Probabilidade

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MINAS E DE PETRÓLEO
Prof. Regina Meyer Branski

Objetivos

Determinar o número de maneiras que um grupo de objetos pode ser ordenado

Determinar o número de maneiras de se escolher vários objetos de um grupo sem considerar a ordem

Usar os princípios da contagem para encontrar probabilidades

Permutação

Um arranjo ordenado de objetos

O número de permutações diferentes de n objetos distintos é $n!$ (n fatorial)

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ \dots\ 3\cdot2\cdot1$$

$$0! = 1$$

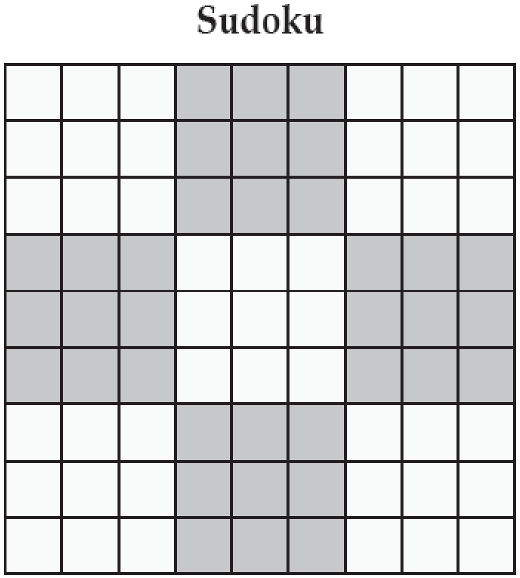
Exemplos:

$$6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$$

$$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$$

Exemplo: permutação de *n* objetos

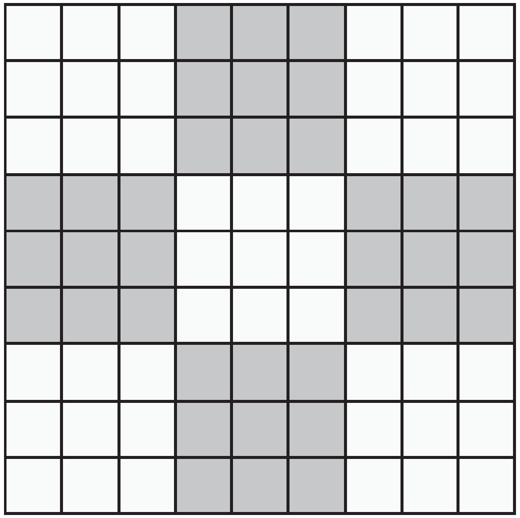
O objetivo de um Sudoku 9 x 9 é preencher os espaços para que cada fileira, cada coluna e cada grade de 3 x 3 contenha os dígitos de 1 até 9. De quantas maneiras diferentes a primeira fileira de um Sudoku 9 x 9 pode ser preenchida?



Permutação

Exemplo: permutação de *n* objetos

Sudoku



O objetivo de um Sudoku 9 x 9 é preencher os espaços para que cada fileira, cada coluna e cada grade de 3 x 3 contenha os dígitos de 1 até 9. De quantas maneiras diferentes a primeira fileira de um Sudoku 9 x 9 pode ser preenchida?

Solução:

O número de permutações é

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362.880 \text{ maneiras}$$

Arranjo ou Permutação nP

Permutação de *n* objetos tomados *r* de cada vez

O número de permutações diferentes de *n* objetos distintos tomados *r* de cada vez

$$\boxed{{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$ em que $r \leq n$

Permutação nP

Encontre o número de maneiras de formar códigos de 3 dígitos no qual nenhum dígito seja repetido.

Permutação nP

Encontre o número de maneiras de formar códigos de 3 dígitos no qual nenhum dígito seja repetido.

Solução:

Você precisa selecionar 3 dígitos de um grupo de 10

- $n = 10, \; r = 3$

$${}_nP_r = {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 720$$

Permutação nP

Quarenta e três carros de corrida começaram na corrida de Daytona 500 em 2007. De quantas maneiras os carros podem terminar em primeiro, segundo e terceiro?

Solução:

- Você precisa escolher 3 carros de um grupo de 43
- $n = 43, \ r = 3$

$$_{n}P_{r} = {}_{43}P_{3} = \frac{43!}{(43-3)!} = \frac{43!}{40!} = 43 \cdot 42 \cdot 41 = 74.046$$

Combinação

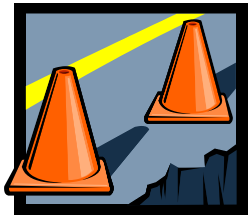
Combinação de *n* objetos tomados *r* de cada vez

Uma seleção de *r* objetos de um grupo de *n* objetos sem considerar a ordem

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

Combinação

Um departamento estadual de transportes planeja desenvolver uma nova seção de uma rodovia interestadual e recebe 16 ofertas de concorrência para o projeto. O Estado planeja contratar quatro das empresas na concorrência. Quantas combinações diferentes de quatro empresas podemos selecionar entre as 16 empresas da concorrência.

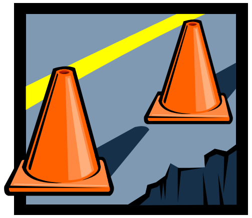


Combinação

Solução:

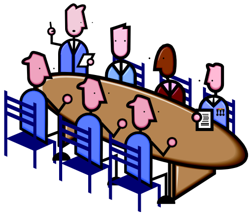
- Você precisa escolher 4 empresas de um grupo de 16
  - $n = 16,\ r = 4$
  - A ordem não importa

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r = {}_{16}C_4 &= \frac{16!}{(16-4)!\,4!} \\
&= \frac{16!}{12!\,4!} \\
&= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 4!} \\
&= 1.820 \text{ combinações diferentes.}
\end{aligned}
$$



Exercício

Uma junta de conselheiros estudantis consiste em 17 membros. Três membros servem como presidente, secretário e webmaster. Cada membro tem a mesma probabilidade de servir em uma dessas posições. Qual é a probabilidade de selecionar aleatoriamente os três membros que ocupam cada posição?



Exercício

Há apenas um resultado favorável e há

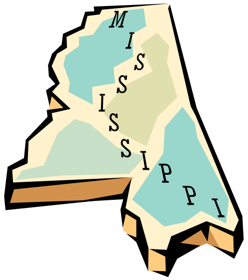
$$_{17}P_3 = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17!}{14!} = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4.080.$$

maneiras nas quais as três posições podem ser preenchidas. Então, a probabilidade de selecionarmos corretamente os três membros que têm cada posição é:

$$P(\text{selecionando três membros}) = \frac{1}{4.080} \approx 0,0002.$$

Exercício

Você tem 11 letras consistindo em um M, quatro I, quatro S e dois P. Se as letras forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade que essa ordem forme a palavra *Mississippi*?



Exercício

Há apenas um resultado favorável e há

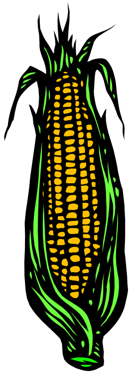
$$\frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34.650$$ 11 letras com 1, 4, 4 e 2 letras iguais,

permutações distinguíveis das letras dadas. Então, a probabilidade de que a ordem forme a palavra *Mississippi* é:

$$P(\text{Mississipi}) = \frac{1}{34.650} \approx 0{,}000029.$$

Exercício

Um fabricante de alimentos analisa uma amostra de 400 grãos de milho para a presença de uma toxina. Na amostra, três grãos têm níveis perigosamente altos da toxina. Se quatro grãos forem selecionados aleatoriamente da amostra, qual a probabilidade de que exatamente um grão tenha um nível perigosamente alto da toxina?



Exercício

O número possível de maneiras de se escolher uma semente tóxica entre três sementes tóxicas é

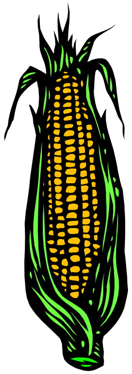
$${}_{3}C_{1} = 3$$

O número possível de maneiras de se escolher três sementes não tóxicas entre 397 sementes não tóxicas é

$${}_{397}C_{3} = 10.349.790$$

Usando a regra da multiplicação, o número de maneiras de se escolher uma semente tóxica e três sementes não tóxicas é

$${}_{3}C_{1} \cdot {}_{397}C_{3} = 3 \cdot 10.349.790 = 31.049.370$$



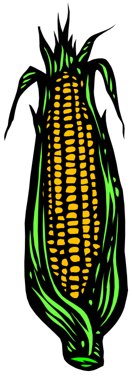
Exercício

O número de maneiras possíveis de se escolher 4 entre 400 sementes é

$$_{400}C_4 = 1.050.739.900$$

A probabilidade de se escolher exatamente 1 semente tóxica é

$$P(1 \text{ grão tóxico}) = \frac{_3C_1 \cdot {}_{397}C_3}{_{400}C_4} = \frac{31.049.370}{1.050.739.900} \approx 0,0296.$$



Objetivos

Determinar o número de maneiras que um grupo de objetos pode ser ordenado

Determinar o número de maneiras de se escolher vários objetos de um grupo sem considerar a ordem

Usar os princípios da contagem para encontrar probabilidades

Permutação Distinguível

O número de permutações distinguíveis de n objetos, em que n_1 é de um tipo, n_2 de outro e assim por diante

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_k!}}$$

em que $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$

Permutação Distinguível

Um empreiteiro planeja desenvolver uma subdivisão da seguinte maneira: 6 casas de um andar, 4 sobrados e 2 casas com vários planos. De quantas maneiras distintas as casas podem ser organizadas?

Permutação Distinguível

Um empreiteiro planeja desenvolver uma subdivisão da seguinte maneira: 6 casas de um andar, 4 sobrados e duas casas com vários planos. De quantas maneiras distintas as casas podem ser organizadas?

Solução:

- Há 12 casas na subdivisão
- $n = 12,\ n_1 = 6,\ n_2 = 4,\ n_3 = 2$

$$\frac{12!}{6! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4! \cdot 2!}$$

$$= 13.860 \text{ maneiras distinguíveis}$$