ESTATÍSTICA I
PROBABILIDADE

Aulas 3 e 4

Professor Regina Meyer Branski

Probabilidade

1. Conceitos básicos de probabilidade
2. Probabilidade Condicional
3. Eventos Dependentes e Independentes
4. Regra da Multiplicação
5. Eventos Mutuamente Exclusivos
6. Regra da Adição

2. Probabilidade Condicional

2. Probabilidade Condicional

- Probabilidade de um evento ocorrer, dado que outro evento já ocorreu
- Probabilidade de ocorrer o evento B, dado que ocorreu o evento A
- Denotado $P(B|A)$ (leia "probabilidade de *B*, dado *A*")

2. Probabilidade Condicional

Qual a probabilidade de sair rei de ouros?

2. Probabilidade Condicional

Qual a probabilidade de sair rei de ouros?

$P = 1/52$

2. Probabilidade Condicional

A carta é figura!

Qual a probabilidade de sair rei de ouros?

2. Probabilidade Condicional

Qual a probabilidade de sair rei de ouros?

P = 1/12

2. Probabilidade Condicional

Qual a probabilidade de sair rei de ouros dado que a carta é preta?

2. Probabilidade Condicional

Qual a probabilidade de sair rei de ouros dado que a carta é preta?

$P = 0$

2. Probabilidade Condicional

Informação

=

redução do espaço amostral

2. Probabilidade Condicional

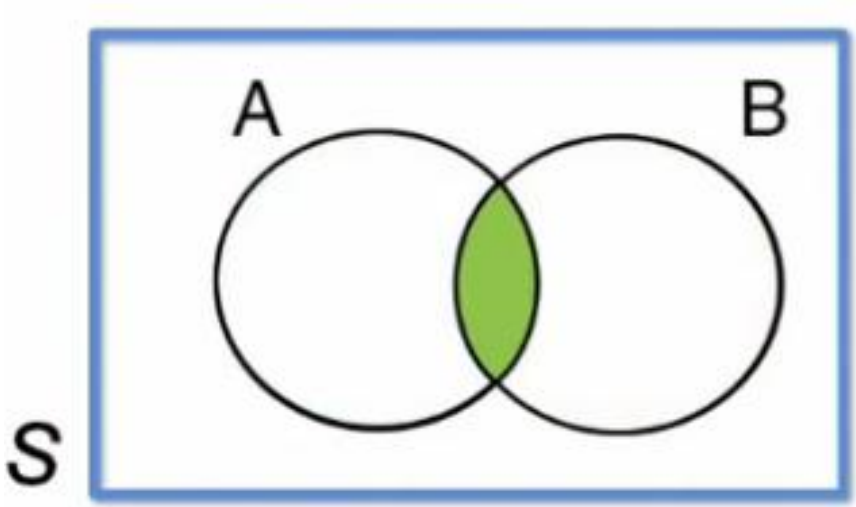
Definição

É a probabilidade de A relativa ao Subespaço B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B = novo espaço amostral

2. Probabilidade Condicionada

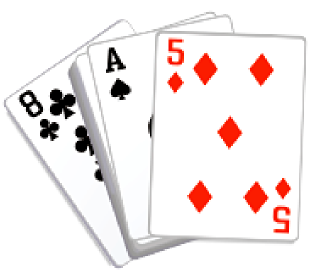


$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B|A)}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B).P(A|B)}$$

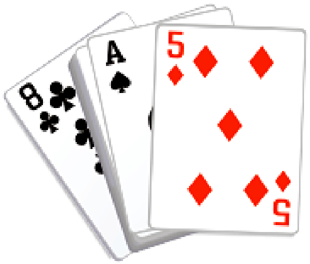
Exercício

- Duas cartas são selecionadas em sequência de um baralho padrão. Encontre a probabilidade de que a segunda carta seja uma dama, dado que a primeira carta é um rei. (Assuma que o rei não é reintegrado ao baralho.)



Exercício

Duas cartas são selecionadas em sequência de um baralho padrão. Encontre a probabilidade de que a segunda carta seja uma dama, dado que a primeira carta é um rei. (Assuma que o rei não é reintegrado ao baralho.)



Solução:

Devido ao fato de a primeira carta ser um rei e não ser reintegrado, o baralho agora tem 51 cartas, das quais 4 são damas. Então,

$$P(B|A) = \frac{4}{51} \approx 0{,}078.$$

Exercício

A tabela abaixo exibe os resultados de um estudo no qual pesquisadores examinaram o QI de uma criança e a presença de um gene específico nela. Encontre a probabilidade de a criança ter um QI alto, dado que a criança tenha o gene.

	Gene presente	Gene não presente	Total
QI alto	33	19	52
QI normal	39	11	50
Total	72	30	102

Exercício

72 crianças têm o gene. Então, o espaço amostral consiste em 72 crianças

	Gene presente	Gene não presente	Total
QI Adulto	33	19	52
QI normal	39	11	50
Total	72	30	102

$$P(B|A) = \frac{33}{72} \approx 0,458.$$

Exercício

- Encontre a probabilidade de que a criança não tenha o gene. R. 0,294
- Encontre a probabilidade de que a criança não tenha o gene, dado que a criança tenha QI normal. R. 0,22

Probabilidade

1. Conceitos básicos de probabilidade
2. Probabilidade condicional
3. Eventos Dependentes e Independentes
4. Regra da Multiplicação
5. Eventos Mutuamente Exclusivos
6. Regra da Adição

3. Eventos independentes e dependentes

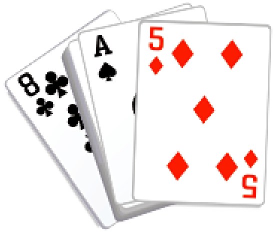
Eventos independentes

- A ocorrência de um dos eventos não afeta a probabilidade da ocorrência de outro
  - Jogar um dado e uma moeda
- $P(B \mid A) = P(B)$ ou $P(A \mid B) = P(A)$

3. Eventos independentes e dependentes

Decida se os eventos são independentes ou dependentes.

Escolher um rei de um baralho padrão (*A*), não reintegrá-lo ao baralho e, então, tirar uma dama do baralho (*B*).

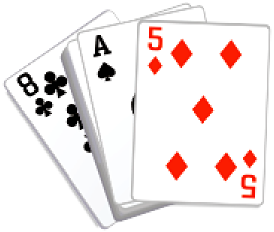


3. Eventos independentes e dependentes

Decida se os eventos são independentes ou dependentes.

Escolher um rei de um baralho padrão (*A*), não reintegrá-lo ao baralho e, então, tirar uma dama do baralho (*B*).

Solução:

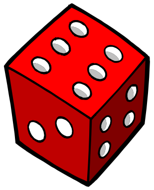


$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{4}{51} \text{ e } P(B) = \frac{4}{52}}$$

Dependente (a ocorrência de *A* altera a probabilidade da ocorrência de *B*).

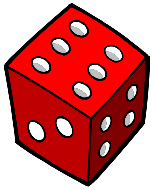
3. Eventos independentes e dependentes

Jogar uma moeda e tirar cara (*A*) e, então, rolar um dado de seis lados e obter um 6 (*B*).



3. Eventos independentes e dependentes

Jogar uma moeda e tirar cara (*A*) e, então, rolar um dado de seis lados e obter um 6 (*B*).



Solução:

$$\boxed{P(B/A) = 1/6 \quad \text{e} \quad P(B) = 1/6}$$

Independente (a ocorrência de *A* não altera a probabilidade da ocorrência de *B*).

Exercício

- Decida se os eventos são dependentes ou independentes (casa)
  - Fumar um maço de cigarros por dia (A) e desenvolver doença pulmonar (B)
  - Exercitar-se com frequência (A) e apresentar um bom desempenho cardiovascular (B)

Probabilidade

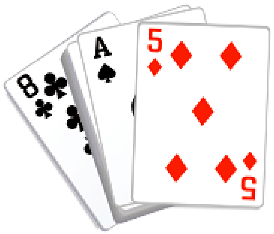
1. Conceitos básicos de probabilidade
2. Probabilidade condicional
3. Eventos Dependentes e Independentes
4. Regra da Multiplicação
5. Eventos Mutuamente Exclusivos
6. Regra da Adição

4. Regra da multiplicação

- A probabilidade de dois eventos A e B acontecerem em sequência é
  - $\boldsymbol{P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$
- Para eventos independentes a regra pode ser simplificada para
  - $\boldsymbol{P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B)}$
  - Pode ser estendida para qualquer número de eventos independentes

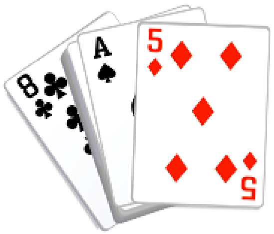
4. Regra da multiplicação

Duas cartas são selecionadas, sem recolocar a primeira carta no baralho. Encontre a probabilidade de escolher o rei e então escolher a dama.



4. Regra da multiplicação

Duas cartas são selecionadas, sem recolocar a primeira carta no baralho. Encontre a probabilidade de escolher o rei e então escolher a dama.



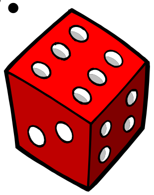
Solução:

Devido ao fato de a primeira carta não ser recolocada no baralho, os eventos são dependentes

$$\begin{aligned} P(K \text{ e } Q) &= P(K) \cdot P(Q \mid K) \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \\ &= \frac{16}{2.652} \\ &\approx 0{,}006 \end{aligned}$$

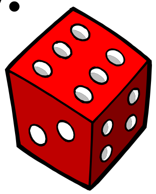
4. Regra da multiplicação

Uma moeda é atirada e um dado é jogado. Encontre a probabilidade de tirar cara e então rolar um 6.



4. Regra da multiplicação

Uma moeda é atirada e um dado é jogado. Encontre a probabilidade de tirar cara e então rolar um 6.



Solução:

O resultado da moeda não afeta a probabilidade de rolar um 6 no dado. Os dois eventos são independentes.

$$
\begin{aligned}
P(H \text{ e } 6) &= P(H) \cdot P(6) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{12} \\
&\approx 0,083
\end{aligned}
$$

Exercícios

- A probabilidade de que um salmão nade, com sucesso, através de uma barragem é de 0,85. Encontre a probabilidade de dois salmões atravessarem a barragem com sucesso. R. 0,723
- Duas cartas são selecionadas de um baralho padrão sem reposição. Encontre a probabilidade de que ambas as cartas sejam de copas.R. 0,059

4. Regra da multiplicação

A probabilidade de uma cirurgia de joelho ser bem-sucedida é de 0,85. Encontre a probabilidade de três cirurgias de joelho serem bem-sucedidas.

4. Regra da multiplicação

A probabilidade de uma cirurgia de joelho ser bem-sucedida é de 0,85. Encontre a probabilidade de três cirurgias de joelho serem bem-sucedidas.

Solução:

A probabilidade de cada cirurgia de joelho ser bem-sucedida é de 0,85. A chance de sucesso de uma cirurgia é independente das chances das outras cirurgias.

$$P(3\ cirurgias\ bem\text{-}sucedidas) = (0{,}85)(0{,}85)(0{,}85)$$
$$\approx 0{,}614$$

4. Regra da multiplicação

Encontre a probabilidade que nenhuma das cirurgias seja bem-sucedida.

4. Regra da multiplicação

Encontre a probabilidade que nenhuma das cirurgias ser bem-sucedida.

Solução:

Devido ao fato de a probabilidade de sucesso de uma cirurgia ser de 0,85, a probabilidade de falha de uma cirugia é $1 – 0,85 = 0,15$

$$P(\textit{nenhuma das 3 cirurgias ser bem-sucedida}) = (0,15)(0,15)(0,15) \approx 0,003$$

4. Regra da multiplicação

Encontre a probabilidade de que pelo menos uma das três cirurgias de joelho seja bem-sucedida.

4. Regra da multiplicação

Encontre a probabilidade de que pelo menos uma das três cirurgias de joelho seja bem-sucedida.

Solução:

"Pelo menos uma" significa uma ou mais. O complemento do evento "pelo menos uma bem-sucedida" é o evento "nenhuma é bem-sucedida". Usando a regra dos complementos

$$P(\textit{pelo menos 1 é bem-sucedida}) = 1 - P(\textit{nenhuma é bem-sucedida})$$
$$\approx 1 - 0{,}003$$
$$= 0{,}997$$

4. Regra da multiplicação

Mais de 15.000 estudantes do último ano de faculdade de medicina dos Estados Unidos se candidataram a programas de residência em 2007. Desses, 93% foram combinados com posições de residentes e, destes, 74% conseguiram uma de suas duas preferências. Os estudantes de medicina classificam eletronicamente os programas de residência em sua ordem de preferência e os diretores também fazem o mesmo. O termo “combinar” refere-se ao processo onde a lista de preferências do estudante e o programa de lista de preferência dos diretores se sobrepõem, resultando na colocação do estudante para uma posição de residente. (*Fonte: National Resident Matching Program.*)

4. Regra da multiplicação

1. Encontre a probabilidade que um estudante aleatoriamente selecionado tem de obter uma vaga de residência e que essa vaga seja uma de suas duas preferências.

4. Regra da multiplicação

1. Encontre a probabilidade que um estudante aleatoriamente selecionado tem de obter uma vaga de residência e que essa vaga seja uma de suas duas preferências.

Solução:

$A = \{\text{obteve a vaga de residência}\}$

$B = \{\text{obteve uma de duas vagas preferenciais}\}$

$P(A) = 0{,}93$ e $P(B|A) = 0{,}74$

$$P(A \text{ e } B) = \underbrace{P(A) \cdot P(B|A)}_{\text{Eventos dependentes}} = (0{,}93)(0{,}74) \approx 0{,}688$$

4. Regra da multiplicação

2. Encontre a probabilidade que um aluno aleatoriamente selecionado que tenha conseguido uma vaga de residência não tenha conseguido uma vaga em uma de suas duas preferências.

4. Regra da multiplicação

2. Encontre a probabilidade que um aluno aleatoriamente selecionado que tenha conseguido uma vaga de residência não tenha conseguido uma vaga em uma de suas duas preferências.

Solução:

Use o complemento:

$$P(B' \mid A) = 1 - P(B|A)$$

$$= 1 - 0{,}74 = 0{,}26$$

Exercício

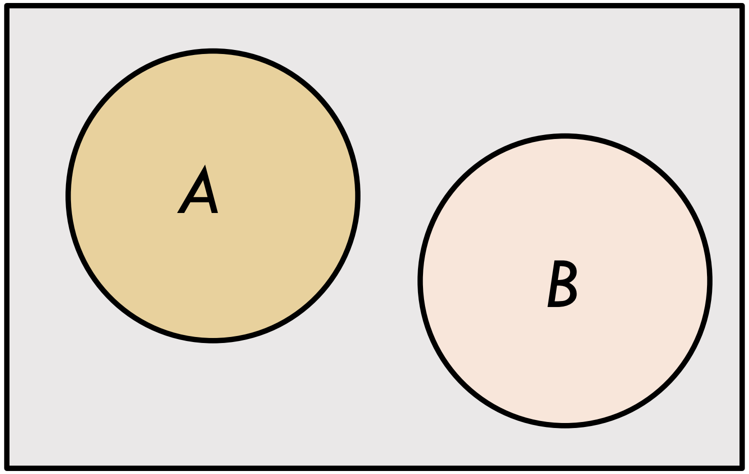
- Pesquisa realizada em um júri , 65% das pessoas são mulheres . Dessas uma de cada quatro trabalha na área de saúde.
- 1. encontre a probabilidade de que uma pessoa selecionada aleatoriamente do júri seja mulher e trabalhe na área de saúde. R. 0,1625
- 2. encontre a probabilidade de que uma pessoa selecionada aleatoriamente do júri seja mulher e não trabalhe na área de saúde. R. 0,4875

Probabilidade

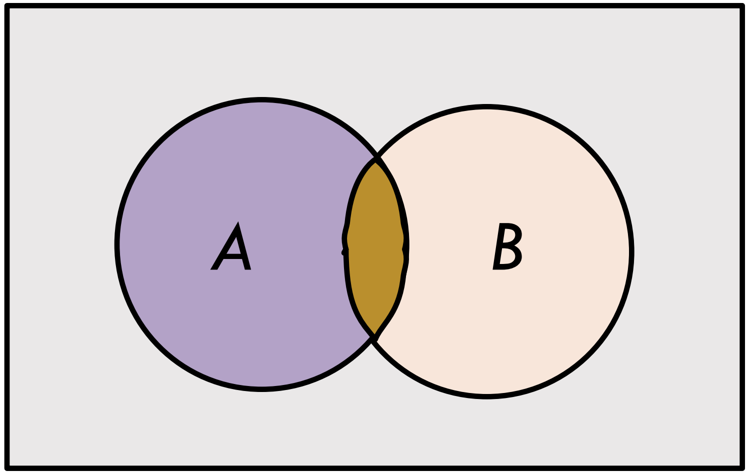
1. Conceitos básicos de probabilidade
2. Probabilidade condicional
3. Eventos Dependentes e Independentes
4. Regra da Multiplicação
5. Eventos Mutuamente Exclusivos
6. Regra da Adição

5. Eventos Mutuamente Exclusivos

- Eventos *A* e *B* não podem ocorrer ao mesmo tempo

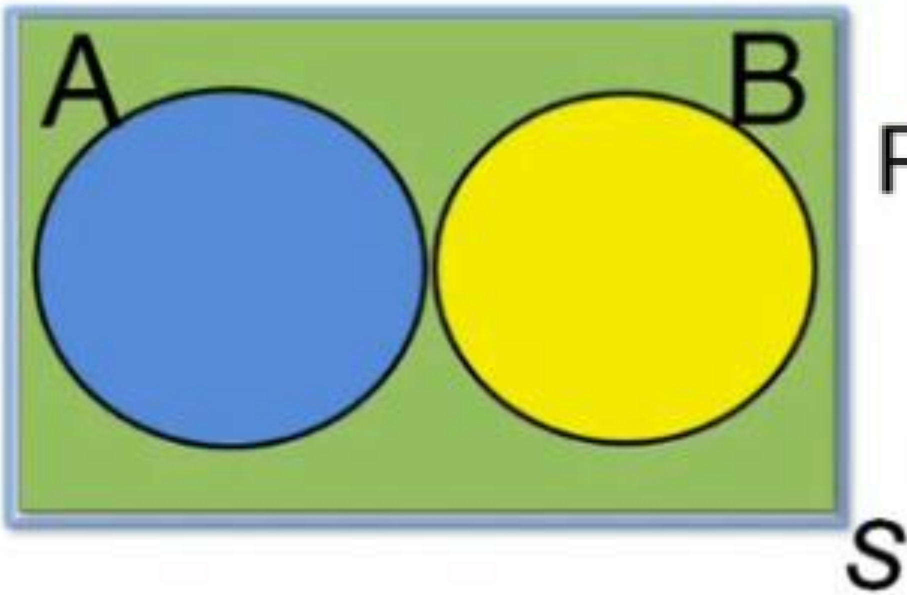


A e *B* são mutuamente exclusivos



A e *B* não são mutuamente exclusivos

5. Eventos Mutuamente Exclusivos



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

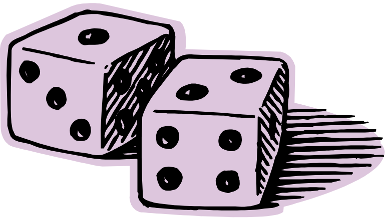
$$P(A \cap B) = 0$$

5. Eventos Mutuamente Exclusivos

Decida se os eventos são mutuamente exclusivos.

Evento *A*: rolar 3 em um dado.

Evento *B*: rolar 4 em um dado.

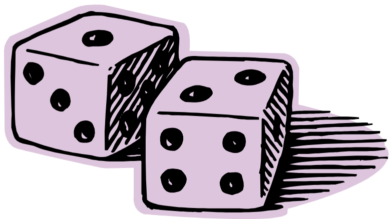


5. Eventos Mutuamente Exclusivos

Decida se os eventos são mutuamente exclusivos.

Evento *A*: rolar 3 em um dado.

Evento *B*: rolar 4 em um dado.



Solução:

Mutuamente exclusivos

O primeiro evento tem apenas um resultado, 3. O segundo evento também tem apenas um resultado, 4. Esses resultados não podem ocorrer ao mesmo tempo.

5. Eventos Mutuamente Exclusivos

Evento *A*: selecionar aleatoriamente um estudante do sexo masculino.

Evento *B*: selecionar aleatoriamente um estudante de enfermagem.

5. Eventos Mutuamente Exclusivos

Evento *A*: selecionar aleatoriamente um estudante do sexo masculino.

Evento *B*: selecionar aleatoriamente um estudante de enfermagem.

Solução:

Não são mutuamente exclusivos (o estudante pode ser um homem cursando enfermagem).

Probabilidade

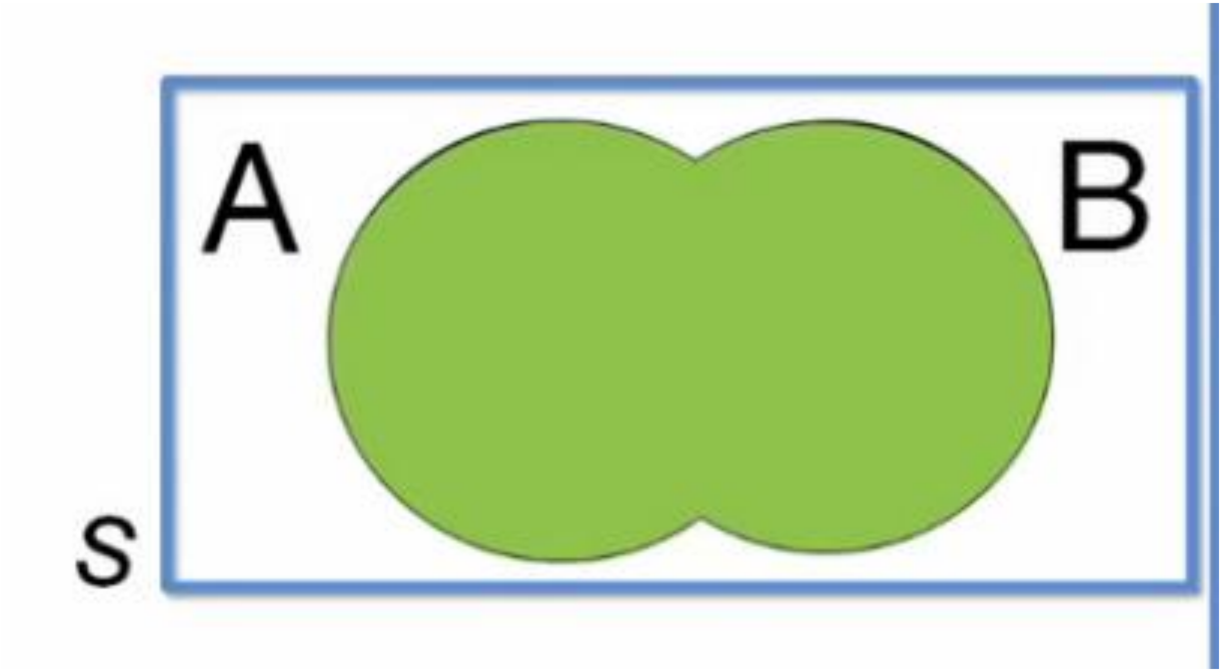
1. Conceitos básicos de probabilidade
2. Probabilidade condicional
3. Eventos Dependentes e Independentes
4. Regra da Multiplicação
5. Eventos Mutuamente Exclusivos
6. Regra da Adição

6. Regra da Adição

Regra da adição para a probabilidade de *A* ou *B*

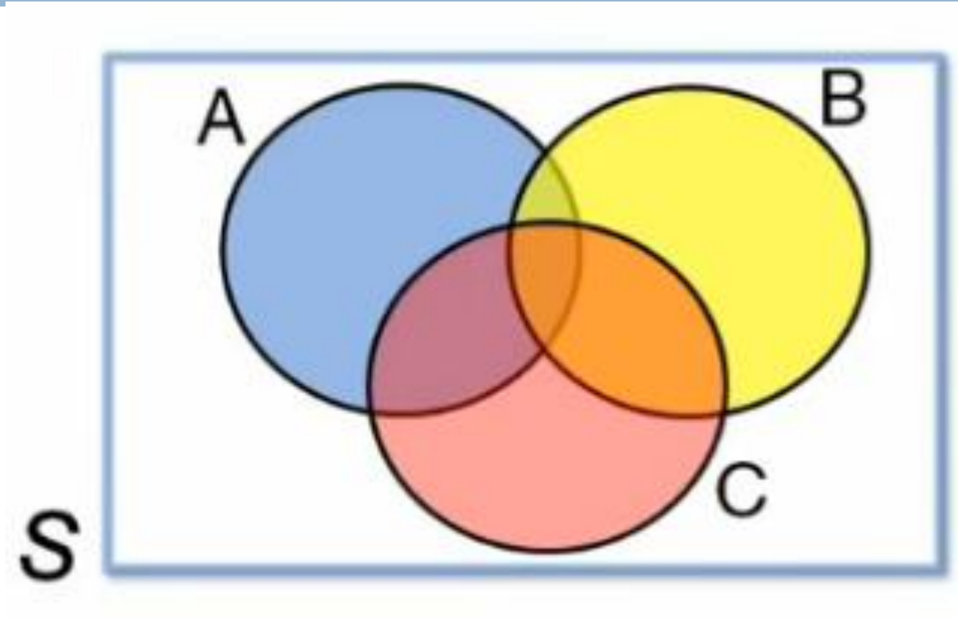
- A probabilidade que o evento *A* ou *B* ocorra é
  - $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$
- Para eventos mutuamente exclusivos *A* e *B*, a regra pode ser simplificada para
  - $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$
  - Pode ser estendido para qualquer número de eventos mutuamente exclusivos

6. Regra da Adição



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Regra da Adição

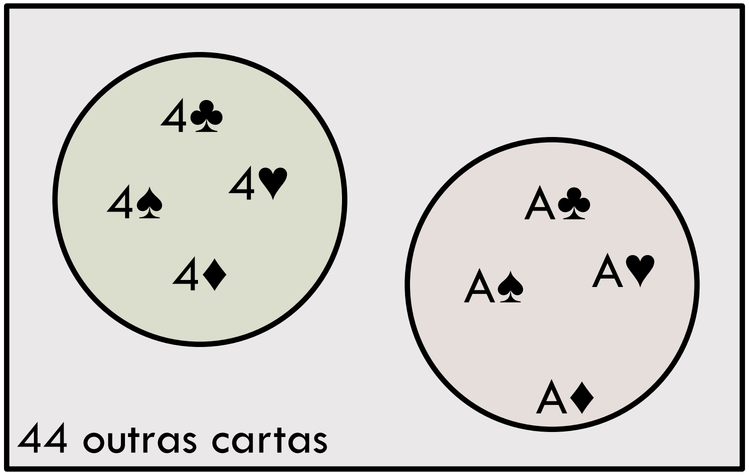


$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

6. Regra da Adição

Você escolhe uma carta de um baralho padrão. Encontre a probabilidade que a carta seja um 4 ou um ás.

Baralho de 52 cartas



6. Regra da Adição

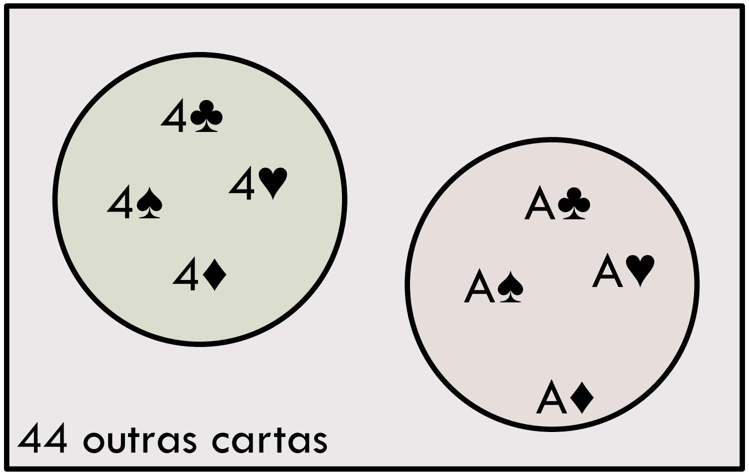
Você escolhe uma carta de um baralho padrão. Encontre a probabilidade que a carta seja um 4 ou um ás.

Solução:

Os eventos são mutuamente exclusivos (se a carta for um 4, não pode ser um ás).

$$P(4 \text{ ou Ás}) = P(4) + P(\text{Ás}) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13} \approx 0{,}154$$

Baralho de 52 cartas



6. Regra da Adição

Você rola um dado. Encontre a probabilidade de rolar um número menor que 3 ou de rolar um número ímpar.

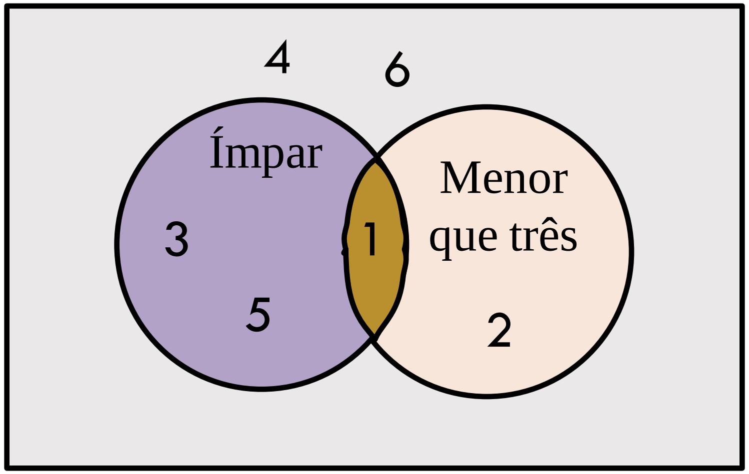
6. Regra da Adição

Você rola um dado. Encontre a probabilidade de rolar um número menor que 3 ou de rolar um número ímpar.

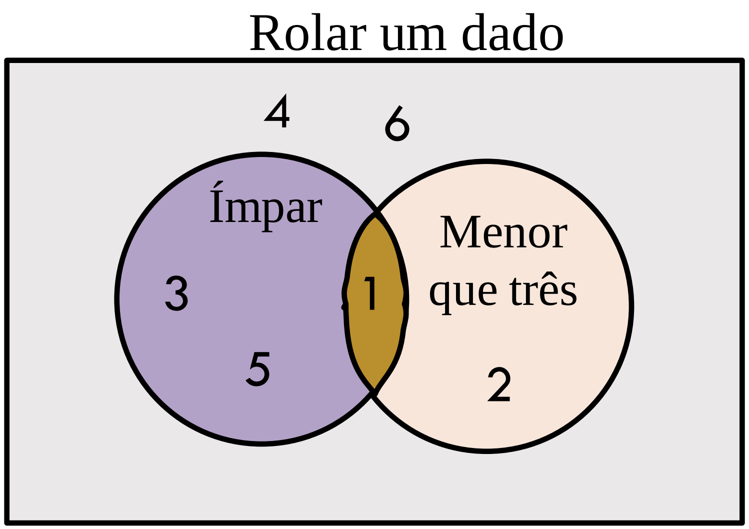
Solução:

Os eventos não são mutuamente exclusivos (1 é um resultado possível para os dois eventos).

Rolar um dado



6. Regra da Adição



P(menor que 3 ou ímpar)

= P(menor que 3) + (ímpar) – P(menor que 3 e ímpar)

= 2/6 + 3/6 – 1/6 = 4/6 ≈ 0.667

6. Regra da Adição

A distribuição de frequência mostra o volume de vendas e o número de meses em que um representante de vendas atingiu cada nível de vendas nos últimos três anos. Se esse padrão de vendas continuar, qual a probabilidade de que o representante venda entre \$75.000 e \$124.999 no próximo mês?

Volume de Vendas (\$)	Meses
0–24.999	3
25.000–49.999	5
50.000–74.999	6
75.000–99.999	7
100.000–124.999	9
125.000–149.999	2
150.000–174.999	3
175.000–199.999	1

6. Regra da Adição

- *A* = vendas mensais entre US$ 75.000 e US$ 99.999
- *B* = vendas mensais entre US$ 100.000 e US$ 124.999
- *A* e *B* são mutuamente exclusivos

Volume de vendas (US$)	Meses
0–24.999	3
25.000–49.999	5
50.000–74.999	6
75.000–99.999	7
100.000–124.999	9
125.000–149.999	2
150.000–174.999	3
175.000–199.999	1

$$\begin{aligned} P(A \text{ ou } B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{7}{36} + \frac{9}{36} \\ &= \frac{16}{36} \\ &= \frac{4}{9} \approx 0,444. \end{aligned}$$

6. Regra da Adição

Um banco de sangue cataloga os tipos de sangue doados durante os últimos cinco dias. Um doador é selecionado aleatoriamente. Encontre a probabilidade de que o doador tenha tipo sanguíneo O ou A.

	Tipo O	Tipo A	Tipo B	Tipo AB	Total
Rh positivo	156	139	37	12	344
Rh negativo	28	25	8	4	65
Total	184	164	45	16	409

6. Regra da Adição

Os eventos são mutuamente exclusivos (um doador não pode ter tipo sanguíneo O e A).

	Tipo O	Tipo A	Tipo B	Tipo AB	Total
Rh positivo	156	139	37	12	344
Rh negativo	28	25	8	4	65
Total	184	164	45	16	409

$$P(\text{tipo O ou tipo A}) = P(\text{tipo O}) + P(\text{tipo A})$$

$$= \frac{184}{409} + \frac{164}{409}$$

$$= \frac{348}{409}$$

$$\approx 0,851.$$

6. Regra da Adição

Encontre a probabilidade de que o doador tenha tipo B ou tenha Rh negativo.

	Tipo O	Tipo A	Tipo B	Tipo AB	Total
Rh positivo	156	139	37	12	344
Rh negativo	28	25	8	4	65
Total	184	164	45	16	409

Solução:

Os eventos não são mutuamente exclusivos (um doador pode ter tipo B e ter Rh negativo).

6. Regra da Adição

	Tipo O	Tipo A	Tipo B	Tipo AB	Total
Rh positivo	156	139	37	12	344
Rh negativo	28	25	8	4	65
Total	184	164	45	16	409

$$\begin{aligned} P(\text{tipo B ou Rh–}) &= P(\text{tipo B}) + P(\text{Rh–}) - P(\text{tipo B e Rh–}) \\ &= \frac{45}{409} + \frac{65}{409} - \frac{8}{409} \\ &= \frac{102}{409} \\ &\approx 0{,}249. \end{aligned}$$

Resumo de Probabilidade

Eventos Complementares	Conjunto de todos os resultados em um espaço amostral que não estão incluídos em E	P(E”) = 1 – P(E)
Regra da Multiplicação	Encontrar a probabilidade de dois eventos ocorrerem em sequencia	P(A e B) = P(A).P(B/A) P(A e B) = P(A).P(B) (independentes)
Regra da Adição	Encontrar a probabilidade de que pelo menos um dos eventos irá ocorrer	P(A ou B) = P(A)+P(B)-P(A e B) P(A ou B) = P(A)+P(B) (mutuamente exclusivos)

Probabilidade

1. Conceitos básicos de probabilidade
2. Probabilidade condicional
3. Eventos Dependentes e Independentes
4. Regra da Multiplicação
4. Eventos Mutuamente Exclusivos
5. Regra da Adição

Exercício

- Uma empresa que fabrica caixas de papelão descobre que a probabilidade de produzir uma caixa com furos é de 0,05, a probabilidade d produzir uma caixa amassada no canto é de 0,08 e a probabilidade de produzir uma caixa com furo e amassada no canto é de 0,004.
- A) o evento selecionar uma caixa com furo e selecionar uma caixa com canto amassado são mutuamente exclusivos?
- B) se o inspetor de qualidade selecionar uma caixa aleatoriamente, encontre a probabilidade de que a caixa tenha furo ou esteja amassada

Exercício

- Na amostra de 1000 pessoas (525 homens e 475 mulheres), 113 são canhotas (63 homens e 50 mulheres). Os resultados da amostra são mostrados na tabela. Uma pessoa é selecionada aleatoriamente. Encontre as probabilidades.

	Homem	Mulher	Total
Esquerda	63	50	113
Direita	462	425	887
Total	525	475	1000

- a) pessoa é canhota ou mulher
- b) pessoa é destra ou homem
- c) pessoa não é destra ou homem
- d) pessoa é uma mulher destra
- e) o evento ser destro e ser mulher são mutuamente exclusivos? Explique

Exercício

- A tabela mostra o número (em milhares) de graduações conferidas nos EUA no ano de 2014 por nível e sexo. Uma pessoa que obteve graduação é selecionada aleatoriamente. Encontre a probabilidade de que esta pessoa:

a. tenha bacharelado R. 0,524

b. tem bacharelado, dado que é mulher R.0,515

c. tem bacharelado, dado que não é mulher R.0,536

d. É associado ou bacharel R. 0,773

e. Tem doutorado, dado que é homem R. 0,023

f. Tem mestrado ou é mulher R. 0,671

g. Tem grau associado e é homem R. 0,097

h. É mulher, dado que a pessoa tem bacharelado R. 0,575

	Homem	Mulher	Total
Associado	260	405	665
Bacharel	595	804	1399
Mestrado	230	329	559
Doutorado	25	23	48
Total	1110	1561	2671