Escola Politécnica da USP
Engenharia de Petróleo e Gás

# OUTRAS DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Aula 14 - Prof. Regina Meyer Branski

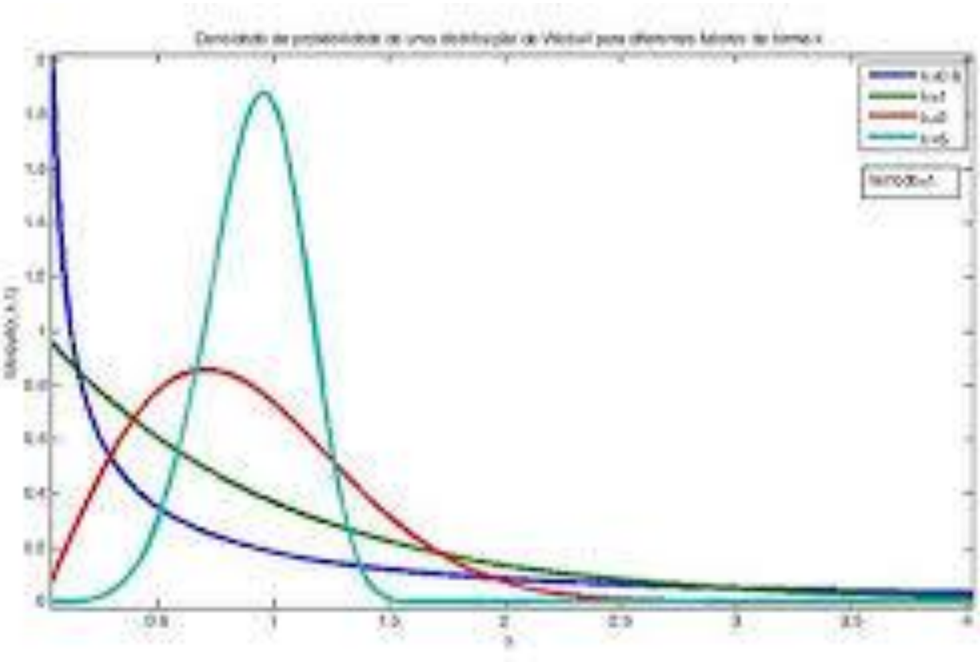
# Distribuições Contínuas

Distribuição Normal

Outras Distribuições Contínuas

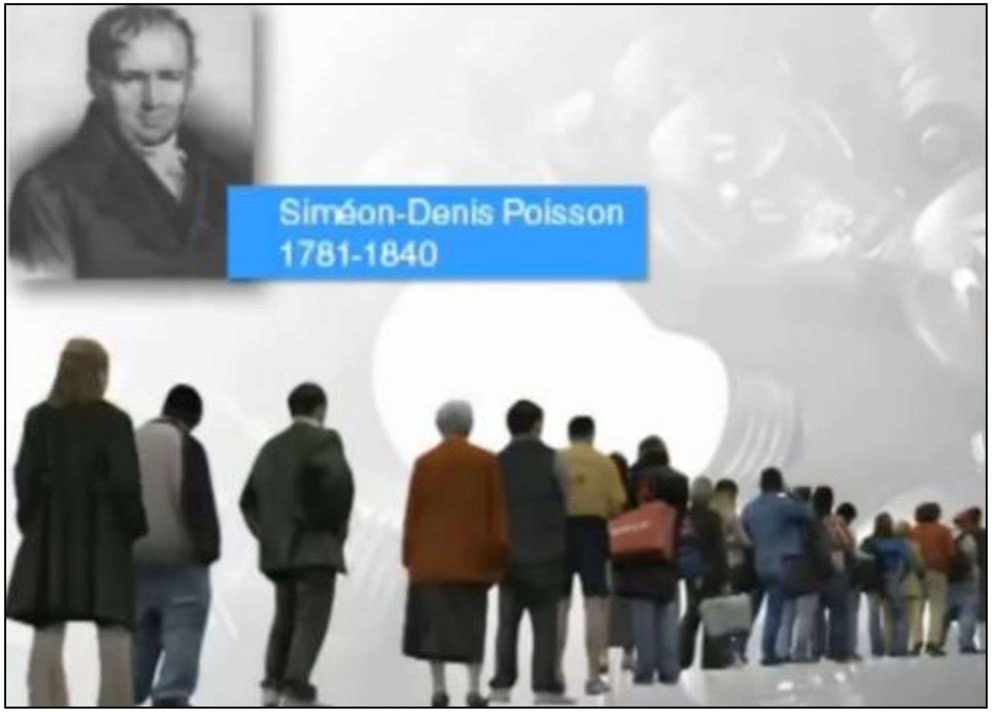
- Exponencial
- LogNormal

# Distribuição Gama e seus Parentes



Curvas com Inclinação

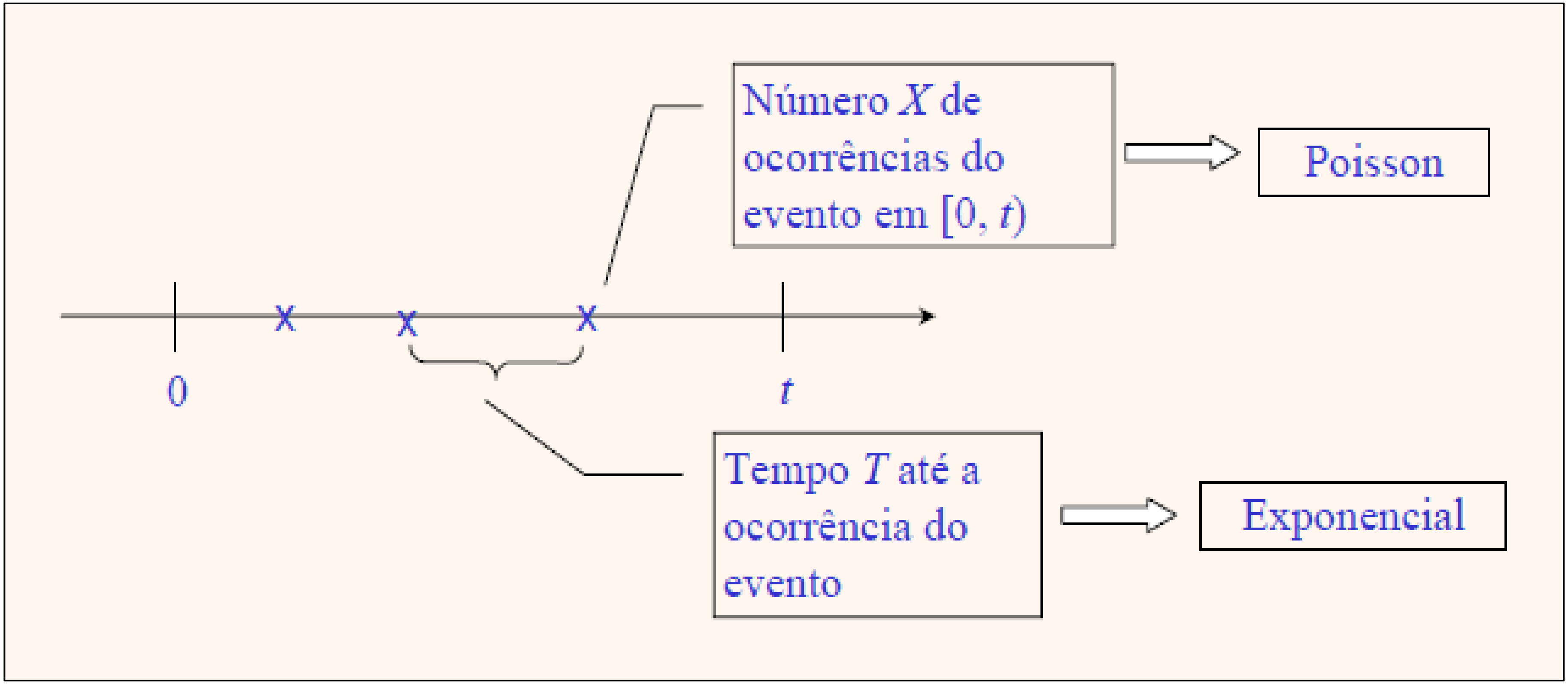
# Distribuição Poisson e Distribuição Exponencial




$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

μ = número médio de ocorrências em um intervalo

# Distribuição Poisson e Distribuição Exponencial



# Distribuição Poisson e Distribuição Exponencial

Exemplos de Distribuição Exponencial

- Tempo entre duas chegadas consecutivas de navios em um porto
- Tempo de vida de aparelhos
- Tempo de espera em restaurantes, caixas de supermercados
- Distância entre duas falhas consecutivas no recapeamento do fio elétrico

# Distribuição Exponencial

$$\mu = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

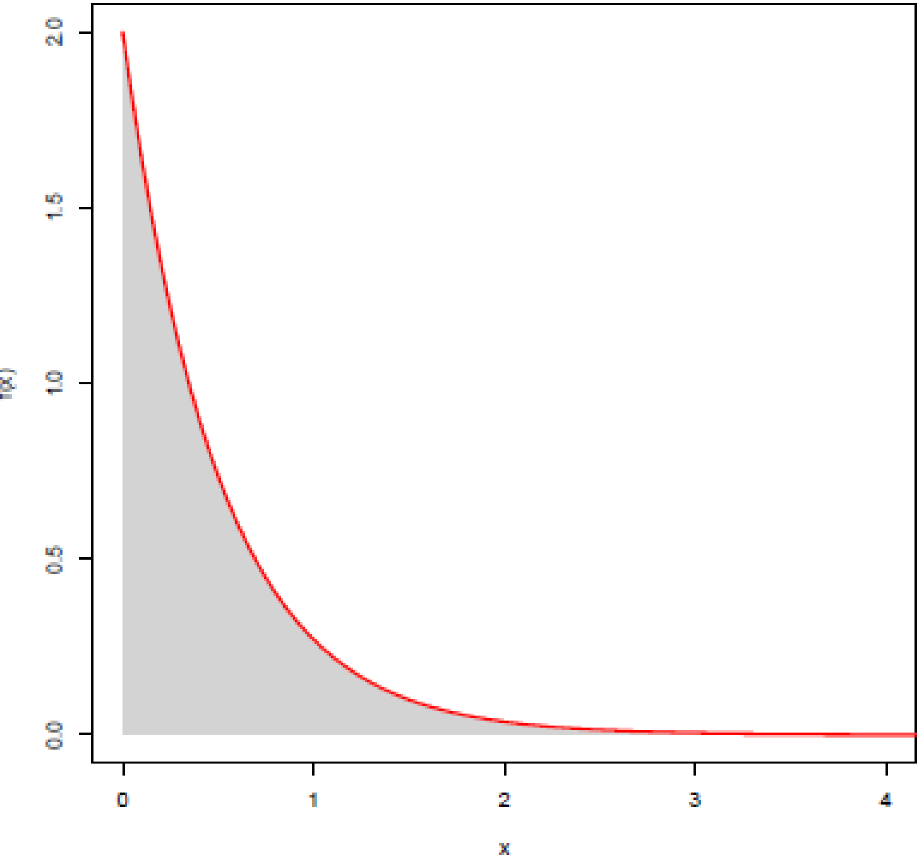
λ: Número de ocorrências do evento no tempo

3 acidentes/1 dia

1/λ: em um dia, três acidentes

1 dia/3acidentes

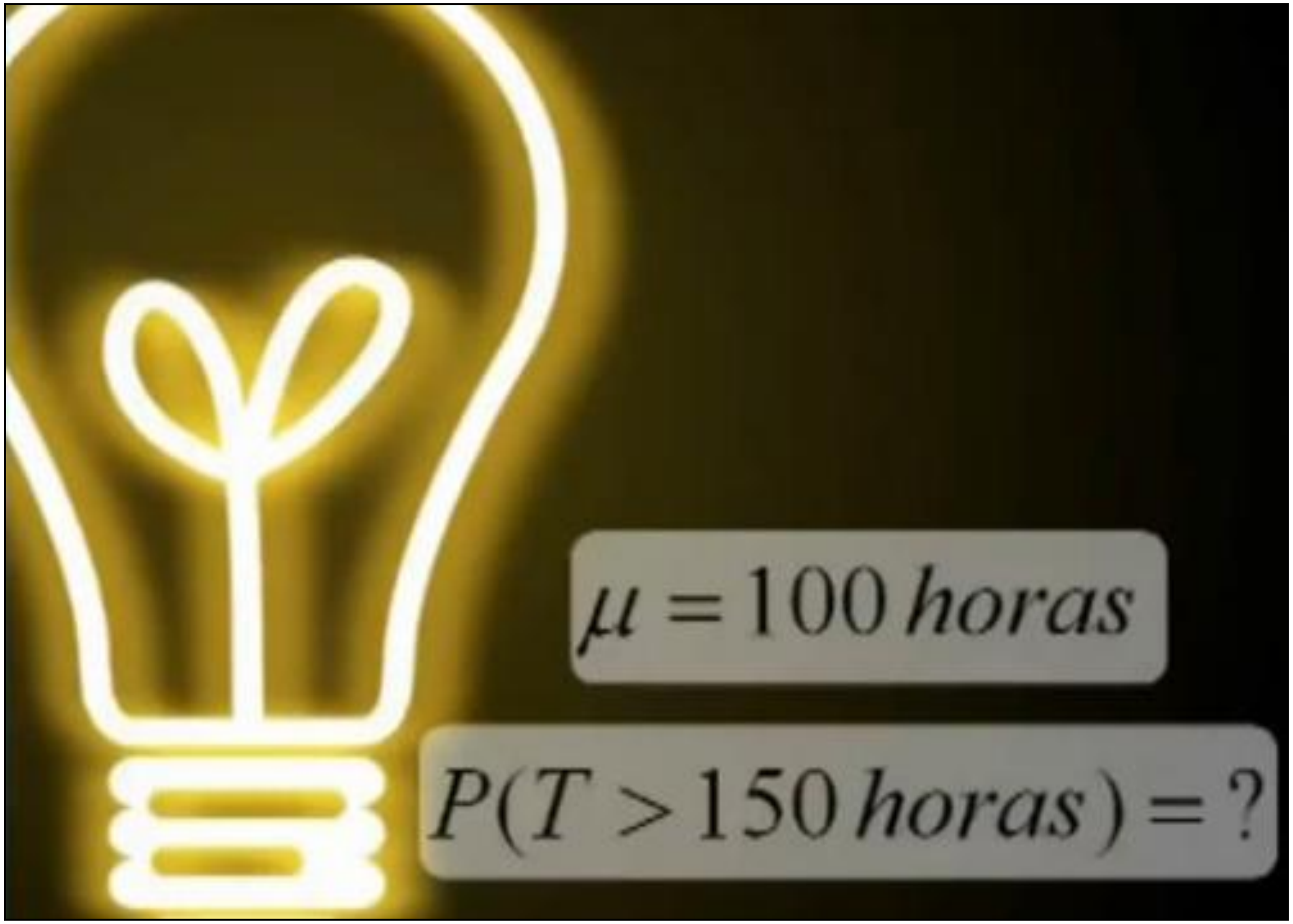
# Modelo Exponencial



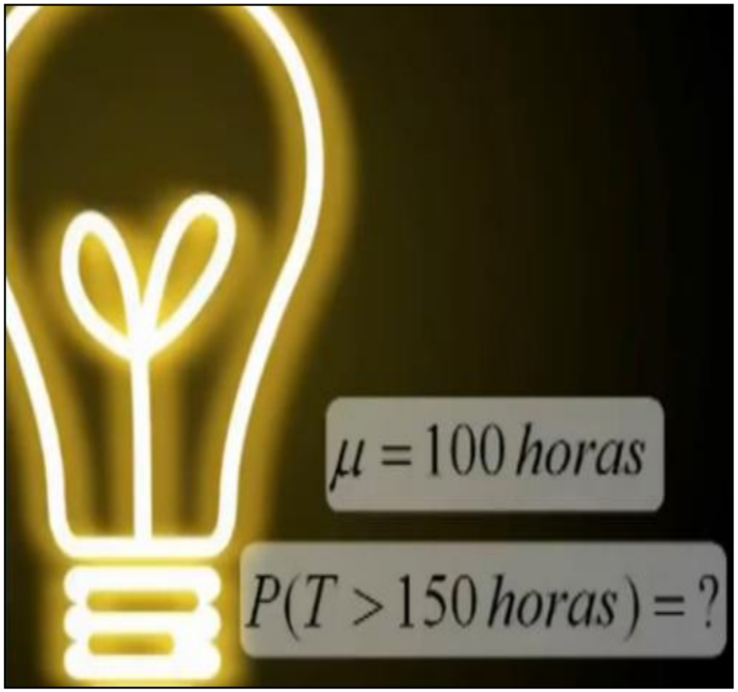

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda x}$$

# Distribuição Exponencial



# Distribuição Exponencial




$$E(x) = \mu = 100 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{1}{100}$$

$$P(X > 150) = e^{-\frac{1}{100}150} = e^{-1,5} = 0,223$$

# Distribuição Exponencial

- Suponha que o tempo de resposta X em um terminal de computador on-line (tempo entre o final da consulta do usuário e o começo da resposta do sistema) tenha distribuição exponencial com tempo de resposta esperado igual a 5 segundos. Qual a probabilidade de o tempo de resposta ser no máximo 10 segundos? E estar entre 5 e 10 segundos?

# Distribuição Exponencial

- Qual a probabilidade de o tempo de resposta ser no máximo 10 segundos?

$$\mu = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mu = 5$$

$$\lambda = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$P(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(X \leq 10) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0{,}2*10} = 1 - 0{,}135 = 0{,}865$$

- Qual a probabilidade de estar entre 5 e 10 segundos?

$$P(5 \leq X \leq 10) = (1 - e^{-0{,}2*10}) - (1 - e^{-0{,}2*5}) = 0{,}233$$

# Distribuição Exponencial

Característica Importante: Não tem memória

# Exercício

Uma empresa está gastando muito com reposição de lâmpadas e encomendou para a manutenção um estudo de confiabilidade que indique a vida útil das lâmpadas. A empresa descobriu que as lâmpadas duram 100 horas. Calcule:

a) A probabilidade da lâmpada queimar entre 0 e 10 horas de uso

b) A probabilidade da lâmpada queimar entre 100 e 110 horas de uso

c) A probabilidade da lâmpada queimar entre 100 e 110 horas de uso, sabendo que ela durou mais de 100 horas.

# Exercício

a.) $P(0<x\leq 10) = 1 - P(x>10) = 1 - 0{,}905 = 0{,}095$

b.) $P(100<x\leq 110) = (1 - e^{-1}) - (1 - e^{-11/10}) = 0{,}035$

c.) A: lâmpada queimar entre 100 e 110 horas

$P(A) = P(100<x\leq 110) = 0{,}035$

B: lâmpada durar mais de 100 horas

$P(B) = P(x>100) = e^{-1} = 0{,}368$

$P(A/B) = P(A\Omega B)/P(B) = 0{,}035/0{,}368 = 0{,}095$

# Exercício

a.) $P(0<x\leq 10) = 1 - P(x>10) = 1 - 0{,}905 = 0{,}095$

c.) A: lâmpada queimar entre 100 e 110 horas

$P(A) = P(100<x\leq 110)=0{,}035$

B: lâmpada durar mais de 100 horas

$P(B) = P(x>100) = e^{-1} = 0{,}368$

$P(A/B) = P(A\Omega B)/P(B)$; aqui $P(A\Omega B)=P(A)$

$$P\left(\frac{100 < x \leq 110}{x > 100}\right) = \frac{P(100 < x \leq 110)}{P(x > 100)} = \frac{0{,}035}{0{,}368} = 0{,}095$$

# Exercício

- Distribuição Exponencial não tem memória
- Em outras palavras: não considera o desgaste do componente ou o desgaste é desprezível
- Assim, probabilidade da Lâmpada durar mais um intervalo de tempo é sempre a mesma
- Para componentes que se deterioram ou melhoram com o uso utilizar outros modelos de tempo de vida (*LogNormal*)

# Exercício

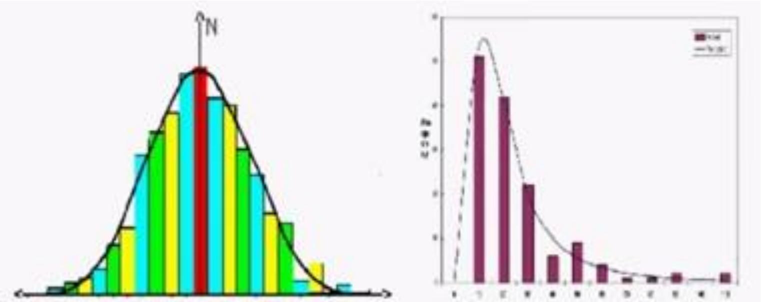
Quando falamos em tecnologia LCD, existem diversos aspectos que podem interessar ao usuário. Se o intuito for jogar *videogame*, por exemplo, uma característica que deve ser observada é o *tempo de resposta* do aparelho. O *tempo de resposta* é aquele em que o monitor de LCD muda completamente a imagem da tela. Este fator é importante pois, caso não seja rápido o suficiente, teremos efeitos indesejados como "objetos fantasmas" ou sombra nos movimentos do jogo. Supondo que esse *tempo de resposta* tenha distribuição exponencial com média igual a 5 milissegundos, responda:

a) Qual a probabilidade de o *tempo de resposta* ser de no máximo 10 milissegundos? R. 0,865

b) Qual a probabilidade de o *tempo de resposta* estar entre 5 e 10 milissegundos? R. 0,233

# Distribuição Log-Normal

Modelar tempo de vida de produtos que degradam ao longo do tempo




Variável aleatória X tem um distribuição Lognormal se Z = ln X tiver uma distribuição Normal

# Distribuição Log-Normal

Variável aleatória X tem um distribuição Lognormal se Y = ln X tiver uma distribuição Normal

$$P(X \leq x) = P(\ln(X) \leq \ln(x) = P\left(z \leq \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$$

# Distribuição Lognormal

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

CUIDADO!

A média e desvio padrão de Z=ln(X) são μ e σ

A média e variância de X (da lognormal):

$$\mathbb{E}(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1).$$

# Distribuição Log-Normal

Autores sugerem que o modelo de probabilidade razoável para a vida útil de uma broca é a distribuição *lognormal* com $\mu = 4{,}5$ e $\sigma = 0{,}8$.

a) qual é o valor da média e o desvio padrão da vida útil
b) qual a probabilidade da vida útil ser no máximo 100
c) qual a probabilidade da vida útil ser no mínimo 200? E maior que 200?

# Resolução

$$E(X) = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} = e^{4.82} = 123.97$$

$$V(X) = \left(e^{\left(2(4.5)+.8^2\right)}\right) \cdot \left(e^{-.8} - 1\right) = (15{,}367.34)(.8964) = 13{,}776.53$$

$$\sigma = 117.373$$

$$P(x \le 100) = P\left(z \le \frac{\ln(100) - 4.5}{.8}\right) = \Phi(0.13) = .5517$$

$$P(x \ge 200) = P\left(z \ge \frac{\ln(200) - 4.5}{.8}\right) = 1 - \Phi(1.00) = 1 - .8413 = .1587 = P(x > 200)$$

# Distribuição Log-Normal

O período de tempo em segundos em que um usuário visualiza uma página na Internet antes de mudar para outra é uma variável aleatória lognormal, com parâmetros $\mu=0,5$ e $\sigma^2=9$

a) Qual a probabilidade de a página ser vista por mais de 10 s?
b) durante quanto tempo, 50% dos usuários se movem para outra página?
c) Quais a média e o desvio padrão do tempo até que o usuário mude a página?

# Distribuição Log-Normal

4-141. X is a lognormal distribution with $\theta$=0.5 and $\omega^2$=1

a)

$$P(X > 10) = P(e^W > 10) = P(W > \ln(10)) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(10) - 0.5}{1}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1.80) = 1 - 0.96407 = 0.03593$$

b) $P(X \le x) = P(e^W \le x) = P(W < \ln(x)) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - 0.5}{1}\right) = 0.50$

$$\frac{\ln(x) - 0.5}{1} = 0 \quad x = e^{0(1)+0.5} = 1.65 \text{ seconds}$$

c) $\mu = E(X) = e^{\theta+\omega^2/2} = e^{0.5+1/2} = e^1 = 2.7183$

$$V(X) = e^{2\theta+\omega^2}(e^{\omega^2} - 1) = e^{1+1}(e^1 - 1) = e^2(e^1 - 1) = 12.6965$$

# Distribuições Contínuas

Distribuição Normal

Outras Distribuições Contínuas

- Exponencial
- LogNormal

# Distribuição Log-Normal

Suponha que X tem uma distribuição lognormal com parâmetros $\mu = 5$ e $\sigma^2=9$. Calcule:

a.) $P(X \leq 13.300)$

b) Valor para x, tal que $P(X \leq x)=0,95$

c) Média e Variância de X

# Exercício

- As indústrias químicas têm alto custo de pesquisa para descobrir novas formas para agilizar certas reações químicas. Quanto mais rápido as reações ocorrem, maior seu potencial de lucro. Uma maneira muito conhecida de acelerar reações é a utilização de catalisadores de enzimas. O estudo do efeito das enzimas em reações químicas é chamado *cinética enzimática*. Boa parte da *cinética enzimática* envolve justamente distribuições exponenciais, uma vez que foi descoberto que essa distribuição se adéqua à realidade. Considerando que uma dessas reações com catalisação de enzimas demore em média 4.000 segundos, calcule:
- a) a probabilidade de uma reação durar mais de 2.000 segundos.
- b) a probabilidade de uma reação durar pelo menos 6.000 segundos, sabendo-se que ela já durou 4.000 segundos?

# Exercício

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 4000 \, {}^{seg}/_{reação} \rightarrow$$

$$\lambda = 0{,}00025 \, reações/seg$$

a)

$$P(x \geq 2000) = 1 - P(x < 2000) = 1 - F(2000) \rightarrow$$

$$= 1 - (1 + e^{-2000 \cdot 0{,}00025}) \rightarrow$$

$$P(x \geq 2000) = \mathbf{0,6065}$$

b)

$$P(x > 6000 \mid x > 4000) = \frac{P(x > 6000 \cap x > 4000)}{P(x > 4000)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1 - P(x < 6000)}{1 - P(x < 4000)} = \frac{1 - F(6000)}{1 - F(4000)} \rightarrow$$

$$= \frac{e^{-6000 \cdot \frac{1}{4000}}}{e^{-1}} = e^{-0,5} \rightarrow$$

$$P(x > 6000 \mid x > 4000) = \mathbf{0,6065}$$

# Exercício

- Suponha que X tenha uma distribuição *lognormal*, com parâmetros $\mu=-2$ e $\sigma^2=9$. Determine:
- a) $P(500<X<1000)$
- b) o valor de x, tal que $P(X<x)=0{,}1$
- c) a média e a variância de X

# Exercício

4-139. a) X is a lognormal distribution with θ=-2 and $\omega^2$=9

$$P(500 < X < 1000) = P(500 < e^W < 1000) = P(\ln(500) < W < \ln(1000))$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(1000)+2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(500)+2}{3}\right) = \Phi(2.97) - \Phi(2.74) = 0.0016$$

$$\text{b) } P(X < x) = P(e^W \le x) = P(W < \ln(x)) = \Phi\left(\frac{\ln(x)+2}{3}\right) = 0.1$$

$$\frac{\ln(x)+2}{3} = -1.28 \qquad x = e^{-1.28(3)-2} = 0.0029$$

$$\text{c) } \mu = E(X) = e^{\theta+\omega^2/2} = e^{-2+9/2} = e^{2.5} = 12.1825$$

$$V(X) = e^{2\theta+\omega^2}(e^{\omega^2} - 1) = e^{-4+9}(e^9 - 1) = e^5(e^9 - 1) = 1{,}202{,}455.87$$