mathbf{i}} \int_0^\pi \cos \theta d\theta + IRB \hat{\mathbf{j}} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= IRB(0) \hat{\mathbf{i}} + IRB(2) \hat{\mathbf{j}} = 2IRB \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

É natural imaginar que a componente  $\hat{\mathbf{i}}$  da força seja nula se pensarmos na simetria do problema (você consegue encontrar o argumento?)

2) Mudando o campo... considere o mesmo problema, mas onde o campo magnético está no plano do arco, conforme a figura seguinte.

A força sobre a parte retilínea do fio condutor tem o módulo  $F_1 = ILB = 2IRB$ , pois  $l = 2R$  e o fio está perpendicular ao campo. A direção de  $F_1$  é para a frente da página pois  $\mathbf{l} \times \mathbf{B}$  está dirigido para frente da página.

Para encontrar a força sobre a parte encurvada do condutor, devemos inicialmente, encontrar uma expressão para o diferencial da força num segmento  $d\mathbf{S}$ . Se  $\theta$  for o ângulo entre  $\mathbf{B}$  e  $d\mathbf{S}$  então o módulo de  $d\mathbf{F}_2$  é

$$\begin{aligned} dF_2 &= I |d\mathbf{S} \times \mathbf{B}| = IB \sin \theta dS \\ S &= R d\theta \quad \longrightarrow \quad dF_2 = IB \sin \theta R d\theta \end{aligned}$$

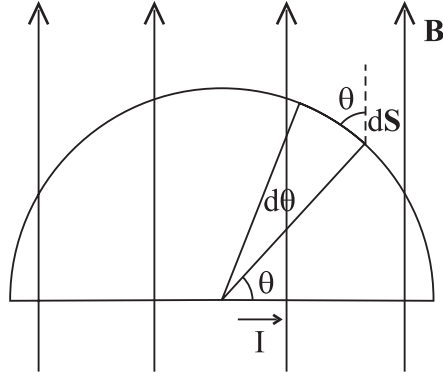


Figura 6.4: Arco no plano do campo

Observe que a direção da força sobre qualquer elemento é a mesma: para trás da página ( $d\mathbf{S} \times \mathbf{B}$  está dirigido neste sentido). Então a força sobre o condutor encurvado também está dirigida de frente para trás da página.

$$F_2 = IRB \int_0^\pi \sin \theta d\theta = IRB[-\cos \theta]_0^\pi = -IRB(\cos \pi - \cos 0) = 2IRB$$

Veja que esse resultado é exatamente o mesmo obtido para a parte reta da espira, mas com o sentido oposto. Isto mostra que a força total sobre o circuito fechado é nula.

Como deve ser, em geral, o movimento de uma partícula carregada em um campo magnético? Lembre-se que o papel da força magnética é alterar a direção da velocidade, mas não o seu módulo. Por isso toda partícula carregada mergulhada num campo magnético *mantém sua energia cinética*. Se  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  forem perpendiculares, o movimento será uma circunferência, e a força magnética irá fazer o papel da força centrípeta:

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r}, \quad r = \frac{mv}{qB}$$

Note que o raio da trajetória (normalmente mensurável pelo traço deixado pela partícula carregada no ambiente em que se encontrar) é diretamente proporcional ao *momento linear* da partícula.

Outra informação importante pode ser extraída da frequência angular dessa partícula

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

que é proporcional á relação carga/massa da partícula em questão.

Essa frequência angular é denominada frequência cíclotron, pois partículas carregadas circulam exatamente com essa frequência em um determinado tipo de acelerador, o cíclotron.

3) Como é a trajetória de uma partícula que penetra num campo magnético com uma velocidade  $\mathbf{v}$  qualquer?

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}$$

Vamos supor que  $\mathbf{B}$  seja constante e esteja apontando na direção  $x$ .

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -v_y B \hat{\mathbf{k}} + v_z B \hat{\mathbf{j}}$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0 \longrightarrow v_x = v_{0x} \longrightarrow x = x_0 + v_{0x} t$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = +qv_z B$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = +qv_y B$$

Para resolver esse sistema podemos fazer o seguinte truque. Seja a variável complexa

$$z = v_y + v_z i$$

Multiplicando as duas últimas equações para a derivada das componentes da velocidade por  $i$  e somando-as, temos



$$m \frac{dz}{dt} = qB(v_z - iv_y) = iqB(-v_y - iv_z) = -iqBz$$

$$\frac{dz}{dt} = -i \frac{qB}{m} z \longrightarrow \ln \frac{z}{z_0} = -i \frac{qB}{m} t$$

$$v_y + iv_z = (v_{y0} + iv_{z0}) e^{-iq \frac{B}{m} t}$$

$$v_y = v_{y0} \cos \frac{qB}{m} t$$

$$v_z = v_{z0} \sin \frac{qB}{m} t$$

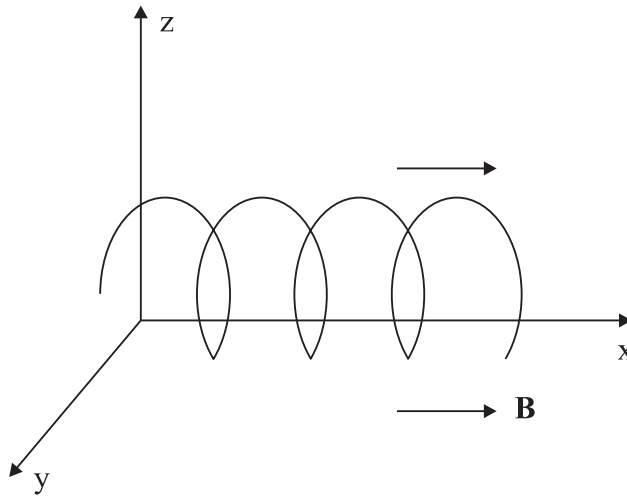


Figura 6.5: Trajetória da partícula com velocidade  $v$

4) Como confinar partículas usando o campo magnético?

Aqui vamos ver que apenas com os conhecimentos básicos adquiridos podemos compreender a física de fenômenos importantes no planeta: A garrafa magnética, o cinturão de Van Allen e as auroras boreais.

Quando partículas carregadas se movem num campo magnético que não é uniforme, seu movimento pode ser bastante complicado. Uma “garrafa magnética” é construída da seguinte forma: tomemos duas espiras de corrente como indicado na figura abaixo

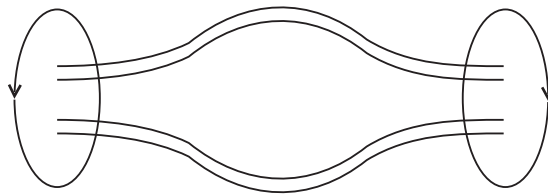


Figura 6.6: Garrafa magnética

Nestas circunstâncias, uma partícula carregada que comece seu movimento numa das extremidades do campo, irá espiralar em torno das linhas de campo até chegar à outra extremidade, onde inverte a direção e espirala para trás. As partículas carregadas podem assim ficar confinadas dentro dessa configuração de campo magnético. Esta idéia foi usada para confinar gases muito quentes ( $T > 10^6 K$ ) constituídos por elétrons e íons positivos, os chamados plasmas. Este esquema de confinamento de plasma pode ter papel relevante em processos de fusão nuclear controlada, que nos proporcionariam uma fonte essencialmente inesgotável de energia. Infelizmente, as garrafas magnéticas não são perfeitas: quando um número muito grande de partículas estiver confinado, haverá colisões entre as partículas, que vazarão do sistema.

Os cinturões de Van Allen são constituídos por partículas carregadas (na sua maioria elétrons e prótons) que envolvem a Terra em formato de roscas.

Esses cinturões de radiação foram descobertos em 1958 por James Van Allen, que usou os dados reunidos pela instrumentação embarcada no satélite Explorer I. As partículas carregadas capturadas pelo campo magnético (não uniforme!) da Terra, espiralam em torno das linhas desse campo, de um lado para outro. Essas partículas provêm, em sua maior parte do Sol, mas algumas provêm de estrelas e outros corpos celestes. Por essa razão esses feixes de partículas são denomina-

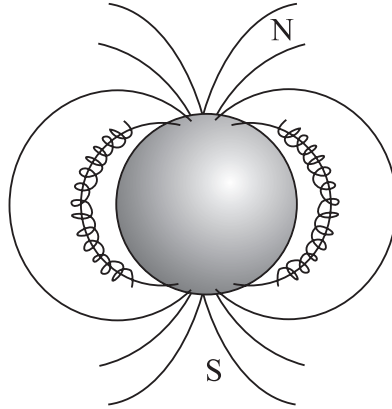


Figura 6.7: Cinturões de van Allen

dos *raios cósmicos*. A maior parte deles são desviados pelo campo magnético da Terra e nunca a atingem. No entanto algumas são capturadas e formam o cinturão mencionado. Quando essas partículas estão na atmosfera terrestre, sobre os pólos, colidem com átomos da atmosfera e provocam emissão de luz por esses átomos. É essa a origem das auroras boreais.

#### 5) Filtro de velocidades:

Em muitas experiências que envolvem o movimento de partículas carregadas, é importante ter uma fonte de partículas que se movem com uma mesma velocidade. Isso pode ser conseguido pela aplicação simultânea de um campo elétrico e um campo magnético, orientados como na figura

O campo elétrico está orientado para baixo enquanto que o campo magnético é aplicado perpendicularmente a ele, como indicado.

Admitindo que  $q$  seja positivo, vemos que a força magnética está dirigida para cima e a elétrica para baixo.

Se os campos forem escolhidos de tal forma que a força elétrica equilibre a magnética, a partícula se moverá numa reta horizontal e sairá por uma fonte à direita.

$$qvB = qE \quad \longrightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

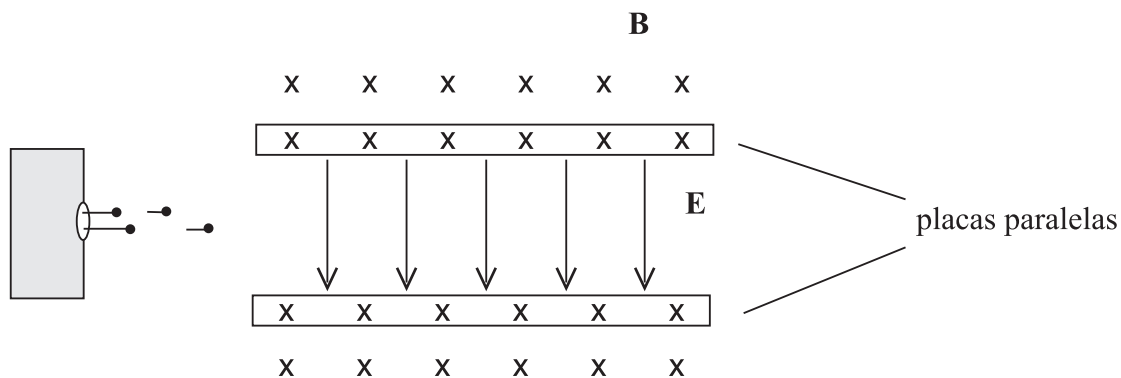


Figura 6.8: Filtro de velocidades

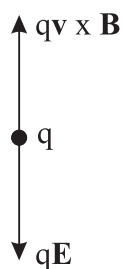


Figura 6.9: Forças envolvidas na carga

Note então, que apenas as partículas com essa velocidade passam sem desvio pelos campos como mostramos. Na prática,  $E$  e  $B$  são ajustados para selecionar uma certa velocidade. As outras serão desviadas para cima ou para baixo.

#### 6) O espectrômetro de massa.

O espectrômetro de massa é um instrumento que separa íons, atômicos ou moleculares conforme a relação carga-massa que possuam. Um feixe de íons passa por um filtro de velocidades e depois entra num campo magnético  $\mathbf{B}_0$ , como mostra a figura

Ao entrarem no campo magnético  $\mathbf{B}_0$ , os íons descrevem uma trajetória semi-circular até atingir uma chapa fotográfica em  $P$ . Como já vimos

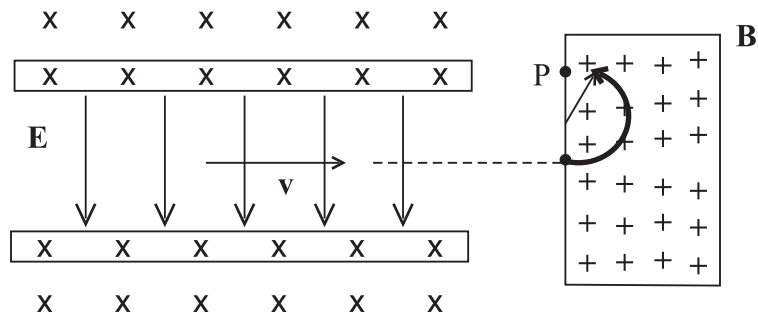


Figura 6.10: Espectrômetro de massas

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad \longrightarrow \quad \frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$$

Se admitirmos que o módulo do campo magnético na região do filtro de velocidades seja  $\mathbf{B}$ , teremos

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0B}{E}$$

(Note que todas as quantidades envolvidas são mensuráveis). Assim, podemos medir a relação carga/massa de partículas, através da medida desse raio de curvatura.

### 7) O Cíclotron:

Inventado em 1934, é um aparelho que consegue acelerar partículas até que atinjam velocidades muito altas. Num ciclo de operação do cíclotron os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  têm papel fundamental, como veremos. As partículas muito energéticas que emergem de um cíclotron são usadas para bombardear outros núcleos; esse bombardeio, por sua vez, provoca reações nucleares de interesse para a pesquisa nuclear. Muitos hospitais usam cíclotrons para fabricar substâncias radioativas usadas para diagnósticos e para o tratamento de algumas enfermidades.

Na figura abaixo está esquematizado um cíclotron.

O movimento das cargas ocorre em duas peças semicirculares  $D_1$  e  $D_2$ . Uma voltagem elevada, alternada é aplicada a esses “dês” e um campo magnético uniforme

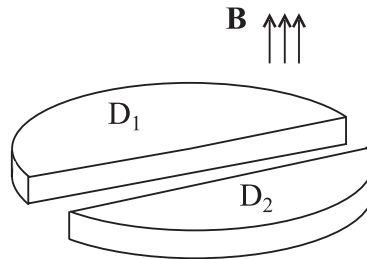


Figura 6.11: Cíclotron

(gerado por um eletroímã) é orientado perpendicularmente ao plano dos “dês”. Os íons positivos, injetados em  $P$  nas vizinhanças do campo magnético, descrevem uma trajetória semi-circular e atingem a faixa de interrupção num tempo  $T/2$ , onde  $T$  é o período de revolução. A frequência da voltagem aplicada se ajusta de modo que se  $D_2$  estiver a um potencial mais *baixo* que  $D_1$ , por uma grandeza  $V$ , os íons serão acelerados ao passarem para  $D_2$  e a respectiva energia cinética será acumulada de  $qV$ . O íon, então se move numa trajetória semicircular de raio *maior* porque a velocidade aumentou. Depois do intervalo de tempo  $T/2$  chega novamente no intervalo entre os  $D$ s. Neste instante, o potencial nesse espaço foi invertido (de modo que  $D_i$  está agora negativo) e o íon recebe um outro impulso ao passar pelo intervalo aberto.

O movimento continua e em cada volta o íon é acelerado  $2qV$ .

8) O efeito Hall: o que acontece quando um condutor conduzindo uma corrente for colocado num campo magnético?

Em 1879, E. Hall descobriu que nessas circunstâncias há uma voltagem gerada na direção perpendicular à corrente e ao campo magnético! Esse efeito pode ser compreendido através das propriedades das forças magnéticas e é usado com frequência para determinar o número de portadores de corrente ou o próprio campo magnético.

A montagem para observação do efeito Hall é constituída por um condutor na forma de uma fita delgada, percorrido por uma corrente  $I$  na direção  $x$  como mostra a figura.

O campo magnético é aplicado na direção  $y$ . Se os portadores de corrente

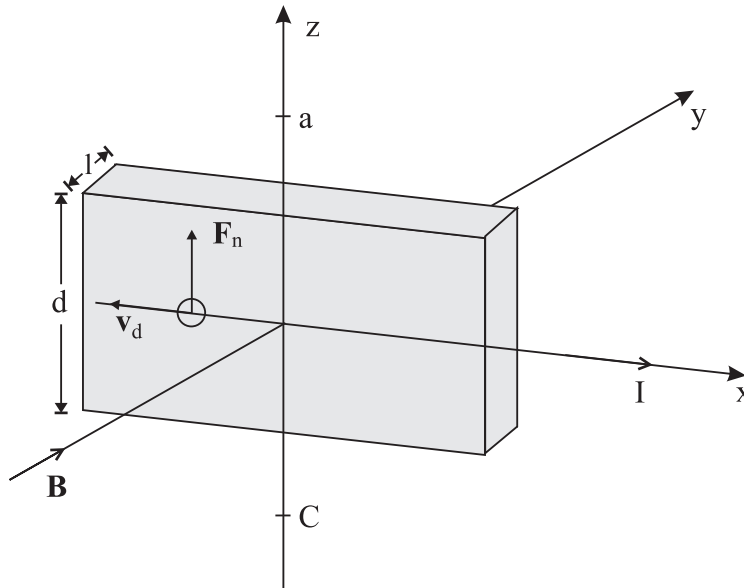


Figura 6.12: Efeito Hall

forem elétrons que se movem na direção  $x$  com velocidade  $v_d$ , cada um sofrerá uma força magnética para *cima*. Então haverá um excesso de carga negativa na parte de baixo da placa.

Essa migração de cargas na direção perpendicular à corrente vai acontecer até que o potencial eletrostático gerado por essa redistribuição de cargas produza uma força que *exatamente* compense a força magnética. Se um voltímetro estiver ligado nos pontos  $a$  e  $b$ , vai medir o que chamamos de *voltagem Hall*, que se relaciona com os outros parâmetros do problema como segue

$$I = nv_dqA \quad \longrightarrow \quad v_d = \frac{I}{nqA}$$

Onde  $A$  é a seção reta do condutor. Quando as forças elétricas e magnéticas se anulam teremos

$$qv_dB = qE_H \quad \longrightarrow \quad E_H = v_dB$$

A voltagem Hall  $V_H$  medida será

$$V_H = E_H d = v_d B d = \frac{IBd}{nqA}$$

Se escrevermos  $A = dt$ , teremos

$$v_A = \frac{IB}{nqt}$$

Onde  $t$  é a espessura do material. Vemos daqui imediatamente que, se  $B$  for conhecido,  $V_H$  pode ser usado para medir o número de portadores de carga ou se, vice versa,  $n$  for conhecido e  $\mathbf{B}$  não, pode ser determinado.

9) A descoberta do elétron.

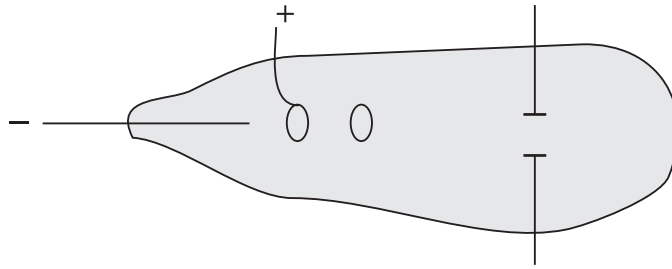


Figura 6.13: O experimento de Thomson

A experiência feita por Thomson que permitiu a descoberta da relação carga massa do elétron também faz uso das forças elétrica e magnética. A importância dessa experiência foi o impulso que deu à investigação e posterior descoberta dos *átomos* na matéria. Por quê? Vamos acompanhar suas observações:

1) Thomson mostrou que os raios de um tubo de raios catódicos podiam ser desviados, tanto por campos elétricos quanto por campos magnéticos e que, portanto, deveriam ser constituídos por partículas carregadas.

2) Medindo o desvio das partículas, Thomson mostrou que TODAS tinham a mesma relação  $q/m$ , mesmo as que eram provenientes de materiais diferentes. Essas



partículas eram, portanto, um dos constituintes fundamentais da matéria. O passo seguinte, é claro, sabendo que a matéria é neutra, foi buscar as partículas positivas que também devem fazer parte de toda a matéria para torná-la neutra.

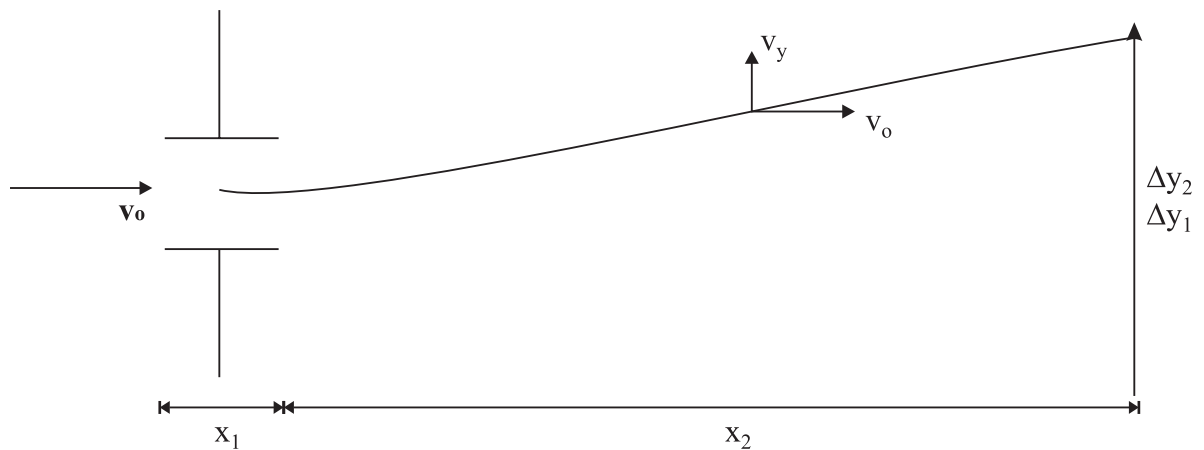


Figura 6.14: Desvio das partículas carregadas

### Como foi feita a experiência?

Os elétrons são emitidos pelo cátodo que está num potencial negativo em relação às fendas  $A$  e  $B$ . O campo elétrico, orientado de  $A$  para  $C$ , acelera os elétrons, que passam pelas fendas e entram numa região livre de campos. Entre os eletrodos  $D$  e  $F$ , no entanto, há um campo elétrico perpendicular à velocidade dos elétrons. Este campo acelera as partículas na direção vertical, durante o intervalo de tempo que ficam entre os eletrodos.

Os elétrons desviados atingem uma tela fosforescente  $S$ , à direita dos eletrodos, e é possível medir o desvio vertical  $s_y$  em relação ao ponto de incidência sobre a tela, na ausência de campos elétricos entre as placas.

A velocidade dos elétrons é determinada aplicando-se um campo magnético perpendicular ao campo elétrico tal que, como no exemplo anterior

$$qE = qvB \quad \longrightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

$E$  e  $B$  são parâmetros sobre os quais os experimentais tem controle.

Na ausência de campo magnético, o feixe é desviado de  $\Delta y$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$$

\* ( $\Delta y_1$  dentro do capacitor e  $\Delta y_2$  fora)

$$\Delta y_1 = 1/2at_1^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left( \frac{x_1}{v_0} \right)^2$$

Note que o movimento na direção  $x$  é *uniforme*

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE}{m} \frac{x_0}{v_0} \frac{x_2}{v_0}$$

Esse movimento também é retilíneo e uniforme após o elétron ter deixado o capacitor. Portanto

$$\Delta y = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{m} \right) E \left( \frac{x_1}{v_0} \right)^2 + \left( \frac{q}{m} \right) E \left( \frac{x_1 x_2}{v_0^2} \right)$$

$$v_0 = \frac{E}{B}$$

A medida de  $\Delta y$  com a anterior determinação de  $v_0$  leva à determinação da relação carga/massa do elétron. Todos os outros parâmetros na equação acima para  $\Delta y$  são conhecidos experimentalmente.

### 6.1.3 Exercícios variados

1) Um próton está em movimento sobre uma órbita circular de  $14\text{cm}$  de raio, num campo magnético uniforme de  $0,35T$ , dirigido perpendicularmente à velocidade do próton. Achar a velocidade orbital do próton.

A idéia central deste problema vem do fato de que partículas carregadas quando entram num campo magnético, sofrem uma força PERPENDICULAR à sua velocidade e portanto tendendo sempre a fazer um círculo.

A força magnética como discutimos só vai *defletir* a partícula, sua velocidade sendo conservada

$$F_c = q \frac{v^2}{r} = qvB \quad \longrightarrow \quad v = \frac{qBr}{m} = \frac{(1,60 \times 10^{-19}C)(0,35T)(14,0 \times 10^{-2}m)}{(1,67 \times 10^{-27}kg)}$$

$$= 4,69 \times 10^6 m/s$$

E se fosse um elétron com essa velocidade, o que acontece? Mostre que o raio de sua órbita muda para  $r = 7,63 \times 10^{-5}m$ . Qual o fator que faz essa diferença tão grande? É a *massa* do elétron que é aproximadamente  $10^3$  vezes menor que a massa do próton. *Ordens de grandeza são IMPORTANTES.*

2) Numa experiência que visa medir a intensidade do campo magnético de um conjunto de bobinas, elétrons são acelerados do repouso por uma diferença de potencial de  $350V$  e o feixe de elétrons descreve uma trajetória curva de raio  $7,5cm$ . Admitindo-se que o campo magnético seja perpendicular ao feixe:

a) Qual o módulo de  $\mathbf{B}$ ?

Devido à diferença de potencial, os elétrons vão adquirir energia cinética de acordo com a conservação da energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = |e|V \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2|e|V}{m}} = \sqrt{\frac{2(1,60 \times 10^{-19}C)(350V)}{(9,11 \times 10^{-31}kg)}} = 1,11 \times 10^7 m/s$$

Conhecendo-se o raio, usamos o problema anterior e determinamos o campo magnético

$$B = \frac{mv}{|e|r} = \frac{(9,11 \times 10^{-31}kg)(1,11 \times 10^7 m/s)}{(1,60 \times 10^{-19}C)(0,075m)} = 8,43 \times 10^{-4}T$$

Neste problema valem duas observações qualitativas importantes: a) Quem *acelera* as partículas é *sempre* o campo elétrico. O campo magnético só as *deflete* conservando portanto sua energia. b) Devido ao fato de que o elétron é uma partícula muito *leve* comparada com um átomo de  $H$ , por exemplo, as velocidades associadas a ele sempre tenderão a ser muito maiores do que para partículas mais pesadas. Note neste exercício que a velocidade do elétron é muito próxima à velocidade da luz.

b) Qual a frequência angular de revolução dos elétrons? E o seu período de revolução?

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1,11 \times 10^7 m/s}{0,075m} = 1,48 \times 10^8 rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 42,5 ns$$

O objetivo destes problemas simples é chamar sua atenção para as ordens de grandeza relativas às partículas mais conhecidas e também sobre o efeito relativo dos campos magnéticos e elétricos.

3) Acelerador de prótons. Qual a energia cinética máxima dos prótons num cíclotron de raio  $0,50m$  num campo magnético de  $0,35T$ ?

Usando a expressão que obtivemos para o cíclotron

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad \longrightarrow \quad \frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$$

Temos que

$$K = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} = \frac{(1,60 \times 10^{-19} C)^2 (0,35)^2 (0,50)^2}{2(1,67 \times 10^{-27} kg)} = 2,34 \times 10^{-13} J = 1,46 \mu eV$$

NOTE que a energia cinética adquirida pelos prótons nesse acelerador é equivalente à aquela que receberiam se atravessassem uma diferença de potencial de 1,46 MILHÕES DE VOLTS. (Atenção nestas conclusões. Os cálculos são e devem ser

simples. O importante é você perceber como funcionam as coisas no mundo microscópico, ainda hoje sondado pelas mesmas ferramentas: campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .)

#### 4) O efeito Hall no Cobre:

Uma tira retangular de cobre com  $1,5\text{cm}$  de largura e  $0,1\text{cm}$  de espessura é percorrida por uma corrente de  $5\text{A}$ . Um campo magnético de  $1,2\text{T}$  é aplicado perpendicularmente à face da tira. Achar a voltagem Hall resultante.

Vamos admitir que haja um elétron por átomo disponível para condução. Então a densidade de portadores de carga é

$$n = 8,48 \times 10^{28} \text{e}/\text{m}^3$$

OBSERVAÇÃO: Como descobrimos isto? Pela tabela periódica dos elementos vemos que o peso atômico do cobre é  $63,5\text{g}/\text{mol}$ . Lembre-se que um átomo grama de um elemento contém o número de Avogadro de átomos do elemento, i.e;  $6,02 \times 10^{23}$  átomos. Sabendo a densidade do cobre, podemos calcular o volume ocupado por  $63,5\text{g}$  de cobre

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{63,5\text{g}}{8,95\text{g}/\text{cm}^3} = 7,09\text{cm}^3$$

Se agora admitirmos que cada átomo contribui com 1 elétron

$$n = \frac{6,02 \times 10^{23} \text{elétrons}}{7,09\text{cm}^3} = 8,48 \times 10^{28} \text{elétrons}/\text{m}^3$$

Agora fica fácil. É só recapitular a física que leva às expressões do efeito Hall

$$V_H = \frac{IB}{nqt} = \frac{5\text{A} \times 1,2\text{T}}{(8,48 \times 10^{28}\text{m}^{-3})(1,60 \times 10^{-19}\text{C})(0,1 \times 10^{-2}\text{m})} = 0,442\mu\text{V}$$

Note que a voltagem Hall é muito pequena num bom condutor. Note também que a largura da fita não desempenha papel algum.

Nos semicondutores, nos quais  $n$  é muito menor que nos metais monovalentes, as voltagens Hall são maiores, pois  $V_H$  varia com o inverso de  $n$ . Nesses materiais,

o nível de corrente é da ordem de  $1mA$ . As voltagens são da ordem de  $10mV$ .

5) Sobre os filtros de velocidade: Um próton move-se na direção  $x$ , numa região de campos cruzados com  $E = (2 \times 10^5 N/C)\hat{\mathbf{k}}$  e  $B = -(3000G)\hat{\mathbf{j}}$ .

Com que velocidade o próton *não* será desviado?

Para que não haja desvio

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_B$$

$$\begin{aligned} qvB = qE \quad \longrightarrow \quad |v| &= \frac{E}{B} = \frac{(2 \times 10^5 N/C)}{3000 \times 10^{-4} T} \\ &= \frac{2 \times 10^5}{0,3} = 0,667 \times 10^4 m/s = 667 km/s \end{aligned}$$

b) Se tiver o dobro dessa velocidade, para onde será desviado?

$$\mathbf{F} = +ev\hat{\mathbf{x}} - B\hat{\mathbf{j}} = -evB\hat{\mathbf{k}}$$

Na direção dos  $z$  negativos!!

6) Num aparelho de Thomson, o feixe de elétrons não sofre desvio ao passar por um campo elétrico de  $3000V/m$  e um campo magnético cruzado de  $1,40G$ . O comprimento dos eletrodos defletores é de  $4cm$  e a tela está a  $30cm$  da borda mais avançada destes eletrodos. Determinar o desvio do feixe sobre a tela na ausência do campo magnético.

Como vimos, a velocidade dos elétrons pode ser determinada pela relação entre  $E$  e  $B$ .

Seguindo cuidadosamente o raciocínio da experiência de Thomson teremos

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{m} \right) E \left( \frac{x_1}{v_0} \right)^2 + \left( \frac{q}{m} \right) E \left( \frac{x_1 x_2}{v_0^2} \right) \\ v_0 &= \frac{E}{B} = \frac{3000V/m}{1,40 \times 10^{-4} T} = 2,14 \times 10^7 m/s \quad (!) \end{aligned}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} \frac{(1,6 \times 10^{-15} C)(3000 V/m)}{(9,11 \times 10^{-31} kg)} \left( \frac{0,04 m}{2,14 \times 10^7 m/s} \right)^2$$

$$= 9,20 \times 10^{-4} m + 1,38 \times 10^{-2} m = 14,7 mm$$

7) Um íon de  $^{58}Ni$  com carga  $+e$  e massa  $9,62 \times 10^{-26} kg$  é acelerado por uma DDP de  $3kV$  e depois desviado num campo magnético de  $0,12T$ .

a) Calcule o raio da órbita do íon no campo.

b) Qual a diferença entre as órbitas dos íons  $^{58}Ni$  e  $^{60}Ni$ , podemos separá-los nesse aparelho?

Vamos agora apenas usar as equações deduzidas no texto. Tenho certeza de que você seria capaz de fazer isto (deduzi-las de novo).

$$r = \sqrt{\frac{2m\Delta V}{qB^2}} = \sqrt{\frac{2(9,62 \times 10^{-26} kg)(3000V)}{(1,6 \times 10^{-19} C)(0,12T)^2}} = 0,501 cm$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = 1,017$$

Portanto  $r_2 = 1,017r_1 = 0,510 cm$

$$r_2 - r_1 = 5 mm !$$

Vemos então que precisamos de aparelhos muito precisos para separar isótopos.

## 6.2 A lei de Biot-Savart

A lei de Biot-Savart nos dá o campo magnético gerado por correntes estacionárias (que faz o papel da lei de Coulomb)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R^2} d\mathbf{l} \times \mathbf{R}$$

\*  $\mu_0$ : permeabilidade magnética do vácuo

$$(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2)$$

\* ( $[\mathbf{B}] = N/A^2 \cdot A/m^2 \cdot m = N/(A \cdot m) = T$  no MKS, no CGS é Gauss)

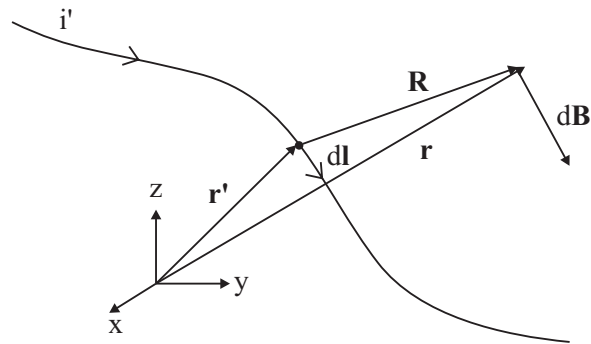


Figura 6.15: Elemento de Campo Magnético

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad \mathbf{R}_u = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Podemos fazer uma analogia com o campo elétrico.

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

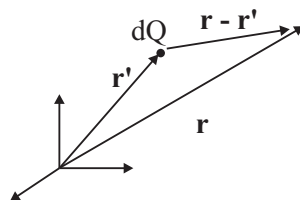


Figura 6.16: Elemento de Campo Elétrico



Exemplo: Um fio retilíneo de comprimento  $l$  é percorrido por uma corrente  $i$ . Qual o campo magnético produzido por esse fio num ponto  $P$  situado a uma altura  $y$  do fio? Considere que  $P$  está sobre uma *perpendicular* que passa pelo centro do fio.

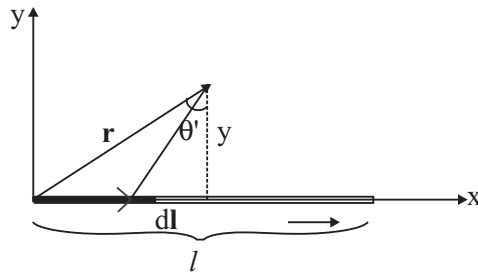


Figura 6.17: Campo Magnético de fio retilíneo com corrente

Antes de resolver o problema note que o fio deve fazer parte de um circuito fechado. Nós consideraremos que o resto do circuito não contribui significativamente para o campo em  $P$ .

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$d\mathbf{l} = dx' \mathbf{i} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = dx' \mathbf{i} \times [(x - x')\mathbf{i} + y\mathbf{j}] = y dx' \mathbf{k}$$

Portanto

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{y dx' \mathbf{k}}{[(x - x')^2 + y^2]^{3/2}}$$

$$\mathbf{B} = \int_{fio} d\mathbf{B} = \int_0^l \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{y dx' \mathbf{k}}{[(x - x')^2 + y^2]^{3/2}}$$

Precisamos calcular

$$\int_0^l \frac{dx'}{[(x-x')^2 + y^2]^{3/2}} = \int_x^{x-l} \frac{-dY}{(Y^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$x - x' = Y, \quad dx' = -dY, \quad Y = y \operatorname{tg} \theta, \quad Y^2 = y^2 \operatorname{tg}^2 \theta, \quad dY = y \operatorname{sec}^2 \theta d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-y \operatorname{sec}^2 \theta d\theta}{y^3 \operatorname{sec}^3 \theta} = -\frac{1}{y^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = -\frac{1}{y^2} \sin \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\text{onde } x = y \operatorname{tg} \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{y} \text{ e } \quad x - l = y \operatorname{tg} \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x-l}{y}$$

Portanto:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i y}{4\pi} \cdot \frac{-1}{y^2} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \mathbf{k} = \frac{\mu_0 i (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)}{4\pi y} \mathbf{k}$$

**Limite de fio infinito:**

Como poderemos a partir dessa resposta obter o resultado para um fio infinito?

Reescrevendo

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i \Delta}{4\pi y} \mathbf{k}$$

Onde  $\Delta = (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$ , fazendo

$$\sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \theta_2 = -\frac{x-l}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Expandindo  $\Delta$  em série de Taylor em torno de  $y = 0$

$$\Delta = 2 - O(y)$$

De onde tiramos:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi y} \mathbf{k}$$

Mais tarde recalcularemos o campo magnético de um fio infinito de maneira mais fácil, explorando a simetria do problema (fio infinito, sem efeitos de borda ou

inogeneidades do campo magnético) e uma das equações de Maxwell (a lei de Ampère-Maxwell).

Exercício: Calcule o campo magnético produzido por uma espira circular de raio  $R$  no seu eixo de simetria, produzido por uma corrente uniforme  $i$ .

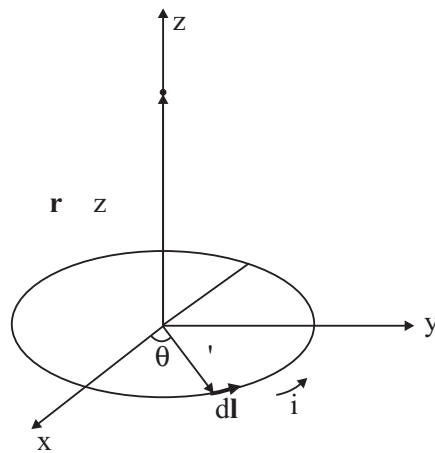


Figura 6.18: Campo Magnético de uma espira circular

Aqui o circuito que mantém a corrente estacionária  $i$  na espira não é mostrado. Estamos, de fato, interessados no campo produzido só pela espira.

Usamos a lei de Biot-Savart:

Um elemento de corrente  $i d\mathbf{l}$  localizado , com relação à origem pelo vetor  $\mathbf{r}$ , a partir da origem um campo magnético  $d\mathbf{B}$  dado por

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Devido à simetria circular do problema no plano  $xy$  e também com relação ao eixo  $z$  (simetria axial) será conveniente trabalharmos em coordenadas cilíndricas:

$$d\mathbf{l} = R d\theta \vec{\theta} \quad \mathbf{r} = z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i} + y' \mathbf{j}$$

$$x' = R\cos\theta \quad y' = R\sin\theta \quad z' = 0$$

$$\mathbf{r}' = (x', y', z') \quad \mathbf{r} = (0, 0, z)$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = z\mathbf{k} - R\cos\theta\mathbf{i} - R\sin\theta\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{z^2 + R^2}$$

Precisamos calcular o produto vetorial

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Como escrevemos  $d\mathbf{l} = R d\theta \vec{\theta}$ , precisamos escrever  $\vec{\theta}$  (um vetor que é tangente ao círculo da espira) em termos dos versores fixos  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ .

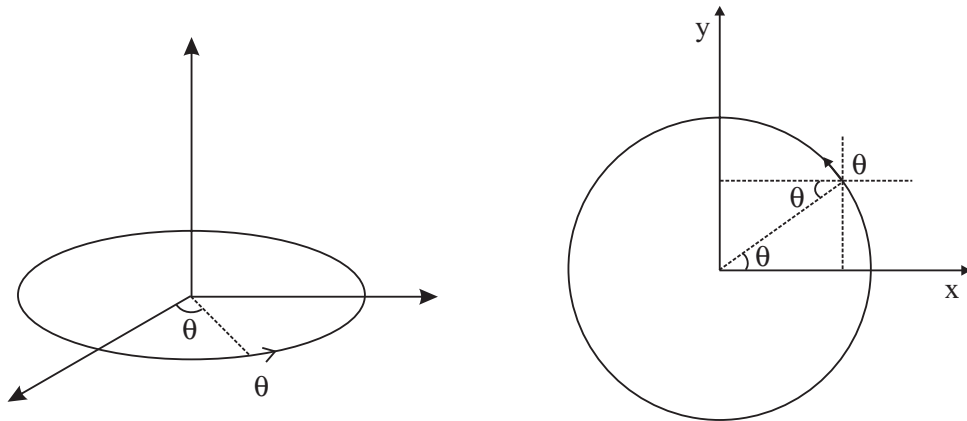


Figura 6.19: Versor tangente ao círculo da espira

$$\vec{\theta} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$$

Assim

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = R d\theta \vec{\theta} \times (z\mathbf{k} - R\cos\theta\mathbf{i} - R\sin\theta\mathbf{j})$$

Usando a equação para  $\theta$  obtemos:

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = R d\theta [z\cos\theta\mathbf{i} + z\sin\theta\mathbf{j} + R\mathbf{k}]$$

De modo que

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} R d\theta \frac{[z\cos\theta\mathbf{i} + z\sin\theta\mathbf{j} + R\mathbf{k}]}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B} = \int_{\text{espira}} d\mathbf{B} = \int_0^{2\pi} \frac{R\mu_0 i}{4\pi} \frac{[z\cos\theta\mathbf{i} + z\sin\theta\mathbf{j} + R\mathbf{k}]}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\theta$$

As integrações angulares sobre  $\theta$  são elementares. Vale a pena chamar a atenção que as componentes  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  do campo magnético se anulam (verifique!) devido à simetria axial do problema.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\mathbf{k}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Exatamente no centro da espira  $z = 0$  e temos

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\mathbf{k}}{R^3} = \frac{\mu_0 i}{2R} \mathbf{k}$$

Suponha que tivéssemos duas espiras separadas por uma distância  $D$ , com correntes em sentidos opostos, de intensidade  $i$ . Qual seria o campo magnético num ponto sob o eixo de simetria das espiras a meia distância uma da outra? E se as correntes tivessem o mesmo sentido?

Um outro limite é interessante.

Considere um ponto a uma distância muito grande da espira ( $z \gg R$ ). Então

$$\frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{z^3} - \frac{3}{2} \frac{R^2}{z^5}$$

e

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} \left( \frac{1}{z^3} - \frac{3}{2} \frac{R^2}{z^5} \right) \mathbf{k} \quad (z \gg R)$$

Para  $z \gg \gg R$  podemos aproximar

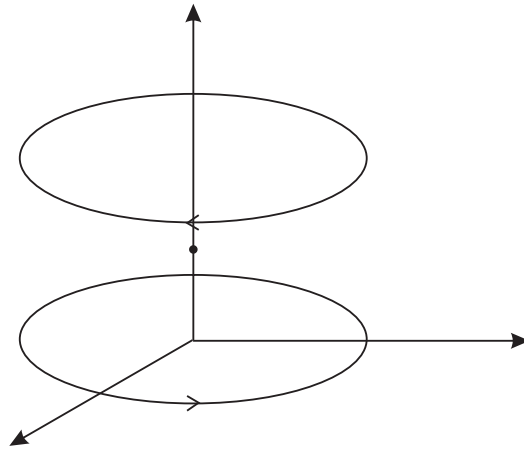


Figura 6.20: Duas espiras com correntes em sentido oposto

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} \mathbf{k} = \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \mathbf{m}$$

Onde  $\mathbf{m} = i\pi R^2 \mathbf{z}$  é chamado momento de dipolo magnético.

De fato, uma espira tem um momento de dipolo magnético associado que está sempre perpendicular ao plano definido pela área da espira e cujo módulo é dado por  $A$ , independente do fato de a espira ser circular ou não.

1) Considere o circuito abaixo, onde as linhas curvas são semi-círculos com centro comum,  $C$ . As porções retas são perfeitamente horizontais. Encontre o campo magnético em  $C$ .

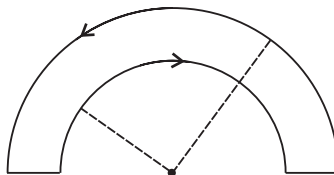


Figura 6.21: Cálculo do campo na origem

Usando a lei de Biot-Savart para os segmentos retos,  $d\mathbf{l}$  e  $\mathbf{r}$  são paralelos e portanto  $d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = 0$ . Logo os segmentos retos *não* contribuem para o campo magnético em  $C$ .

Lei de Biot-Savart (para corrente estacionária):

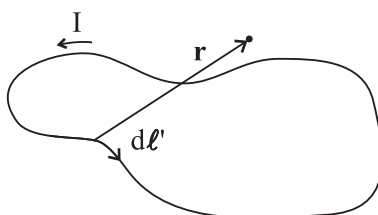


Figura 6.22: Lei de Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}}{r^2}$$

O campo magnético no ponto  $C$  devido ao semi-círculo de raio  $b$  é metade do de um círculo de raio  $b$ .

$$\mathbf{B}_b = \frac{\mu_0 I}{4b} \quad (\text{para fora do papel})$$

Ao passo que para o semi-círculo de raio  $a$

$$\mathbf{B}_a = \frac{\mu_0 I}{4a} \quad (\text{entrando no papel})$$

Logo:

$$\mathbf{B}_T = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (\text{entrando no papel})$$

### 6.2.1 Descrição do campo magnético gerado por um solenóide

**\* Regra da mão direita para determinação do sentido do campo magnético:**

*O físico dinamarquês Oersted percebeu que a agulha de uma bússola é desviada pela ação magnética exercida pelo campo magnético gerado pelo fio quando ele é percorrido por uma corrente elétrica. Quando o fio é retilíneo, as linhas de campo*

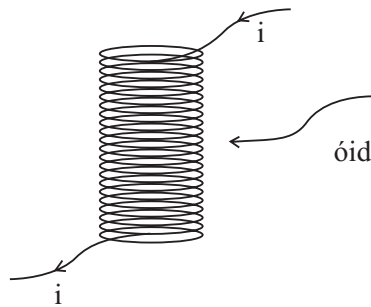


Figura 6.23: Solenóide

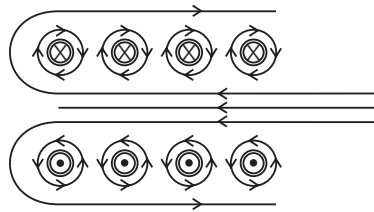


Figura 6.24: Corte transversal do solenóide

*descrevem círculos ao redor do fio. Além disso a orientação do campo é tal que se o dedo polegar da mão direita for colocado sobre o fio no sentido que a corrente flui, os outros dedos da mão que envolvem o fio definem o sentido de circulação do campo.*

O campo magnético gerado pelo fio numa região bem próxima a ele apresenta-se em forma de circunferências em torno do fio. Existe um cancelamento entre as porções de campo magnético adjacentes ao fio (veja figura) ao passo que ao longo do solenóide acontece uma superposição construtiva de linhas de campo, produzindo um campo magnético que é aproximadamente uniforme. Em breve calcularemos tal campo, dado a corrente e a densidade de espiras que forma o solenóide.

Exercício: Um disco de raio  $R$  homogêneo tem uma carga  $Q$  distribuída por sua superfície e gira com velocidade angular  $\omega$  constante. Suponha que a densidade de carga seja constante ao longo da sua superfície. Calcule o campo magnético a uma altura  $h$  acima do eixo do disco.

Podemos considerar o disco como uma superposição densa de espiras de espessura  $dr'$ , cada qual com uma corrente  $i$ .



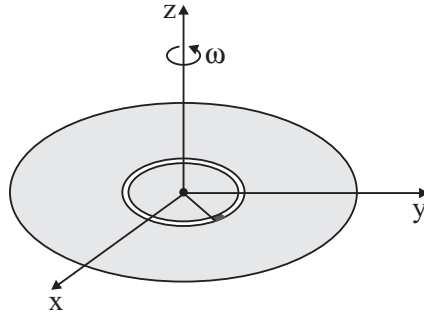


Figura 6.25: Disco homogêneo girando

Vamos calcular a “corrente” associada a uma “espira” de espessura  $dr'$  sobre o disco

$$\frac{Q}{\pi R^2} = \frac{dQ}{dA}$$

onde  $dA = r' dr' d\theta$ ,  $Q$  é a carga do disco,  $dQ'$  a carga contida na espira. A corrente elétrica é definida como

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

Logo

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r' dr' d\theta Q}{\pi R^2 dt}$$

E, como  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$i = r' dr' \omega \frac{Q}{\pi R^2}$$

Agora podemos usar a lei de Biot e Savart

Para uma espira lembremos que

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{r'^2}{(h^2 + r'^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

Logo esta espira contribui como um  $d\mathbf{B}$  para o campo do disco

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2 \pi R^2} r' dr' \frac{r'^2}{(h^2 + r'^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

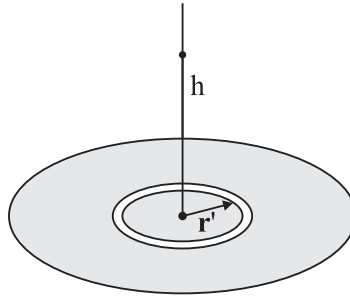


Figura 6.26: Coordenadas do problema

$$\mathbf{B}_{disco} = \int_0^R \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \frac{r'^3}{(h^2 + r'^2)^{3/2}} dr' \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B}_{disco} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \left( \frac{R^2 + 2h^2}{\sqrt{h^2 + R^2}} - 2 \right) \mathbf{k}$$

No centro do disco ( $h \rightarrow 0$ ), temos  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R} \mathbf{k}$ .

### 6.3 A lei de Gauss do Magnetismo: A lei de Ampère

Devido à inexistência de monopólos magnéticos, a lei imediata análoga à lei de Gauss é

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Ela traduz a conjectura teórica e uma evidência experimental sobre as fontes de campo magnético: Não existem monopólos magnéticos. Se houvesse uma carga magnética teríamos uma integral de superfície de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  diferente de zero. Esta é uma das chamadas Equações de Maxwell, que estudaremos mais tarde. No entanto existe uma outra lei, a lei de Ampère, que no magnetismo faz o papel que a lei de Gauss fazia na eletrostática i.e; vai nos permitir resolver de forma muito simples problemas com um alto grau de simetria

Seja  $C$  qualquer caminho fechado no espaço e seja  $I$  uma corrente líquida que flui através de  $C$ . Então

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

Esta é a lei de Ampère

Da mesma forma que a lei de Gauss, a lei de ampère é bastante útil na solução de problemas com simetria o suficiente para tornar a integral de linha trivial para se resolver.

Exemplo) Considere dois cilindros condutores coaxiais, paralelos a um eixo que tomaremos como o eixo  $z$ . O condutor interno tem raio  $a$  e carrega uma corrente  $I$  uniformemente distribuída sobre uma área transversal e ao longo da direção  $z$ . O condutor externo tem raio interno  $b$  e raio externo  $c$  e carrega uma corrente  $I$  uniformemente distribuída sobre sua área transversal e ao longo da direção  $z$ . Encontre o campo magnético nas regiões:

- a)  $a < r < b$
- b)  $b < r < c$
- c)  $r > c$

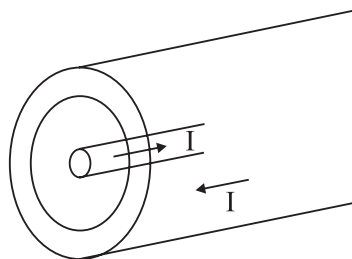


Figura 6.27: Cilindros condutores coaxiais

O problema possui simetria suficiente para usar a lei de Ampère-Maxwell. O circuito é um círculo centrado no eixo e  $\mathbf{B} = B(r)\vec{\phi}$ .

\*  $a < r < b$

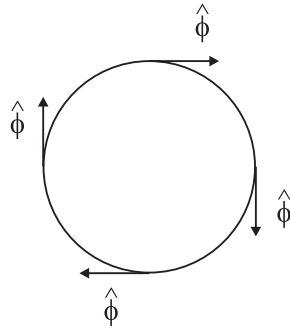


Figura 6.28: Versores tangentes ao circuito

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$\mathbf{B} \cdot 2\pi r = \mu_0(-I) \longrightarrow \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{\phi}$$

\*  $b < r < c$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r$$

$I = -I + JA$  (nem toda corrente externa contabiliza)

Onde  $A = \pi(r^2 - b^2)$ ,  $J = \frac{I}{A_{total}} = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$

Portanto:

$$B2\pi r = \mu_0 \left( -I + \frac{I\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} \right)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[ \frac{(r^2 - c^2)}{(c^2 - b^2)} \right] \vec{\phi}$$

\*  $r < c$

corrente total =  $-I + I = 0$

$$\Rightarrow B = 0$$

Exemplo) Campo de um fio infinito com corrente  $I$   
 Aplicação simples da lei de Ampère:



Figura 6.29: Fio infinito com corrente  $I$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \longrightarrow \mathbf{B} \cdot 2\pi h = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}$$

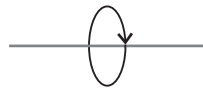


Figura 6.30: Campo em torno do fio

\* O átomo de hidrogênio consiste em um próton e um elétron que pode (para algumas finalidades) ser suposto em órbita circular ao redor do próton de raio  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} (\cong 0.53 \cdot 10^{-8} cm)$  com velocidade  $v = \frac{e^2}{\hbar}$ . Aqui  $e$  é a carga eletrônica e  $\hbar \cong 10^{-27} erg \cdot s$ , é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ , e  $m$  é a massa do elétron. A que corrente equivale esta carga em revolução? Qual é a intensidade (em Gauss) do campo magnético no próton criado pelo elétron?

*Solução:*

$$v = \frac{e^2}{\hbar} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{e^2}{\hbar c}$$

Onde  $c$  é a velocidade da luz. Esta razão é freqüentemente encontrada em física atômica e vale:

$$\frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

Então  $v$  é relativamente pequeno comparado a  $c$ ,  $v \sim \frac{c}{137}$ . O número de revoluções por segundo é  $\frac{v}{2\pi a_0}$

$$I = \frac{ev}{2\pi a_0} = 3.16 \cdot 10^6 \frac{esu}{s}$$

\* *Observação:*  $1C \sim 3 \cdot 10^9 ues$ .

Expresso em Ampères isso é  $\frac{3.16 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^9} \cong 10^{-3} A$ .

Mais exemplo...) Usando a Lei de Ampère, calcule o campo magnético no interior de um solenóide muito longo formado por  $n$  espiras por unidade de comprimento e percorrido por uma corrente  $i$ .

*Solução:*

Como vimos anteriormente, um solenóide muito longo possui um campo magnético praticamente homogêneo no seu interior, com linhas de campo paralelas ao seu eixo:

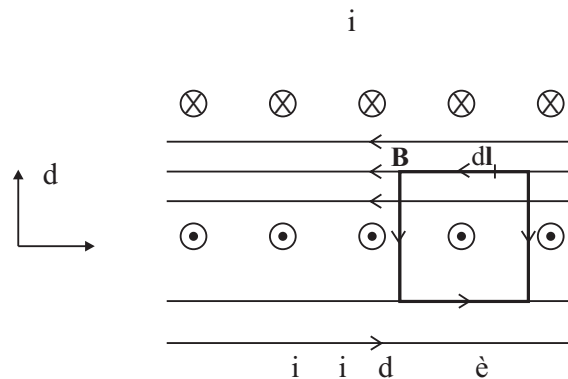


Figura 6.31: Circuito de Ampère

O trajeto  $AB$  é paralelo ao campo magnético, assim como  $CD$ . Porém podemos colocar o trajeto  $CD$  do circuito tão longe quanto queiramos de modo que o campo aí se anula. Assim a única contribuição importante na Lei de Ampère é a da integral de linha ao longo de  $AB$ .

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \sim \int_{AB} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Ba$$

onde  $a$  é o comprimento do circuito  $AB$ .

Pela Lei de Ampère

$$Ba = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{a}$$

onde  $I$  é a corrente envolvida pelo circuito de Ampère: Tal circuito corta  $na$  espiras. Logo

$$I = nai$$

Portanto

$$B = \frac{\mu_0 nai}{a} = \mu_0 ni$$

$$\mathbf{B} = -\mu_0 ni \hat{\mathbf{x}}$$

Exemplo) O Toróide

Considere um solenóide, parecido com o do exercício anterior, de tamanho  $C$  e que o torçamos unindo suas extremidades até formar um toróide. Usando a Lei de Ampère, calcule seu campo magnético.

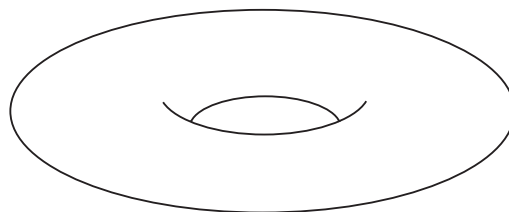


Figura 6.32: A forma de um toro

*Solução:*

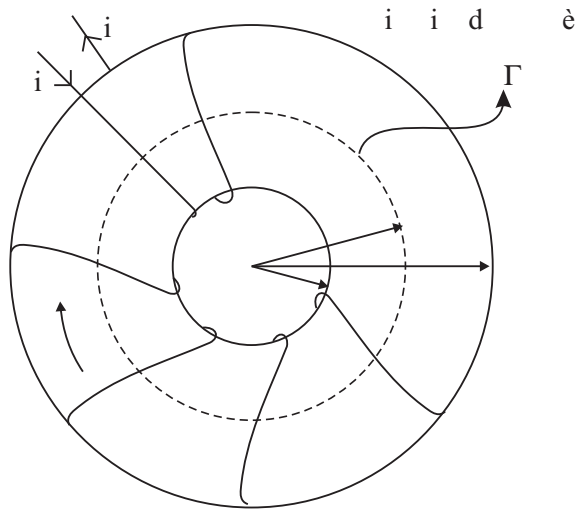


Figura 6.33: Circuito no toróide

Encontrar o campo magnético dentro de um toróide é um bom exemplo do poder da Lei de Ampère.

A corrente que é compreendida pela linha pontilhada é o número de *loops* vezes a corrente em cada *loop*.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 N i$$

$$B = \frac{\mu N i}{2\pi r}$$

O campo magnético no interior do toróide deve ser circular pela simetria cilíndrica envolvida na situação, e

$$\mathbf{B} = 0 \quad \text{para} \quad r < a \quad \text{ou} \quad r > b$$

Para  $r > a$  não há corrente que corte uma superfície circular definida por uma curva de Ampère ao passo que para  $r > b$  a corrente que cortaria a superfície definida pela curva de Ampère entra e sai o mesmo número de vezes de forma que a corrente líquida é zero.

O toróide magnético é muito útil com aplicações que vão desde cabeçotes de gravadores até Tokamaks.



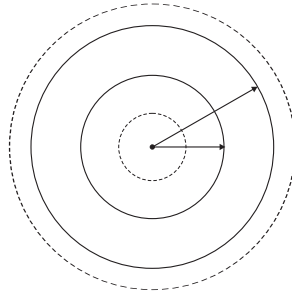


Figura 6.34: Vista de cima do toro

Problemas resolvidos:

a) Um cilindro condutor de raio interno  $a$  e raio externo  $b$  é atravessado por uma densidade superficial de corrente  $\mathbf{J}$  paralela ao seu eixo e homogênea em todos os pontos do cilindro. Calcule o campo magnético a uma distância  $r$  do eixo do cilindro para  $r < a$ ,  $a < r < b$  e  $r > b$ .

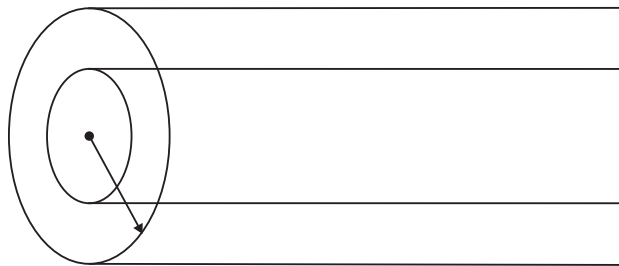


Figura 6.35: Cilindro condutor

b) (Este problema está proposto em KLE2; vide final do capítulo) Suponha agora que o condutor cilíndrico de raio  $b$  atravessado por uma densidade superficial de corrente  $\mathbf{J}$ , homogênea e paralela ao seu eixo tenha uma cavidade cilíndrica de raio  $a < b$ , onde portanto  $\mathbf{J} = 0$ , cujo eixo, paralelo ao do cilindro maciço esteja a uma distância  $R$ , conforme a figura abaixo

Calcule o campo magnético no interior do condutor na parte da reta que une

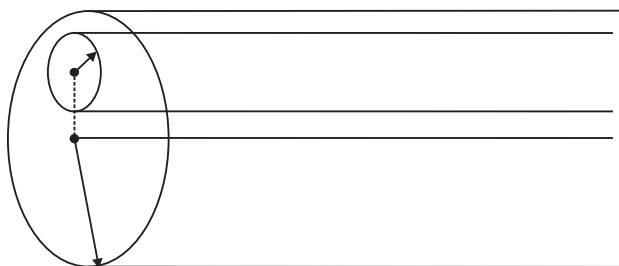


Figura 6.36: Cilindro condutor com cavidade não concêntrica

o centro dos dois cilindros.

*Solução:*

Podemos resolver este problema de duas formas, sendo que a segunda será útil para resolvermos o item *B*.

A densidade de corrente superficial  $\mathbf{J}$  pode ser definida da seguinte forma

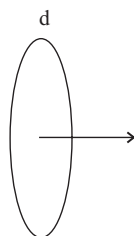


Figura 6.37: Elemento de área

Considere um elemento infinitesimal de área  $d\mathbf{S}$ . Seja  $\hat{\mathbf{n}}$  um vetor unitário normal a  $d\mathbf{S}$ .

O número de portadores de carga por unidade de tempo que atravessam  $d\mathbf{S}$  e que definem a corrente elétrica através dele, depende, obviamente, da orientação de  $d\mathbf{S}$ , isto é, de  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Assim, definimos

$$dI = \mathbf{J}d\mathbf{S}$$

Para fixar idéias, considere um fio condutor de raio  $R$  onde flui uma corrente homogênea  $I$ .

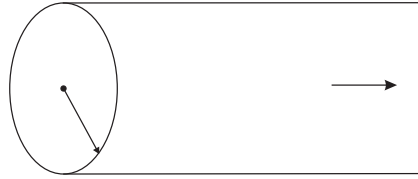


Figura 6.38: Direção da densidade de corrente

Neste caso, podemos definir  $\mathbf{J} = \frac{I}{A}\hat{\mathbf{k}} = \frac{I}{\pi R^2}\hat{\mathbf{k}}$ , pois  $I = \frac{I}{A}\hat{\mathbf{k}} \cdot A\hat{\mathbf{k}}$ .

Voltando ao nosso problema, como o cilindro condutor possui um buraco que é totalmente simétrico com relação ao seu eixo, podemos usar a Lei de Ampère construindo um circuito de Ampère de raio  $r$ ;  $a < r < b$ , onde, por simetria, o campo magnético é o mesmo em todos os pontos. A linha de campo magnético coincide com nosso circuito de Ampère de modo que podemos afirmar que

$$\mathbf{B} = B_r\hat{\theta}$$

Onde  $\hat{\theta}$  é um versor sempre tangente ao circuito de Ampère.

Assim

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I \\ B_r 2\pi r &= \mu_0 J \pi (r^2 - a^2) \\ B_r &= \frac{\mu_0 J \pi (r^2 - a^2)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J (r^2 - a^2)}{r} \end{aligned}$$

Para  $r < a$ ,  $\mathbf{B} = 0$  (Por quê?) ao passo que para  $r > b$ ,  $\mathbf{B} = B'_r\hat{\theta}$ , onde

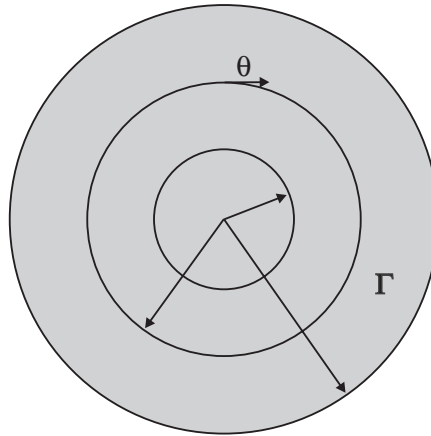


Figura 6.39: Circuito de Ampère

$$B'_r 2\pi r = \mu_0 J \pi (b^2 - a^2)$$

$$B'_r = \frac{\mu_0 J (b^2 - a^2)}{2r}$$

Alternativamente, poderíamos pensar da seguinte forma: suponhamos que tivéssemos um cilindro **maciço** percorrido por uma corrente com  $\mathbf{J}$  constante de raio  $b$ , e que, no seu interior houvesse uma região de raio  $a$ , cilíndrica, em que houvesse uma corrente de sentido contrário com densidade de corrente  $-\mathbf{J}$ . Então, nessa região  $\mathbf{J} = 0$ , o que simularia o buraco do ponto de vista eletromagnético.

Numa região a uma distância  $r$  com  $a < r < b$  teríamos duas contribuições:

1) a do cilindro interno de raio  $a$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$B 2\pi r = -\mu_0 J \pi a^2$$

2) a do cilindro maior

$$B 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2$$

$$B_r = \frac{\mu_0 J \pi (r^2 - a^2)}{2\pi r}$$

que coincide com a resposta anterior.

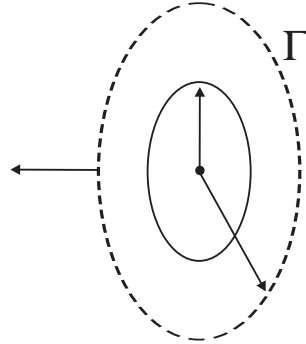


Figura 6.40: Densidade de corrente

Para fazer o item *B* é essencial que raciocinemos da 2ª maneira, uma vez que a quebra de simetria introduzida pela caviade cilíndrica feita no cilindro maior faz com que a Lei de Ampère não possa ser aplicada imediatamente, pois não há curva ampereana simples que explore a simetria do campo magnético.

### 6.3.1 Fontes de campo magnético: Correntes estacionárias e as leis de Biot-Savart e Ampère

*Cargas* estacionárias, como já aprendemos, produzem campos elétricos que são constantes no tempo. Daí o nome *eletrostática*.

*Correntes* estacionárias produzem campos magnéticos que não variam no tempo. A teoria das correntes estacionárias é chamada *magnetostática*.

**Cargas estacionárias → Campos elétricos constantes: Eletrostática**

**Correntes estacionárias → Campos magnéticos constantes:  
Magnetostática**

O que queremos dizer com *Corrente estacionária*?

É um fluxo contínuo e imutável de cargas em movimento, sem que haja acúmulo delas em nenhum lugar.

Note que uma carga puntiforme que se move NÃO CONSTITUI, nem de longe, uma corrente estacionária. Se está num dado ponto do espaço, num dado tempo, no instante seguinte não estará mais lá. Isto dificulta fazer uma analogia simples com os cálculos que aprendemos a fazer nos capítulos anteriores para determinar campos eletrostáticos a partir de distribuições de cargas. No caso da magnetostática somos forçados a encarar imediatamente o problema de distribuições *externas* de correntes.

## 6.4 Torques sobre espiras com correntes e sobre ímãs

Num campo magnético uniforme, uma espira portadora de corrente elétrica não está sujeita a uma força resultante (que será nula, como mostra a figura), mas a um torque que tende a provocar rotação.

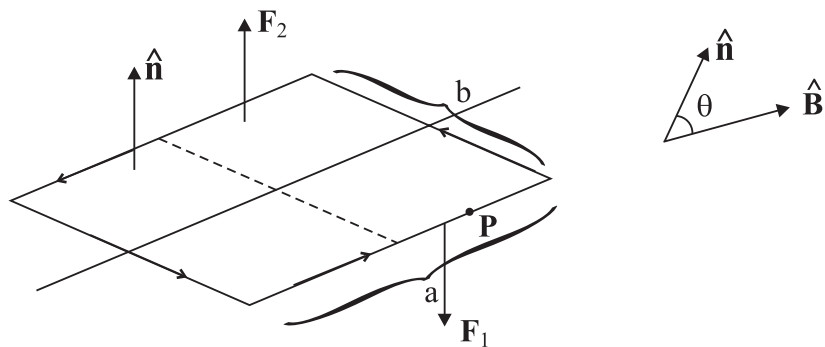


Figura 6.41: Torque em espira com corrente

A força resultante sobre a espira é nula. As forças  $F_1$  e  $F_2$  têm módulos

$$F_1 = F_2 = IaB$$

Essas duas forças constituem um par de forças cujo torque em relação a um ponto não depende da posição do ponto. Consideremos o ponto  $P$ .

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \quad \longrightarrow \quad |\mathbf{T}_2| = rF_2 \sin \theta$$

$$= F_2 b \sin \theta = IabB \sin \theta = IAB \sin \theta$$

$A$  é a área da espira. Esse torque tende a fazer a espira girar até que  $\mathbf{B}$  fique perpendicular ao plano da espira e o torque será então nulo.

*Definição (conveniente) de momento de dipolo magnético:*

$$\vec{\mu} = NIA\hat{\mathbf{n}}$$

Com isso podemos escrever

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \mathbf{B}$$

A expressão acima foi deduzida para uma espira retangular, mas deve valer para qualquer espira.

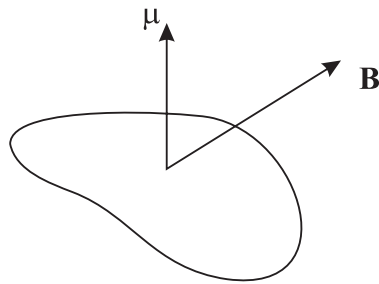


Figura 6.42: Momento de dipolo magnético

### 6.4.1 Exercícios sobre torque

1) Uma espira circular tem o raio de  $2,0\text{cm}$ , 10 voltas de fio condutor e uma corrente de  $2\text{A}$ . O eixo da espira faz um ângulo de  $30^\circ$  com um campo magnético de  $8000\text{G}$ . Calcular o módulo do torque sobre a espira.

$$|\vec{\tau}| = |\vec{\mu} \times \mathbf{B}| = \mu B \sin \theta = \mu B \sin 30^\circ$$

$$\text{Mas } \mu = NIA = 10(3\text{A})\pi(0,02)^2 = 3,77 \times 10^{-2} \text{Am}^2$$

$$\begin{aligned} \tau &= \mu B \sin \theta = (3,77 \times 10^{-2} \text{Am}^2)(0,8\text{T}) \sin 30^\circ \\ &= 1,51 \times 10^{-2} \text{Nm} \end{aligned}$$

2) Uma espira circular de raio  $R$ , massa  $m$  e corrente  $I$  está pousada sobre uma superfície horizontal áspera. Um campo magnético  $\mathbf{B}$  é paralelo ao plano da espira. Qual o valor de  $I$  para que um lado da espira seja erguido pelo campo magnético?

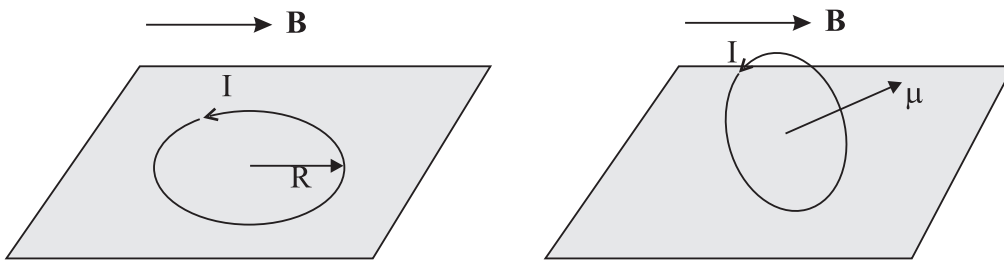


Figura 6.43: Espira circular sendo erguida

A espira principiará a se erguer quando o torque magnético for igual ao torque gravitacional.

$$|\tau_m| = \mu B = I\pi R^2 B$$



$$|\tau_g| = mgR = I\pi R^2 B$$

$$I = \frac{mg}{\pi RB}$$

O que acontece quando  $I$  for aumentada? Quem está fazendo trabalho?

3) Um disco não condutor de massa  $M$  e raio  $R$  tem uma densidade superficial de carga  $\sigma$  e gira com velocidade angular  $\omega$  em torno de seu eixo. Calcular o momento magnético deste disco girante.

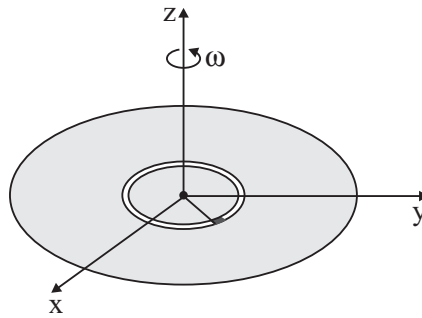


Figura 6.44: Disco homogêneo girando

Primeiro calculamos o momento magnético de um elemento circular de raio  $r$  e largura  $dr$  sobre o disco e depois integramos sobre todos os elementos.

$$dq = \sigma dA = 2\pi r dr$$

Se a carga for positiva, o momento magnético tem a direção de  $\omega$

$$d\mu = (dI)A = dI\pi r^2$$

$$dI = dq \frac{\omega}{2\pi} = \sigma dA \frac{\omega}{2\pi} = \sigma 2\pi r dr \frac{\omega}{2\pi} = \sigma \omega r dr$$

$$d\mu = (dI)\pi r^2 = (\sigma \omega r dr)\pi r^2 = \pi \sigma \omega r^3 dr$$

$$\mu = \int \pi \sigma \omega r^3 dr = \frac{1}{4} \pi \sigma \omega R^4$$

*Observações importantes:* Em termos da carga total do disco,  $Q = \sigma \pi R^2$  e o momento magnético  $\vec{\mu} = \frac{QR^2\vec{\omega}}{4}$ . O momento angular do disco é

$$\mathbf{L} = \frac{MR^2}{2} \vec{\omega} \quad e \quad \vec{\mu} = \frac{Q}{2M} \mathbf{L}$$

Estes resultados são gerais.

## 6.5 A lei de Faraday

Até agora estudamos fenômenos elétricos e magnéticos de forma completamente separada: a eletrostática e a magnetostática são assuntos completamente fechados sobre si mesmos. Aprendemos ainda que cargas elétricas estacionárias geram campos elétricos assim como cargas em movimento (correntes) geram campos magnéticos.

A partir de agora vamos aprender que tanto o campo elétrico quanto o campo magnético podem ser gerados por uma fonte que não está mencionada acima.

**Campos Elétricos podem ser gerados por  $\rightarrow$  Distribuições estáticas de cargas ou Campos Magnéticos que variam no tempo Campos Magnéticos podem ser gerados por  $\rightarrow$  Distribuições contínuas de cargas ou Campos Elétricos que variam no tempo**

A lei de Faraday trata do caso em que um campo elétrico é gerado a partir da variação temporal do *fluxo* do campo magnético. Começamos então a entender o porquê do nome *Eletromagnetismo*. Esse nome só tem sentido se fenômenos tipicamente elétricos possam gerar fenômenos tipicamente magnéticos e vice-versa.

### 6.5.1 Fatos experimentais que levaram Faraday à sua descoberta

Em 1831 Michael Faraday anunciou uma série de experimentos, incluindo três que podem ser caracterizados como segue:

*Experimento 1:* Ele puxou um loop de corrente através de um campo magnético. Notou que uma corrente fluia no loop condutor.

*Experimento 2:* Ele moveu o magneto para a esquerda como na figura. Novamente, uma corrente circulou através do loop.

*Experimento 3:* Deixou o campo magnético e o loop em repouso e alterou a *intensidade* do campo magnético (ele usou um eletromagneto e variou a corrente no fio). Mais uma vez, obteve uma corrente através do loop.

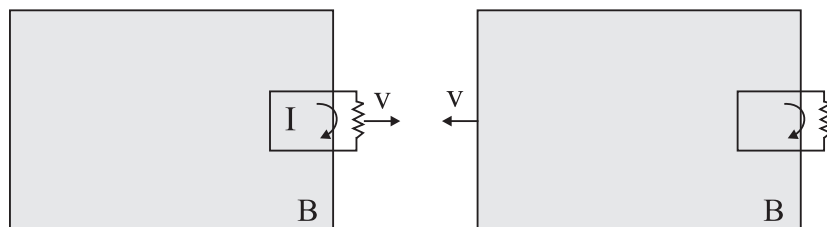


Figura 6.45: Lei de Faraday

Você vai notar imediatamente que o campo elétrico, aquele que produz o movimento das cargas, é gerado pela variação temporal de alguma coisa. Que coisa é essa? Não é o campo magnético, pois este fica constante nos dois primeiros casos. Não é o movimento da *espira*, que fica parada no exemplo 3.

Repare então que existe uma grandeza que varia nos três exemplos: o FLUXO DE CAMPO MAGNÉTICO através da área definida pelo loop.

A lei de Faraday pode então ser formulada em palavras assim:

*A alteração do fluxo magnético através de um material condutor gera uma força eletromotriz  $\mathcal{E}$  através do mesmo.*

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad , \quad \Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Faraday não foi capaz de determinar este sinal de menos. Quem postulou o sinal, que se verifica em todos os casos conhecidos foi Lenz: a força eletromotriz gera uma corrente que tende a se OPOR À VARIAÇÃO DO FLUXO.

1º Exemplo: Vamos quantificar as observações de Faraday.

Uma espira retangular de dimensões  $l$  e  $w$  e resistência  $R$  se desloca com velocidade constante  $v$  para a direita, como está na figura. A espira continua a se mover com essa velocidade através de uma região que também tem um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  dirigido perpendicularmente da frente para trás da página e cobrindo uma distância  $3w$ . Graficar o fluxo, a força eletromotriz induzida e a força externa que atua sobre a espira em função da posição da espira no campo.

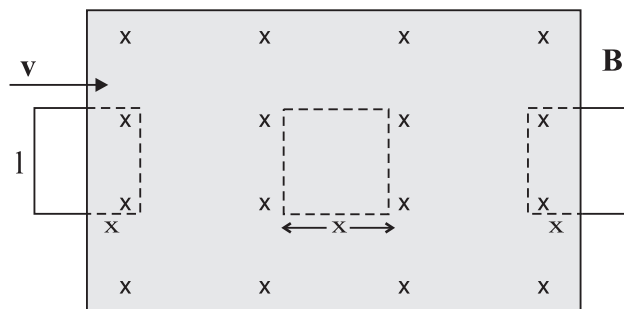


Figura 6.46: Variação do fluxo

$$\Phi_n = Blx$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Blv$$

$$\mathcal{E} = -Blv$$

Note que somente haverá variação de fluxo magnético nos dois casos extremos. Quando a espira estiver totalmente contida no campo magnético,  $dx/dt = 0$ .

Graficamente, temos a figura 6.56

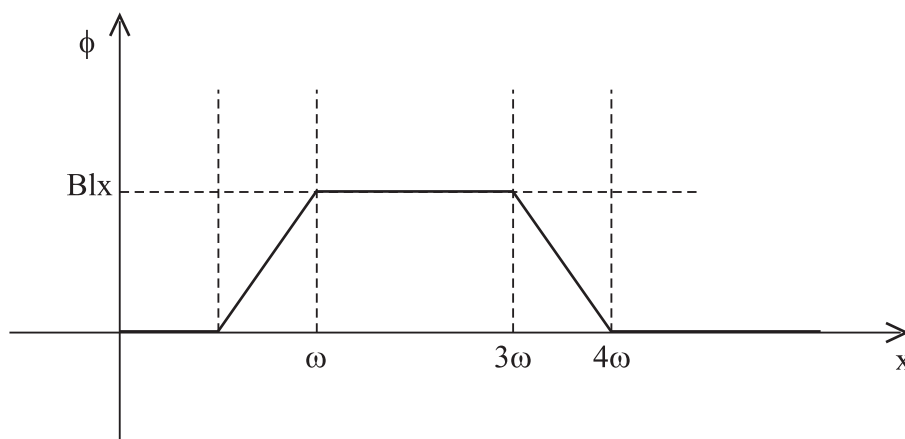


Figura 6.47: Gráfico do fluxo

Correspondendo a essa figura, temos que a força eletromotriz induzida em cada trecho pode ser representada no gráfico seguinte.

Exercício 2) Forças e conservação da Energia no caso anterior.

No nosso exemplo de uma espira que se move para a direita, há uma força magnética sobre a barra devido à corrente induzida

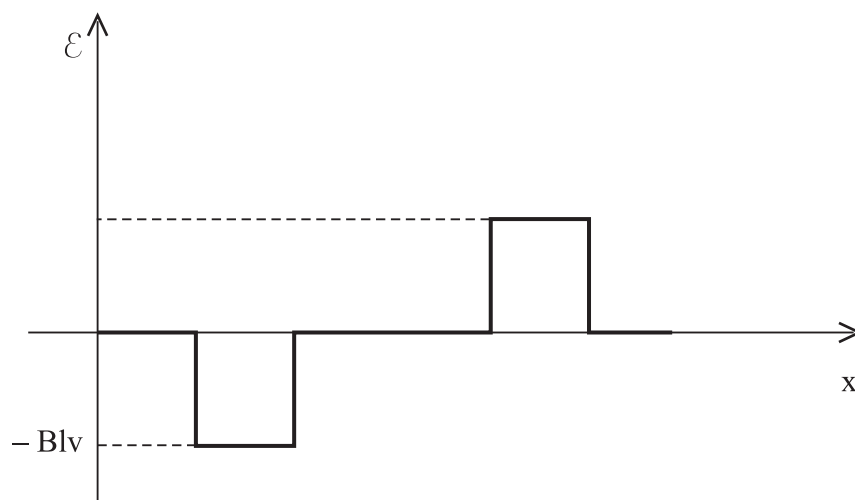


Figura 6.48: Gráfico da fem

$$\mathbf{F}_m = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Esta força tende a *opor-se ao movimento*. Portanto, se a espira desloca-se para a direita com velocidade constante, tem de haver uma força externa para a *direita* de módulo  $IlB$ .

Quando a barra se desloca com velocidade constante, a injeção de potência pela força externa sobre a barra aparece no aquecimento do resistor. A injeção de potência no circuito é

$$P = Fv = IlBv = I^2R$$

ou 
$$IR = Blv = \mathcal{E}$$

Então vemos, pelo balanço de energia do circuito, que a força eletromotriz tem de ser aquela que calculamos pela lei de Faraday, diretamente.

Quem faz esse trabalho? Certamente **NÃO É** a força magnética, que *nunca* produz trabalho, mas o agente externo.

Como ficam as forças e a conservação de energia do ponto de vista de um elétron na barra?

Se a corrente, por exemplo; na barra vertical está dirigida para cima, significa que os elétrons deslocam-se para baixo.

A velocidade de um elétron típico tem uma componente vertical para baixo, a velocidade de migração, e uma componente horizontal  $v$  igual à velocidade do loop. A velocidade *líquida* do elétron, então faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal, como mostra a figura 6.58.

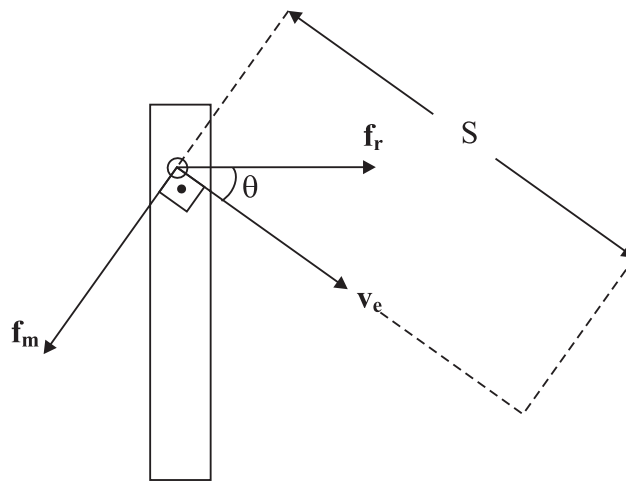


Figura 6.49: Forças envolvidas num condutor

Temos então  $v_e \cos \theta = v$ .

A força magnética  $\mathbf{f}_m = -e\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}$  é *perpendicular* a  $\mathbf{v}_e$  e portanto não realiza trabalho. Seu papel é *defletir* o caminho do elétron.

Note que se  $\mathbf{f}_m$  fosse a única força que atua sobre o elétron, não seria possível sua permanência na barra, à medida que ela se deslocasse à direita. A BARRA EXERCE uma força horizontal  $\mathbf{f}_r$  sobre o elétron para equilibrar a componente horizontal de  $\mathbf{f}_m$ ,

$$f_r = f_m \sin \theta$$

Como dissemos, em virtude de  $\mathbf{f}_m$  ser perpendicular ao movimento do elétron,

não efetua trabalho. O trabalho efetuado sobre o elétron é feito pela força  $\mathbf{f}_r$ . Quando o elétron se desloca para baixo na barra, esta desloca-se para a direita, portanto o elétron segue uma trajetória inclinada de comprimento  $S$  tal que

$$l = S \sin \theta$$

O trabalho efetuado sobre o elétron à medida que ele percorre o comprimento total da barra é

$$W = f_r \cos \theta S = (f_m \sin \theta) \cos \theta S = f_m \cos \theta l$$

$$= ev_e B \cos \theta l = eB(v_e \cos \theta)l = eBvl$$

Portanto vemos que o trabalho por unidade de carga é a força eletromotriz  $Bvl$  de acordo com o resultado da lei de Faraday.

### Exercícios

1) Uma linha de cargas com condutividade  $\lambda$  é grudada na borda de uma roda de raio  $b$ ; a qual é então suspensa horizontalmente, como mostra a figura, de tal forma que está livre para girar. Na região central, até o raio  $a$ , existe um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}_0$ . Se o campo for desligado, o que acontecerá?

O campo magnético variável vai induzir um campo elétrico, que vai circular em torno do eixo do disco. Esse campo elétrico exerce uma força nas cargas que estão na borda e o disco começa a girar. De acordo com a lei de Lenz, ele vai girar numa direção que tende a restaurar o fluxo magnético inicial. Então o movimento será no sentido anti-horário.

Qualitativamente, temos

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

Note que quem é responsável pela rotação é o campo ELÉTRICO. Por isso pusemos campo magnético apenas na região *interior* à borda, de tal forma que o



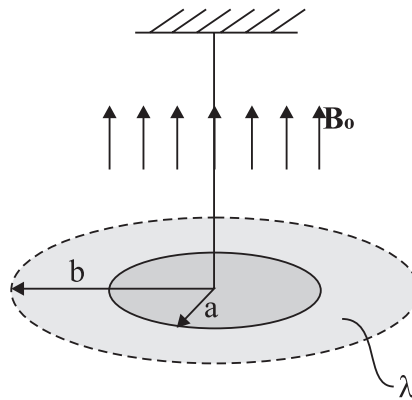


Figura 6.50: Disco com linha de cargas

campo magnético é zero na região da borda. Portanto é mesmo o campo elétrico que faz o disco girar.

Exercício 2: Um fio longo, reto, carrega uma corrente que varia lentamente com o tempo,  $I(t)$ . Determine o campo elétrico induzido como função da distância do fio.

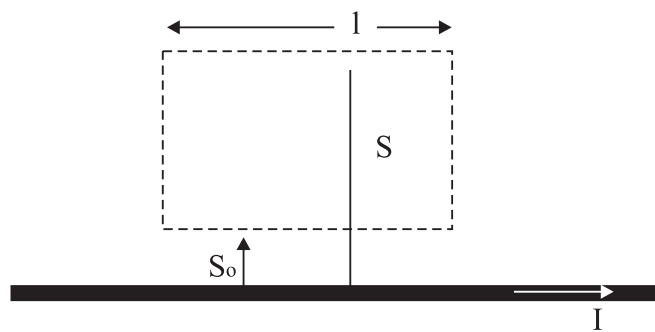


Figura 6.51: Fio longo com corrente

O campo magnético gerado pelo fio em cada ponto  $s$  da espira é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

E circula em torno do fio. Neste exemplo  $\mathbf{E}$  estará paralelo ao eixo. Para o loop retangular do qual estamos tratando,

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= E(s_0)l - E(s)l = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_{s_0}^s \frac{1}{s'} ds' = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln \frac{s}{s_0} \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\mathbf{E}(s) = \left[ \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln \frac{s}{s_0} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

Exercício 3: Força magnética sobre uma barra deslizante.

Uma barra, de massa  $m$  e comprimento  $l$ , desliza sobre dois trilhos paralelos, sem atrito, na presença de um campo magnético uniforme, dirigido perpendicularmente da frente para o verso da página. A barra recebe uma velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$  e depois fica livre. Achar a velocidade da barra como função do tempo.

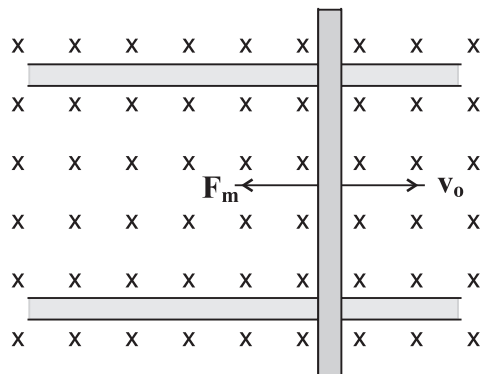


Figura 6.52: Barra deslizante em campo magnético

Note que inicialmente a corrente induzida tem sentido anti-horário e que a força magnética é

$$|\mathbf{F}_m| = -IlB$$

Onde o sinal negativo mostra que ela vai tender a *retardar* o movimento. Como esta é a única força horizontal que atua sobre a barra, pela segunda lei de Newton temos

$$m \frac{dv_x}{dt} = -IlB$$

Mas, sabemos que a corrente induzida é  $I = Blv/R$  o que nos dá

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{R} v_x$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{B^2 l^2}{mR} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B^2 l^2}{mR} t = -\frac{t}{\tau}$$

$$v_x = v_0 e^{-t/\tau}$$

Portanto, vemos que a velocidade da barra diminui exponencialmente com o tempo. Conhecendo  $v$ , podemos também determinar

$$I = \frac{Blv}{R} = \frac{Blv_0 e^{-t/\tau}}{R}$$

$$\mathcal{E} = IR = Blv_0 e^{-t/\tau}$$

Exercício 4: Vimos que um fluxo magnético variável induz uma f.e.m e uma corrente numa espira condutora. Devemos então concluir que *há criação de campo elétrico num condutor em consequência de um fluxo magnético variável*. Na realidade, a lei da indução eletromagnética mostra que *sempre* há a geração de um campo elétrico por um fluxo magnético variável, MESMO NO VÁCUO, onde não

estão presentes cargas. Vemos imediatamente que esse campo elétrico tem propriedades bastante diferentes do campo eletrostático induzido por distribuições de cargas.

Podemos ilustrar esse ponto pela análise de uma espira condutora de raio  $r$ , situado num campo magnético uniforme, perpendicular ao plano da espira

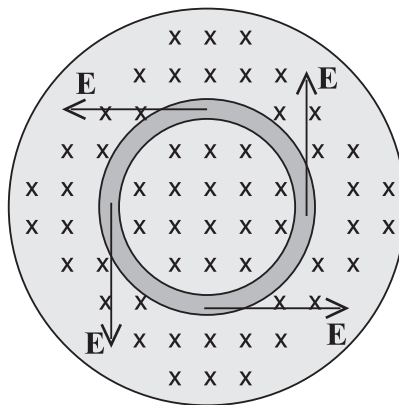


Figura 6.53: Espira condutora e força elétrica induzida

Se o campo magnético se altera com o tempo, então a lei de Faraday nos diz que se induz uma f.e.m. dada por  $-d\Phi_m/dt$ . A corrente induzida que se produz, é consequência do aparecimento do campo elétrico induzido  $\mathbf{E}$  que deve ser tangente à espira em todos os pontos. O trabalho necessário para se deslocar uma carga de prova  $q$  uma volta ao longo da espira é  $q\mathcal{E}$ . Uma vez que a força elétrica sobre essa carga é  $q\mathbf{E}$ , o trabalho efetuado sobre essa força, ao deslocar a carga uma volta ao longo da espira é dado por  $qE2\pi r$  onde  $r$  é o raio genérico.

Estas duas expressões do trabalho devem ser *iguais*. Portanto

$$q\mathcal{E} = qE \cdot 2\pi r \longrightarrow E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

Com este resultado, mais a lei de Faraday, descobrimos que o campo  $\mathbf{E}$  assim gerado é

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

Se a variação de  $B$  com o tempo for especificada, o campo elétrico induzido pode ser calculado, e sua direção deve ser tal que se *oponha* à variação do fluxo.

É importante compreender que este resultado vale também NA AUSÊNCIA de um condutor. Isto quer dizer que uma *carga livre* num campo magnético variável sofrerá a ação do mesmo campo elétrico.

Também é importante reconhecer que o campo elétrico *induzido* NÃO É UM CAMPO conservativo, pois  $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$ ! Ele nunca poderá ser um campo eletrostático!

Exercício 5: Campo elétrico de um solenóide: Um solenóide comprido, de raio  $R$ , tem  $n$  espiras por unidade de comprimento e conduz uma corrente sinusoidal variável conforme  $I = I_0 \cos \omega t$ .

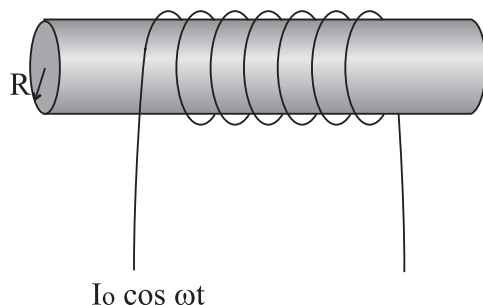


Figura 6.54: Solenóide envolto por arame

a) Determinar o campo fora do solenóide.

Primeiramente consideremos um ponto externo e tomemos a curva da integral de linha como um círculo com centro no eixo do solenóide. Por simetria, vemos que o módulo de  $\mathbf{E}$  é constante sobre essa curva e, tangente a ela em todos os pontos. O fluxo magnético que atravessa a curva é

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}B(\pi R^2) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E \cdot 2\pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

Como  $B = \mu_0 n I$  e  $I = I_0 \cos \omega t$ , temos

$$E \cdot 2\pi r = +\pi R^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega R^2}{2r} \sin \omega t \quad r > R$$

Então vemos que o campo elétrico varia sinusoidalmente com o tempo e sua intensidade decai com  $1/r$  para pontos fora do solenóide.

b) Qual o campo elétrico no interior do solenóide a uma distância  $r < R$  do outro?

$$E \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} r \sin \omega t \quad r < R$$

Isto mostra que a amplitude de  $E$  *no interior* do solenóide cresce linearmente com  $r$  e varia sinusoidalmente com o tempo.

## 6.5.2 Geradores e motores

Os geradores e motores são aparelhos que operam na base da indução eletromagnética. Um grande ímã é construído, dentro do qual espiras podem girar em torno de seu eixo de simetria. Nas usinas de força a energia necessária para girar a espira pode provir de várias fontes, por exemplo; numa usina hidrelétrica, a água de uma queda d'água é dirigida contra as palhetas de uma turbina a fim de provocar o movimento rotatório; numa usina termelétrica, o calor da queima de carvão ou de óleo converte a água em vapor d'água e esse vapor é dirigido contra as palhetas de

uma turbina. Quando a espira gira no campo, o fluxo magnético através da mesma se altera com o tempo e, num circuito externo, se induz uma corrente.

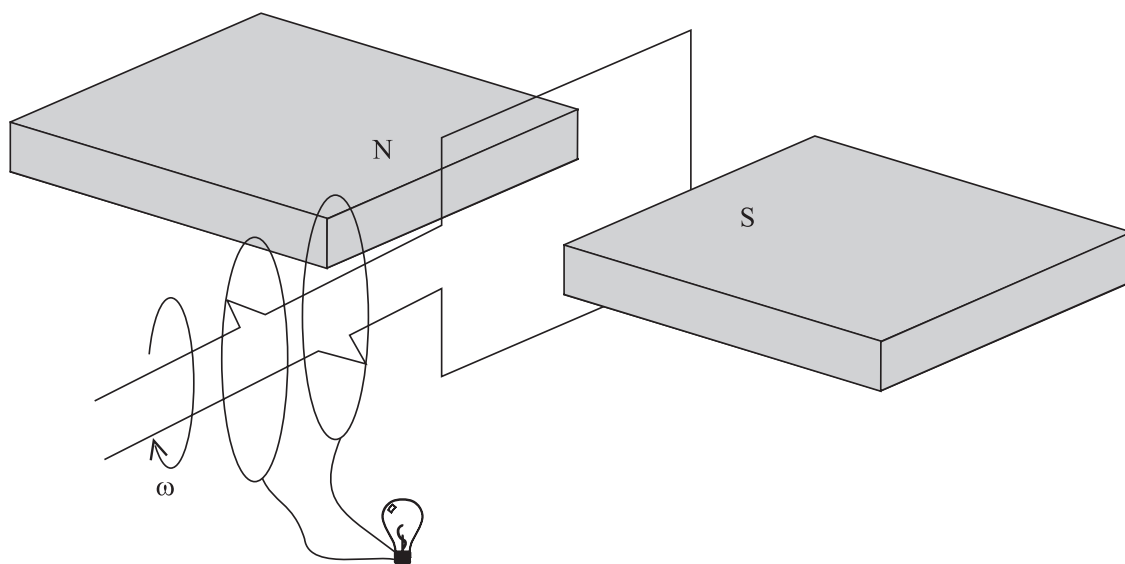


Figura 6.55: Gerador de energia

A fim de discutir quantitativamente o gerador, suponhamos que a bobina tenha  $N$  voltas, todas com a mesma área  $A$  e suponhamos que gire com uma velocidade angular  $\omega$ . Se  $\theta$  for o ângulo entre o campo magnético e a normal ao plano da bobina, então o fluxo magnético através da bobina em qualquer instante será dado por

$$\Phi_m = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

Portanto

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -NBA \frac{d \cos \omega t}{dt} = NBA \omega \sin \omega t$$

Este resultado mostra que a f.e.m. varia sinusoidalmente com o tempo e esta f.e.m tem valor máximo

$$\mathcal{E}_{max} = NBA\omega$$

Que ocorre quando  $\omega t = 90^\circ$  ou  $270^\circ$ . Em outras palavras,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max}$  quando o campo magnético estiver no plano da bobina e a taxa de variação do fluxo for máximo. Além disso,  $\mathcal{E} = 0$  se  $\theta = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ , i.e, quando  $\mathbf{B}$  for perpendicular ao plano da bobina e a taxa do fluxo for nula.

A frequência desses geradores é da ordem de  $60Hz$ . Essa é a frequência que alimenta nossas lâmpadas. Por que não as vemos, então, piscar? Porque nossos olhos não conseguem resolver esse intervalo de frequência.