http://www.fisica.ufmg.br/feletromagnetismo/NEMES/capitulo-4.pdf

Capítulo 4

Potencial, Trabalho e Energia Potencial Eletrostática

Existe uma conexão entre o potencial elétrico e a energia potencial, como veremos, mas não devemos esquecer que são duas quantidades essencialmente distintas.

4.1 O que é o potencial eletrostático?

O potencial elétrico é uma grandeza *escalar*, a partir da qual podemos determinar o campo elétrico. Isto significa que é freqüentemente mais simples, do ponto de vista algébrico, determinar o potencial eletrostático e a partir dele, então, obter o campo elétrico. A razão pela qual é possível estabelecer uma conexão direta entre uma grandeza escalar e outra vetorial é uma propriedade importante dos campos eletrostáticos, completamente análoga à que têm as forças conservativas na Mecânica de Newton. Neste caso, lembremos que, se uma força $\mathbf{F}$ for conservativa, isso se expressa matematicamente da seguinte forma

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = V_M(\mathbf{b}) - V_M(\mathbf{a})$$

E esta integral não depende do caminho, mas apenas dos pontos inicial e final. V_M é o potencial mecânico, um escalar, função apenas dos pontos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Então podemos, *sempre que a força for conservativa*, definir uma grandeza escalar, o potencial, como na equação acima. E é fácil verificar que vale também a equação

$\mathbf{F} = -\nabla V_M$, pois se $\nabla \times \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = -\nabla V_M$, uma vez que $\nabla \times (\nabla V_M) = 0$, $\forall\ V$.

E na eletrostática, qual o análogo dessa situação? Vamos estudar o rotacional do campo produzido por uma carga puntiforme q, na origem de um sistema de coordenadas

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Lembrando que $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, e que o operador $\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$, temos que a componente x do rotacional de $\mathbf{E}$ é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} \left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] &= \\ = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} \left[-\frac{3}{2}\frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3}{2}\frac{2zy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] &= 0 \end{aligned}$$

E analogamente para as outras duas componentes. Então podemos sempre escrever, em analogia com a Mecânica

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad V_E(\mathbf{r}) = -\int_{origem}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad ou \quad \mathbf{E} = -\nabla V_E$$

Daqui para a frente, vamos denominar o potencial eletrostático apenas por $V(\mathbf{r})$. Vamos então estudar e comentar a expressão integral para $V(\mathbf{r})$

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{origem}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

A origem é em geral escolhida como um ponto de referência conveniente. Por isso, V só depende de $\mathbf{r}$. Essa quantidade, assim definida, é o potencial eletrostático.

Observações importantes:

1) Vantagem da descrição através do potencial eletrostático: - Como vimos, uma vez conhecido $V(\mathbf{r})$ é muito simples obter $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, por uma operação de derivação. Uma questão se coloca, então, imediatamente: o potencial é uma quantidade *escalar* enquanto que o campo elétrico é um *vetor*. Como é então possível, a partir de uma única função, obter informação sobre *três* componentes do campo? A resposta a essa pergunta é que as três componentes do campo não são realmente independentes pois $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, ($\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{i}} + E_y\hat{\mathbf{j}} + E_z\hat{\mathbf{k}}$) o que implica

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Então, o campo eletrostático não é um campo qualquer, é um campo com uma propriedade importante, que permite reduzir um problema vetorial a um problema escalar.

2) O ponto de referência O: - Claramente existe uma ambigüidade essencial na definição do potencial, uma vez que a origem O é arbitrária. Mudar a origem, é equivalente a alterar o potencial por uma constante.

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{O'}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{O'}^{O} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{O}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = C + V'(\mathbf{r})$$

Onde $C = \int_{O'}^{O} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. É claro, também, que alterar o potencial por uma constante, em *nada muda* a diferença de potencial.

$$V'(\mathbf{b}) - V'(\mathbf{a}) = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})$$

Independente da origem escolhida.

Também, adicionar uma constante ao potencial não vai alterar o valor do campo elétrico, uma vez que a derivada de uma constante é zero e

$$\nabla V = \nabla V'$$

3) Evidentemente, o potencial, em si, não tem nenhum significado físico, pois, o valor do potencial em qualquer ponto pode sempre ser ajustado através de uma nova escolha conveniente de origem. Neste sentido é parecido com a grandeza altitude.

Por exemplo, à pergunta qual a altitude de São Paulo, a resposta mais provável seria: está acima do nível do mar. Mas poderíamos igualmente tomar outro ponto como referência, Campos do Jordão, por exemplo. Essas escolhas alterariam o valor da altitude, mas em nada alterariam a situação real da cidade. *A única quantidade com interesse intrínseco* é a *diferença de altidudes*, que será a mesma independentemente da referência escolhida.

Na eletrostática, da mesma forma que o nível do mar é, para altitudes, uma referência natural, a referência natural é um ponto infinitamente afastado da carga que gera o potencial. Normalmente o que se faz é "escolher o zero no infinito".

Devemos apenas ter especial atenção com o caso de uma distribuição infinita de cargas. Nesse caso, se escolhermos o infinito como origem, teremos um potencial infinito

$$V(z) = -\int_{\infty}^{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(z - \infty) \ !$$

Então, uma possibilidade conveniente nesse caso, seria escolher a origem do sistema de referência como o nosso ponto "O". Neste caso

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(z - 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

Uma quantidade perfeitamente bem definida.

Existem duas maneiras de se calcular o potencial $V(r)$. Uma delas é usando o campo elétrico, se ele for conhecido; a outra é usar a lei de Coulomb novamente.

O potencial devido a uma carga puntiforme é dado por

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Aqui também, é claro, vale o princípio da superposição. Então, para uma distribuição de cargas puntiformes podemos escrever

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

E se a distribuição for contínua, fazemos como antes, definimos um elemento diferencial de potencial, devido a um elemento diferencial de carga

$$dV(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}$$

E procedemos à integração, após ter especificado as qualidades relevantes, tais como referencial, o ponto de observação, a origem etc. Vamos ver isto em exemplos.

Exercícios sobre cálculo do potencial eletrostático

P1) Encontre o potencial devido a uma casca esférica de raio R, que possui uma densidade superficial de carga uniforme. Use o infinito como ponto de referência

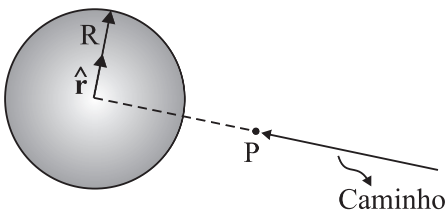

Figura 4.1: Potencial da casca esférica

Método 1: Vamos usar o campo elétrico no ponto P, que já sabemos calcular pela lei de Gauss. Sua expressão é, para pontos fora da esfera

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$V(r) = -\int_0^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

Como essa integral independe do caminho, escolhemos a linha reta que vem do infinito até P. O elemento $d\mathbf{l}$ nesse caminho é

$$d\mathbf{l} = -dr\hat{\mathbf{r}}$$

Então

$$V(r) = +\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

Para pontos dentro da esfera devemos separar a integral em duas partes, uma vez que o campo dentro da esfera é *diferente* do campo fora da esfera e em particular, neste caso é zero.

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\int_{\infty}^{R}\frac{q}{r^2}dr - \int_{R}^{r}0dr\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$

Note que o campo elétrico dentro da casca esférica é nulo, mas o potencial NÃO É NULO. Ele é uma vez constante. Isto não traz problema algum, uma vez que a relação entre V e $\mathbf{E}$ é um gradiente, que é zero se V for constante.

Em problemas deste tipo *não se esqueça* de fazer o cálculo SEMPRE PARTINDO DO PONTO DE REFERÊNCIA. É sempre tentador pensar que podemos obter o potencial dentro da esfera *usando apenas* o campo dentro da efera. NÃO É ASSIM. Se colocarmos uma outra casca esférica de raio R', $R' > R$, concêntrica com a primeira, o potencial dentro de R MUDA, mesmo que $\mathbf{E}$ continue a ser nulo. A lei de Gauss nos garante que as cargas fora da superfície de Gauss considerada não alteram o campo em pontos sobre essa superfície, MAS NÃO HÁ O EQUIVALENTE À LEI DE GAUSS PARA O POTENCIAL!

Método 2: Usamos a definição de potencial, proveniente da lei de Coulomb.

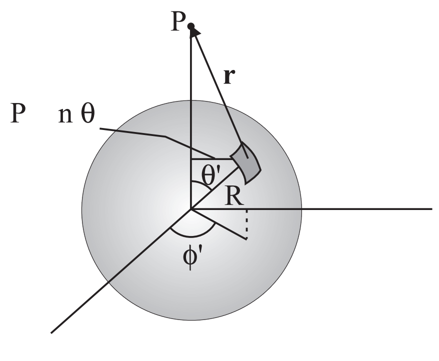

Figura 4.2: Procedimento da integração

$$dV(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}$$

$$dq = \sigma R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' \ , \qquad \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

$$dV(r) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta'}}$$

Integrando, vem

$$V(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{R^2 \sin\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta'}}$$

A integral em ϕ' pode ser efetuada imediatamente, uma vez que o integrando independe de ϕ'.

$$x = 2Rz\cos\theta' \quad \longrightarrow \quad dx = -2Rz\sin\theta' d\theta'$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}R^2 \cdot 2\pi \int_{-2Rz}^{+2Rz} \frac{-dx/2Rz}{\sqrt{R^2 + z^2 - x}} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{R}{z}2\left[\sqrt{R^2 + z^2 - x}\right]_{+2Rz}^{-2Rz}$$

$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left[\sqrt{R^2 + z^2 + 2Rz} - \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz}\right]$$

$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left[\sqrt{(R + z)^2} - \sqrt{(R - z)^2}\right]$$

Neste ponto devemos ter cuidado ao extrair a raiz quadrada: para pontos FORA da esfera, $z > R$ e portanto $\sqrt{(R - z)^2} = z - R$; para pontos DENTRO da esfera $\sqrt{(R - z)^2} = R - z$. Assim

$$V(z) = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 z}\left[(R + z) - (z - R)\right] = \frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 z} \qquad\qquad (r > R)$$

$$V(z) = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 z}\left[(R + z) - (R - z)\right] = \frac{R\sigma}{\epsilon_0} \qquad\qquad (r \leq R)$$

Note que o resultado obtido pelos dois métodos é o mesmo, como deveria ser.

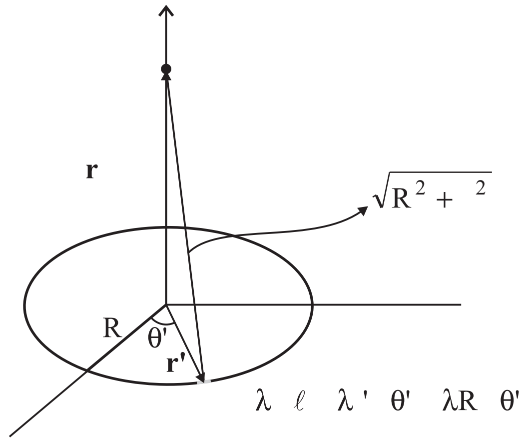

Figura 4.3: Espira de cargas

P2) Considere uma espira de raio R uniformemente carregada com densidade linear de cargas constante λ. Qual o potencial elétrico a uma distância z do centro?

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\lambda d\theta'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$V(z) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R d\theta'}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}2\pi$$

Portanto

$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{Q}{2\pi R}\frac{R}{2\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

- Note que para pontos $z >> R$, esse potencial se reduz ao de uma carga puntiforme.

- Note que foi muito mais fácil fazer este exercício do que o seu equivalente para o campo elétrico, quando precisamos notar, a componente x do campo elétrico é nula por simetria e calcular $E_y = |\mathbf{E}|\cos\alpha = |\mathbf{E}|z/\sqrt{R^2+z^2}$. Então, como comentamos, para obter o campo elétrico do anel é mais fácil calcular o potencial e depois obter a expressão através da relação

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}\hat{\mathbf{z}}\right] = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{\mathbf{z}}$$

O campo em $z = 0$ é nulo (também por simetria!)

P3) Calcule o potencial sobre o eixo de simetria de um disco uniformemente carregado com densidade superficial de cargas σ, e raio R. Obtenha, a partir do potencial, a expressão para o campo elétrico.

$$dV(z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \qquad dq = \sigma r' d\theta' dr'$$

$$V(z) = \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^R dr' \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$$

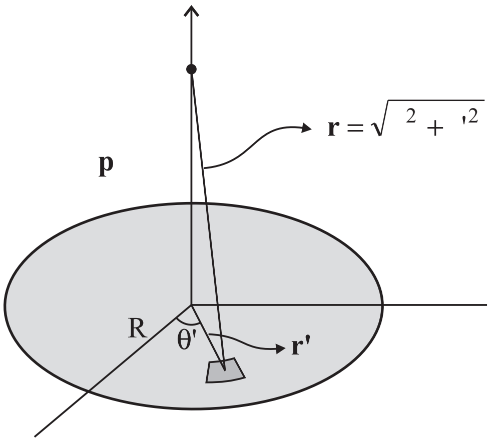

Figura 4.4: Disco carregado

Aqui novamente, a integral em $d\theta'$ pode ser feita imediatamente. A integral em r' é, como antes, feita a partir da substituição

$$u = z^2 + r'^2 \quad \longrightarrow \quad du = 2r'dr'$$

Obtemos para $V(z)$ a expressão

$$V(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}[\sqrt{z^2 + R^2} - z]$$

Outra vez, como era de se esperar, para $z >> R$, obtemos o potencial de uma carga puntiforme. O campo elétrico será dado por

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}V(z) = \frac{Q}{2\epsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Como antes.

P4) Calcule o potencial elétrico gerado por um plano infinito de cargas de densidade superficial σ.

O campo elétrico de um plano infinito de cargas é dado, como já discutimos, pela expressão

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$$

($\hat{\mathbf{n}}$ normal à superfície)

O potencial associado será

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{origem}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Seja $\hat{\mathbf{z}}$ a direção perpendicular ao plano. Escolhemos, então, por conveniência $d\mathbf{l} = dz\hat{\mathbf{z}}$. A origem será tomada, neste caso, pelos motivos que já discutimos, como $z = 0$

$$V(z) = -\int_0^z |\mathbf{E}|dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z \qquad z > 0$$

Se estivermos na região onde $z = 0$,

$$V(z) = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z$$

Podemos juntar os dois resultados e escrever

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z| \qquad \forall\ z$$

P5) Qual é a diferença de potencial entre os dois planos de cargas de densidades $+\sigma$ e $-\sigma$ da figura 4.5?

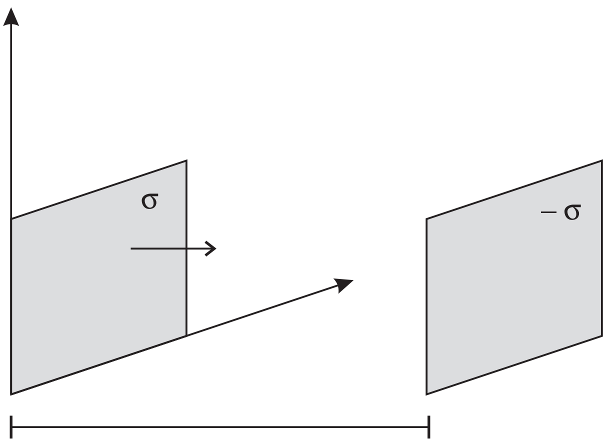

Figura 4.5: Planos de carga

O campo elétrico entre os planos é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{n}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$$

A diferença de potencial é

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_{plano\ +\sigma}^{plano\ +\sigma} dV = -\int_{plano\ +\sigma}^{plano\ +\sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int \hat{\mathbf{k}} \cdot [dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}]$$

$$= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^L dz = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^L dz = -\frac{\sigma L}{\epsilon_0}$$

P6) Potencial de um dipolo elétrico. Considere a figura 4.6: Calcule o campo desse dipolo no ponto P. Depois faça a aproximação de que ($|\mathbf{r}| >> d$).

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}$$

Mas $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_- + \mathbf{d}$ então

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_- - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}\right]$$

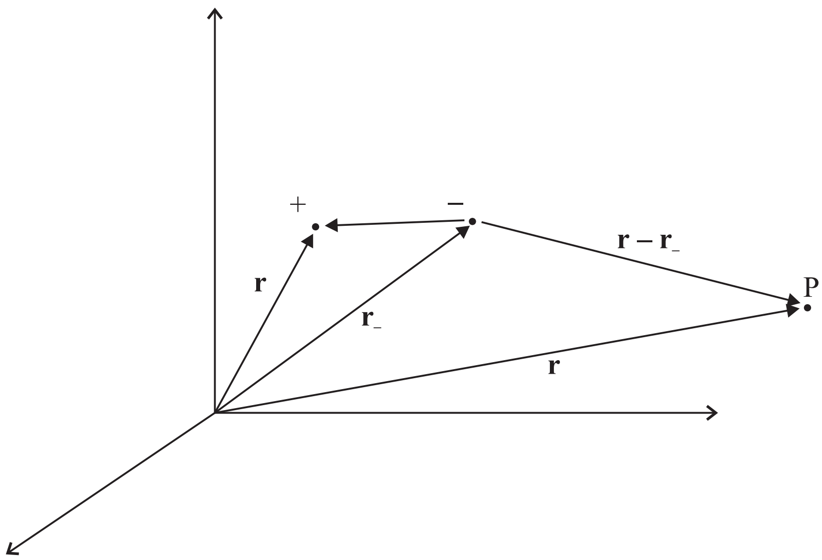

Figura 4.6: Potencial elétrico de um dipolo

Essa é a expressão exata para o potencial de um dipolo. E teremos, em geral

$$\mathbf{E}_{dipolo}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$$

Vamos considerar agora o caso em que $r >> d$, que é o caso usual. Isto nos permite fazer expansões no parâmetro $d/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|$, por exemplo

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_- - \mathbf{d}|} = [|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^2 - 2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)\cdot\mathbf{d} + d^2]^{-1/2}$$

$$= |\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^{-1}\left[1 - \frac{2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|}\right]^{-1/2}$$

Expandimos em série de Taylor,

$$\left[1 - \frac{2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|}\right]^{-1/2} \cong 1 + \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^2}$$

e teremos

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_- - \mathbf{d}|} \cong |\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^{-1}\left[1 + \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^2}\right]$$

Voltando agora à equação que define V do dipolo, teremos

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_- - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|}\right]$$

$$\cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^{-1}\left[1-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^2}\right]^{-1/2} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|}\right]$$

$$\cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^3} = \frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|^3}$$

Onde $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$.
Você deve ser capaz de fazer sozinho as seguintes questões:

Calcule o potencial devido às seguintes distribuições de carga, no ponto P.

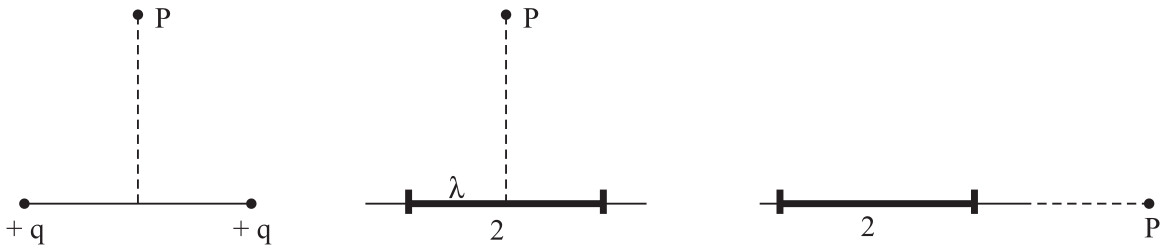

Figura 4.7: Distribuições de carga

P7) O campo elétrico dentro de uma esfera de raio R contendo uma densidade de carga uniforme, está radialmente direcionada e seu módulo é

$$E(\mathbf{r}) = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

onde q é a carga total da esfera e r a distância ao centro da esfera.

a) Determine $V(r)$ supondo que $V = 0$ na origem.

$$V(\mathbf{r}) = -\int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_0^{\mathbf{r}} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}dr = -\frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

b) Determine a diferença de potencial entre o centro da esfera e a superfície. Sendo q positivo, qual é o ponto que tem maior potencial?

$$\Delta V = V(0) - V(R) = \frac{qR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} > 0 \quad para \quad q > 0$$

Então o ponto que tem maior potencial é a superfície.

P8) Em um trabalho que foi escrito em 1911, Ernst Rutherford disse: "*Para se ter alguma idéia das forças necessárias para desviar uma partícula α através de um grande ângulo, considere um átomo contendo uma carga pontual positiva Ze no seu centro e envolvida por uma distribuição de cargas negativa $-Ze$, uniformemente distribuída dentro de uma esfera de raio R. O campo elétrico E, num ponto dentro do átomo é dado por*"

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

a) Verifique essa equação.

Antes de mais nada, podemos notar que temos duas distribuições de carga, uma positiva, no centro e outra negativa, uniformemente distribuída num volume esférico com raio igual ao raio atômico. Usamos então o princípio da superposição.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \quad , \quad \mathbf{E}_+ = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Para calcular o campo devido à carga negativa, usamos a lei de Gauss:

$$4\pi r^2 E = -\frac{Ze}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \quad \longrightarrow \quad E = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

E o campo total será

$$\mathbf{E} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right]\hat{\mathbf{r}}$$

b) A expressão para o potencial obtida por Rutherford foi

$$V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right)$$

Mostre que o campo do item a) pode ser obtido a partir desta expressão.

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right]\hat{\mathbf{r}}$$

c) Por que esta expressão para $V(r)$ não tende para zero quando $r \to \infty$?

Vamos descobrir em que ponto r_0 Rutherford definiu $V(r_0) = 0$.

$$0 = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{3}{2R} + \frac{r_0^2}{2R^3}\right) \quad \longrightarrow \quad (r_0 \neq 0) \quad 1 - \frac{3}{2}\frac{r_0}{R} + \frac{r_0^3}{2R^3} = 0$$

Então temos que $r_0/R = 1$ satisfaz a equação. Portanto, a "origem" escolhida por Rutherford foi na superfície do átomo.

4.2 Trabalho realizado para mover uma carga

Suponha que tenhamos uma configuração estacionária de cargas que são fonte de uma campo eletrostático. Suponhamos agora que queremos mover uma carga de prova Q do ponto a ao ponto b.

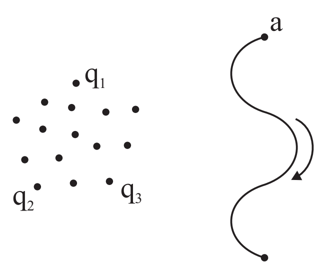

Figura 4.8: Trabalho para mover uma carga

Quanto trabalho teremos que realizar para operar essa mudança na posição de Q?

Sabemos que em qualquer ponto da trajetória da carga de prova, a força que age sobre ela é dada por $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$; então, a força mínima que deve ser exercida para mantê-la sobre o caminho é $\mathbf{F} = -Q\mathbf{E}$. O trabalho realizado então, é dado por

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q[V(b) - V(a)]$$

Note também que o trabalho realizado é independente da trajetória específica utilizada. Ele depende apenas dos pontos a e b. A razão disto, já discutimos, é que a força em questão tem a propriedade de que $\nabla \times \mathbf{F} = Q\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Vemos então que o trabalho realizado para mover uma carga de a até b, dividida por Q é exatamente a diferença de potencial entre os pontos a e b (você saberia traçar uma analogia com um processo mecânico?)

Isso nos fornece uma outra maneira de encarar a *diferença de potencial*, que é a quantidade que realmente tem sentido físico: *a diferença de potencial é o trabalho por unidade de carga necessário para mover uma carga de a até b*. Em particular, se quisermos trazer a carga do infinito, teremos

$$W = Q[V(r) - V(\infty)]$$

E se tomarmos nossa origem no infinito,

$$W = QV(r)$$

É NESTE SENTIDO que o potencial eletrostático pode ser indentificado com *energia* potencial (que é o trabalho necessário para criar a distribuição de cargas) *por unidade de carga* (assim como o campo é a força por unidade de carga).

4.3 A energia de uma distribuição de cargas puntiformes

Quando estamos no contexto de Mecânica Clássica, sabemos que não tem sentido falar de energia gravitacional *de uma partícula*. Por exemplo, a quantidade mgh (com m sendo a massa de uma partícula, g a constante gravitacional sobre a terra e h a altura em que ele se encontra relativamente à superfície da Terra) é a energia DO SISTEMA m-terra. De forma inteiramente análoga, não podemos falar em energia potencial *de uma carga* (mas podemos falar em potencial eletrostático de uma única carga. Pense bem nessa diferença. Ela é fundamental).

Vamos então responder à seguinte pergunta: quanto trabalho seria necessário para juntar uma *coleção* de cargas puntiformes?

Para trazer a primeira carga, não precisamos realizar trabalho algum, uma vez que não há campo ainda. Para trazer a próxima carga, q_2, isso requer um trabalho de

$$q_2 V_1(\mathbf{r}_2)$$

Como já discutimos. Na expressão acima, $V_1(\mathbf{r}_2)$ é o potencial devido a q_1 no ponto $\mathbf{r}_2$, onde estamos colocando a carga q_2.

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

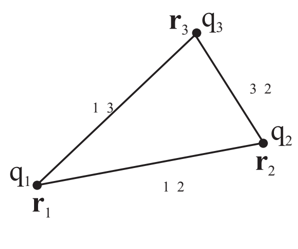

Figura 4.9: Energia potencial de 3 cargas

r_{12} é a distância entre q_1 e q_2, uma vez colocadas em $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, respectivamente.

Agora vamos trazer uma terceira carga q_3; isso vai requerer um trabalho $q_3 V_{12}(\mathbf{r}_3)$, onde V_{12} é o potencial devido às cargas q_1 e q_2 no ponto $\mathbf{r}_3$, i.e.

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

Generalizando, teremos que o trabalho necessário para reunir n cargas puntiformes numa distribuição desejada será

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j>i}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

A restrição $j > i$ serve para evitar dupla contagem.

É possível reescrever essa expressão da seguinte forma

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\mathbf{r}_i)$$

Onde o fator 1/2 "toma conta" das contagens duplas. (Convença-se desta expressão!)

Notemos agora que a expressão acima *não depende* da ordem que usamos para juntar as cargas, uma vez que todos os pares aparecem na soma. Então, vamos isolar q_i

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

Observe que o termo entre parênteses é o potencial no ponto r_i (a posição de q_i) devido a todas as outras cargas. Então temos

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\mathbf{r}_i)$$

Este, então, é o trabalho necessário para juntar todas as cargas. É a energia contida nessa configuração (podemos pensar em energia potencial, embora, como já discutimos, essa terminologia não seja ideal).

Exercícios: Energia Potencial de distribuição discretas

EPD1) Determine uma expressão para o trabalho necessário para colocar as quatro cargas reunidas como está na figura abaixo.

A expressão para trabalho total é

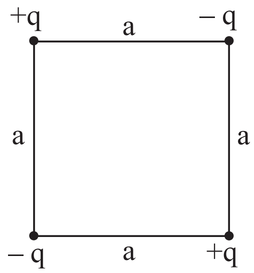

Figura 4.10: Reunião de cargas

$$W_T = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{4} q_i \sum_{j=1, j\neq i}^{4} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{(-q)(+q)}{a} + \frac{(-q)(+q)}{a} + \frac{(-q)(-q)}{\sqrt{2}a}$$

$$+\frac{(+q)(-q)}{a} + \frac{(+q)(+q)}{\sqrt{2}a} + \frac{(+q)(-q)}{a}$$

$$+\frac{(-q)(+q)}{a} + \frac{(-q)(+q)}{a} + \frac{(+q)(+q)}{\sqrt{2}a}$$

$$+\frac{(+q)(-q)}{a} + \frac{(+q)(-q)}{a} + \frac{(-q)(-q)}{\sqrt{2}a}] =$$

$$= \frac{4}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a}\left[-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a}\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

EPD2) Calcule agora o trabalho necessário para trazer do infinito a carga faltante no sistema.

O trabalho necessário para trazer uma carga $-q$ do infinito e colocá-la no vértice vazio é

$$W_{-q} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}[V_{+q}(a) + V_{-q}(a\sqrt{2}) + V_{+q}(a)]$$

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{a} - \frac{q}{a\sqrt{2}} + \frac{q}{a}\right] = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}\left[2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 2W_T$$

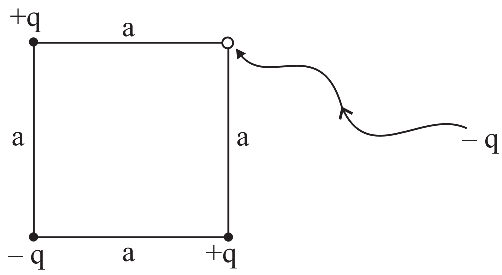

Figura 4.11: Trazendo uma carga do infinito

3. A energia de uma distribuição contínua de cargas

Retomemos a expressão que nos fornece a energia total de um sistema discreto de cargas

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(\mathbf{r}_i)$$

Se a distribuição de cargas for contínua, teremos

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V dv$$

dv sendo o volume infinitesimal e V o potencial.

As integrais para distribuições lineares e superficiais seriam $\int \lambda V dl$ ou $\int \sigma V dS$, respectivamente. Podemos reexpressar esta equação de forma que tanto ρ como V desapareçam! Vamos usar a Lei de Gauss.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$$

Mas, usando o teorema da divergência

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{E} dv$$

Substituindo na equação acima ficamos com

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$$

Como o volume é arbitrário, vale a forma diferencial da Lei de Gauss, i.e.,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Com isso

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V dv$$

Integrando por partes, teremos

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}[-\int \mathbf{E} \cdot (\nabla V) dv + \oint V\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}]$$

Como $\nabla V = -\mathbf{E}$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}(\int_V \mathbf{E}^2 dv + \oint V\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}) \qquad *$$

Vamos raciocinar agora sobre quem é o volume sobre o qual estamos integrando: voltemos à expressão da partida

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V dv$$

A partir da dedução que fizemos dela, fica claro que devemos integrar sobre a região onde existe carga. Mas, na realidade, *qualquer volume maior daria o mesmo resultado*, uma vez que fora do volume onde há cargas $\rho = 0$ e portanto esse volume "extra" não modifica a integral.

O que acontece na expressão * se aumentarmos arbitrariamente o volume? A integral sobre E^2 só pode crescer, uma vez que o integrando é positivo. Mas a integral sobre a superfície, por sua vez, deve decrescer de forma que a soma dos dois termos não se altere. Na verdade, quando estamos em pontos muito distantes da carga $E \sim 1/r^2$ e $V \sim 1/r$, enquanto que a área da superfície vai com r^2. Por isso, grosseiramente falando, a integral de superfície decai com $1/r$. Por isso podemos considerar a integração em todo espaço e obter uma expressão simples para a energia total de distribuições contínuas

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{todo\ espaco} \mathbf{E}^2 dv$$

EDC1) Encontre a energia de uma casca esférica uniformemente carregada com carga total q e raio R.

Primeira solução: Vamos usar a definição

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma V dS$$

Como sabemos, o potencial na superfície da esfera é constante e dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$

Então

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}\int \sigma dS = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R}$$

Segunda solução: Vamos usar a equação

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{todo\ espaco} \mathbf{E}^2 dv$$

Dentro da esfera $\mathbf{E} = 0$; fora $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$

Portanto

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{fora}(\frac{1}{4\pi\epsilon_0})^2\frac{q^2}{r^4}r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0}q^2 4\pi\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R}$$

4.4 Comentários conceituais importantes sobre energia eletrostática

4.4.1 Uma aparente inconsistência:

A equação

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{todo\ espaco} \mathbf{E}^2 dv \qquad (1)$$

Implica que toda energia de uma distribuição de cargas estacionárias é *sempre* positiva. Por outro lado, a equação

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(\mathbf{r}_i) \qquad (2)$$

Pode ser positiva ou negativa. O que está errado? A resposta é que *ambas* as equações estão corretas, elas apenas representam situações ligeiramente diferentes. A equação (1) não leva em conta o trabalho necessário para "fazer" as partículas: ela parte do princípio de que as cargas já estão "prontas".

Note que se tomarmos a equação (2), a energia de uma carga puntiforme é *infinita*

$$W = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2}\int \frac{q^2}{r^4} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{dr}{r^2} \to \infty$$

A equação (2) é mais completa no sentido de que nos diz qual é a energia TOTAL contida numa configuração de cargas, mas a equação (1) é mais apropriada quando estamos tratando de cargas puntiformes porque preferimos deixar de contar a energia (infinita!) necessária para *fabricar* as cargas.

Mas, matematicamente, *onde* entrou essa inconsistência? A inconsistência está na transformação que fizemos para ir da descrição discreta para contínua. Na discreta, o termo $V(\mathbf{r}_i)$ representa o potencial devido a todas as cargas EXCETO q_i. Para uma distribuição contínua não haverá essa distinção e ela contém também o que chamamos de "auto-energia", que é a energia necessária para *formar* cada carga.

4.4.2 Onde fica guardada a energia?

As equações

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V dv \qquad (1)$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int \mathbf{E}^2 dv \qquad (2)$$

Representam duas maneiras diferentes de calcular a mesma coisa. A primeira é uma integral sobre a distribuição de cargas; a segunda é uma integral sobre o campo elétrico. Então, essas duas integrais envolvem duas regiões completamente distintas. Então afinal, onde fica armazenada a energia? A primeira equação parece sugerir que ela está guardada na carga e a segunda, no campo. No presente nível, não é possível decidir essa questão. No contexto da teoria da radiação é útil (e em Relatividade Geral é fundamental) pensar que a energia está no *campo*, mas no contexto da eletrostática, não podemos decidir isso.

4.4.3 O princípio da superposição

Note que, como a energia eletrostática é quadrática, ela não obedece ao princípio da superposição. A energia de um sistema composto por dois campos não será apenas a soma das energias de cada um, mas vai conter também termos cruzados.

$$W_{Total} = \frac{\epsilon_0}{2}\int \mathbf{E}^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dv$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) dv = W_1 + W_2 + \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv$$

Os dois primeiros termos são as "auto-energias" dos campos $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ e o outro termo representa a energia proveniente da *interação* entre esses campos.