

PEF 2502 – Introdução à Teoria das Cascas – 2ª. Parte

A equação diferencial da deformação axissimétrica de uma casca cilíndrica circular, com raio “R” e espessura “h” é a seguinte (Billington, 1982):

$$D \frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{Eh}{R^2} w = p_z$$

Que pode ser reescrita como:

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_z}{D}$$

Sendo

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

A solução geral é:

$$w = e^{\beta y} (C_1 \cos \beta y + C_2 \sin \beta y) + e^{-\beta y} (C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) + f(y)$$

Se a casca cilíndrica é longa o suficiente, então se admite que os efeitos de uma borda não afetem a outra borda, e a equação acima pode ser simplificada para:

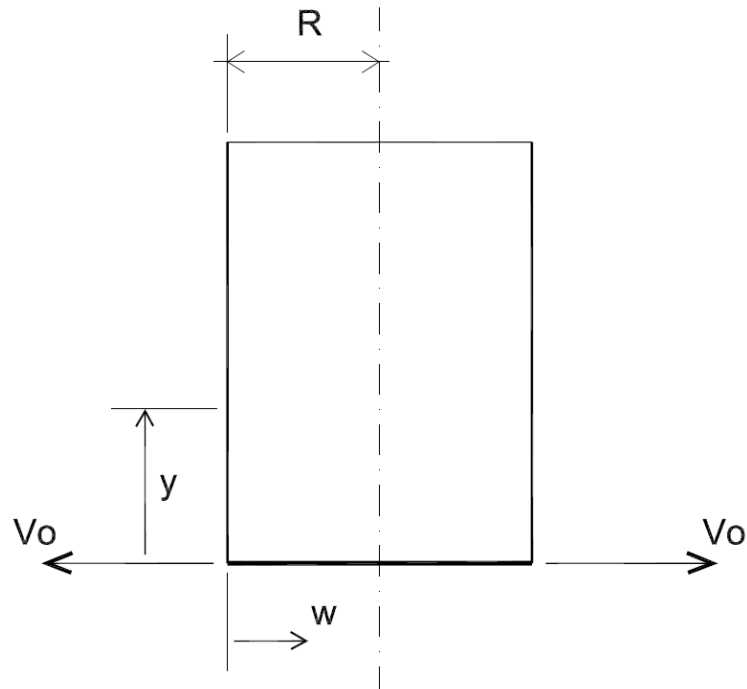
$$w = e^{-\beta y} (C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) + f(y)$$

Onde

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4R^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}$$

As tabelas e figuras a seguir auxiliam o cálculo para situações específicas que interessam.

Inicialmente, para os carregamentos indicados nas figuras a seguir, apresentam-se as expressões dos deslocamentos e dos esforços.



$$N_{\theta} = -2\theta\beta R V_0$$

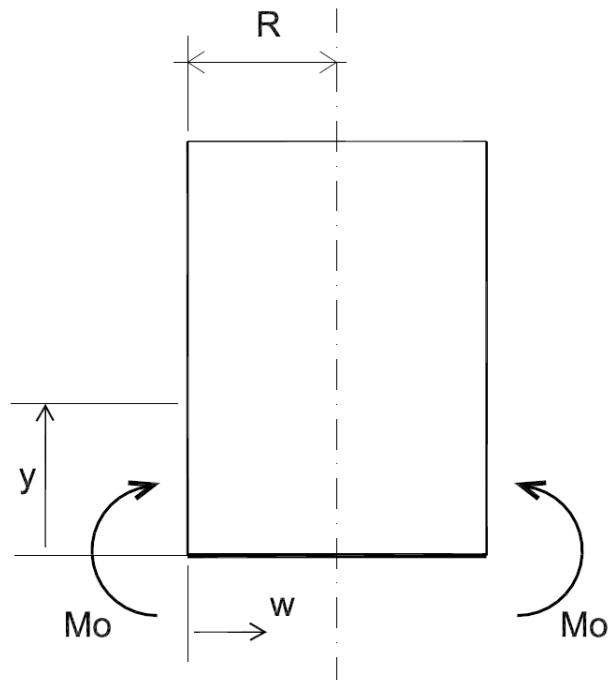
$$M_y = -\frac{\zeta}{\beta} V_0$$

$$V_y = -\psi V_0$$

$$w_{y=0} = 2\beta \frac{R^2}{Eh} V_0$$

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)_{y=0} = -2\beta^2 \frac{R^2}{Eh} V_0$$

Figura 1 – Expressões dos deslocamentos e esforços para carregamento constituído por força horizontal na borda (V_0).



$$N_{\theta} = 2\psi\beta^2 R M_0$$

$$M_y = \phi M_0$$

$$V_y = -2\zeta\beta M_0$$

$$w_{y=0} = -2\beta^2 \frac{R^2}{Eh} M_0$$

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)_{y=0} = 4\beta^3 \frac{R^2}{Eh} M_0$$

Figura 2 – Expressões dos deslocamentos e esforços para carregamento constituído por momento na borda (M_0).

Na tabela a seguir apresentam-se as funções para alguns valores de βy .

PEF 2502 – Introdução à Teoria das Cascas – 2ª. Parte

Tabela 1 – Tabela de funções (Timosheno & Krieger – Theory of plates and shells)

$$w = -\frac{1}{2\beta^3 D} [\beta M_0 \psi(\beta y) + V_0 \theta(\beta y)]$$

$$\frac{dw}{dy} = \frac{1}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 \theta(\beta y) + V_0 \phi(\beta y)]$$

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = -\frac{1}{2\beta D} [2\beta M_0 \phi(\beta y) + 2V_0 \zeta(\beta y)]$$

$$\frac{d^3 w}{dy^3} = \frac{1}{D} [2\beta M_0 \zeta(\beta y) + V_0 \psi(\beta y)]$$

$$\phi(\beta y) = e^{-\beta y} (\cos \beta y + \sin \beta y)$$

$$\psi(\beta y) = e^{-\beta y} (\cos \beta y - \sin \beta y)$$

$$\theta(\beta y) = e^{-\beta y} \cos \beta y$$

$$\zeta(\beta y) = e^{-\beta y} \sin \beta y$$

Tabela 2 – Valores numéricos das funções

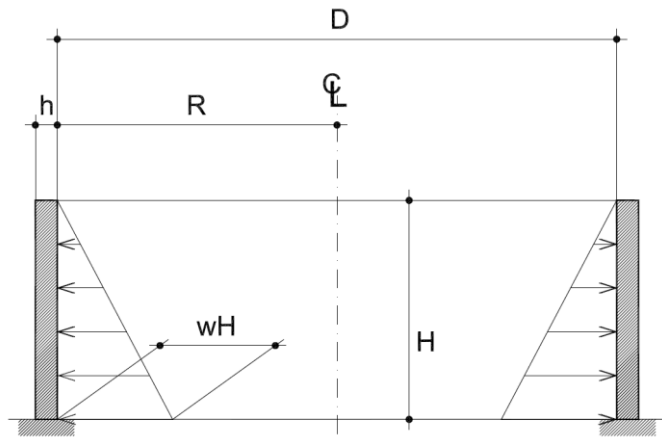
βy	ϕ	ψ	θ	ζ
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099
0,7	0,6997	0,0599	0,3798	0,3199
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	0,3223
0,9	0,5712	-0,0657	0,2527	0,3185
1,0	0,5083	-0,1108	0,1988	0,3096
1,1	0,4476	-0,1457	0,1510	0,2967
1,2	0,3899	-0,1716	0,1091	0,2807
1,3	0,3355	-0,1897	0,0729	0,2626
1,4	0,2849	-0,2011	0,0419	0,2430
1,5	0,2384	-0,2068	0,0158	0,2226
1,6	0,1959	-0,2077	-0,0059	0,2018
1,7	0,1576	-0,2047	-0,0235	0,1812
1,8	0,1234	-0,1985	-0,0376	0,1610
1,9	0,0932	-0,1899	-0,0484	0,1415
2,0	0,0667	-0,1794	-0,0563	0,1231
2,1	0,0439	-0,1675	-0,0618	0,1057
2,2	0,0244	-0,1548	-0,0652	0,0896
2,3	0,0080	-0,1416	-0,0668	0,0748
2,4	-0,0056	-0,1282	-0,0669	0,0613
2,5	-0,0166	-0,1149	-0,0658	0,0491

PEF 2502 – Introdução à Teoria das Cascas – 2ª. Parte

2,6	-0,0254	-0,1019	-0,0636	0,0383
2,7	-0,0320	-0,0895	-0,0608	0,0287
2,8	-0,0369	-0,0777	-0,0573	0,0204
2,9	-0,0403	-0,0666	-0,0534	0,0132
3,0	-0,0423	-0,0563	-0,0493	0,0070
3,1	-0,0431	-0,0469	-0,0450	0,0019
3,2	-0,0431	-0,0383	-0,0407	-0,0024
3,3	-0,0422	-0,0306	-0,0364	-0,0058
3,4	-0,0408	-0,0237	-0,0323	-0,0085
3,5	-0,0389	-0,0177	-0,0283	-0,0106
3,6	-0,0366	-0,0124	-0,0245	-0,0121
3,7	-0,0341	-0,0079	-0,0210	-0,0131
3,8	-0,0314	-0,0040	-0,0177	-0,0137
3,9	-0,0286	-0,0008	-0,0147	-0,0139
4,0	-0,0258	0,0019	-0,0120	-0,0139
4,1	-0,0231	0,0040	-0,0095	-0,0136
4,2	-0,0204	0,0057	-0,0074	-0,0131
4,3	-0,0179	0,0070	-0,0054	-0,0124
4,4	-0,0155	0,0079	-0,0038	-0,0117
4,5	-0,0132	0,0085	-0,0023	-0,0109
4,6	-0,0111	0,0089	-0,0011	-0,0100
4,7	-0,0092	0,0090	-0,0001	-0,0091
4,8	-0,0075	0,0089	0,0007	-0,0082
4,9	-0,0059	0,0087	0,0014	-0,0073
5,0	-0,0045	0,0084	0,0019	-0,0065
5,1	-0,0033	0,0079	0,0023	-0,0056
5,2	-0,0023	0,0075	0,0026	-0,0049
5,3	-0,0014	0,0069	0,0028	-0,0042
5,4	-0,0006	0,0064	0,0029	-0,0035
5,5	0,0000	0,0058	0,0029	-0,0029
5,6	0,0005	0,0052	0,0029	-0,0023
5,7	0,0010	0,0046	0,0028	-0,0018
5,8	0,0013	0,0041	0,0027	-0,0014
5,9	0,0015	0,0036	0,0025	-0,0010
6,0	0,0017	0,0031	0,0024	-0,0007
6,1	0,0018	0,0026	0,0022	-0,0004
6,2	0,0019	0,0022	0,0020	-0,0002
6,3	0,0019	0,0018	0,0018	0,0000
6,4	0,0018	0,0015	0,0017	0,0002
6,5	0,0018	0,0011	0,0015	0,0003
6,6	0,0017	0,0009	0,0013	0,0004
6,7	0,0016	0,0006	0,0011	0,0005
6,8	0,0015	0,0004	0,0010	0,0006
6,9	0,0014	0,0002	0,0008	0,0006
7,0	0,0013	0,0001	0,0007	0,0006

Finalmente, nas páginas seguintes, apresentam-se algumas tabelas que podem ser utilizadas com menor trabalho de cálculo em situações usuais.

PEF 2502 – Introdução à Teoria das Cascas – 2ª. Parte



Esforço de tração horizontal

Carregamento triangular

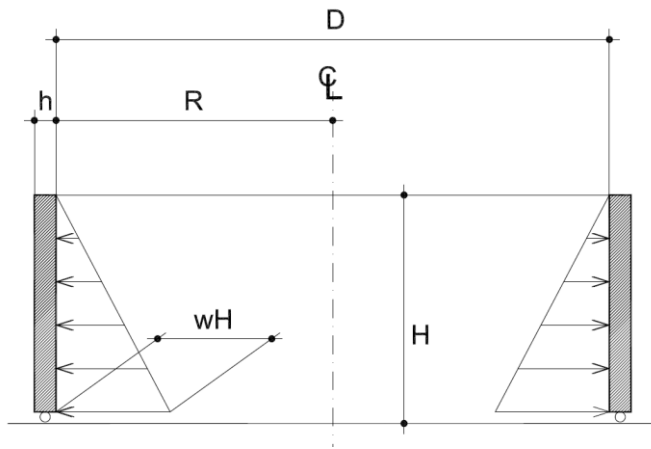
Base engastada, topo livre

$N\theta = \text{coef.} \times wHR$ (kN/m) – tração positivo

Fonte: Westbrook, R. Structural engineering design in practice. Longman Group UK Limited 1988. p.254.

$H^2/(Dxh)$	Coeficiente a ser usado na seção distante do topo de									
	0,1H	0,2H	0,3H	0,4H	0,5H	0,6H	0,7H	0,8H	0,9H	1,0H
0,4	0,149	0,134	0,120	0,101	0,082	0,066	0,049	0,029	0,014	0,004
0,8	0,263	0,239	0,215	0,190	0,160	0,130	0,096	0,063	0,034	0,010
1,2	0,283	0,271	0,254	0,234	0,209	0,180	0,142	0,099	0,054	0,016
1,6	0,265	0,268	0,266	0,250	0,226	0,185	0,134	0,075	0,075	0,023
2,0	0,234	0,251	0,273	0,285	0,285	0,274	0,232	0,172	0,104	0,031
3,0	0,134	0,203	0,267	0,322	0,357	0,362	0,330	0,262	0,157	0,052
4,0	0,067	0,164	0,256	0,339	0,403	0,429	0,409	0,334	0,210	0,073
5,0	0,025	0,137	0,245	0,346	0,428	0,477	0,469	0,398	0,259	0,092
6,0	0,018	0,119	0,234	0,344	0,441	0,504	0,514	0,447	0,301	0,112
8,0	-0,011	0,104	0,218	0,335	0,443	0,534	0,575	0,530	0,381	0,151
10,0	-0,011	0,098	0,208	0,323	0,437	0,542	0,608	0,589	0,440	0,179
12,0	-0,005	0,097	0,202	0,312	0,429	0,543	0,628	0,633	0,494	0,211
14,0	-0,002	0,098	0,200	0,306	0,420	0,439	0,639	0,666	0,541	0,241
16,0	0,000	0,099	0,199	0,304	0,412	0,531	0,641	0,687	0,582	0,265

PEF 2502 – Introdução à Teoria das Cascas – 2ª. Parte



Esforço de tração horizontal

Carregamento triangular

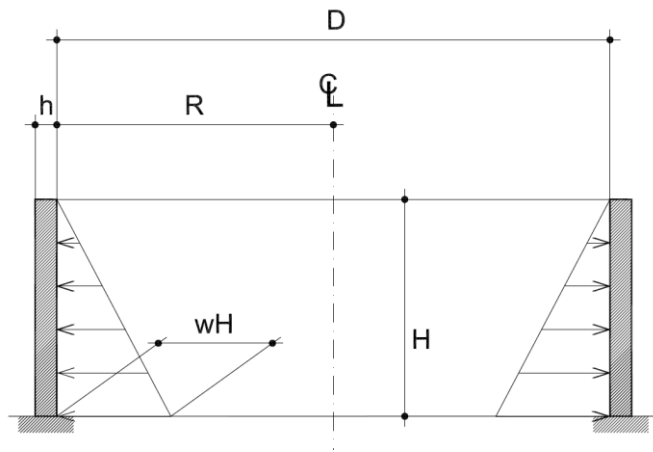
Base articulada, topo livre

$N\theta = \text{coef.} \times wHR$ (kN/m) – tração positivo

Fonte: Westbrook, R. Structural engineering design in practice. Longman Group UK Limited 1988. p.255.

$H^2/(Dxh)$	Coeficiente a ser usado na seção distante do topo de									
	0,1H	0,2H	0,3H	0,4H	0,5H	0,6H	0,7H	0,8H	0,9H	1,0H
0,4	0,474	0,440	0,395	0,352	0,308	0,264	0,215	0,165	0,111	0,057
0,8	0,423	0,402	0,381	0,358	0,330	0,297	0,249	0,202	0,145	0,076
1,2	0,350	0,355	0,361	0,362	0,358	0,343	0,309	0,256	0,186	0,098
1,6	0,271	0,303	0,341	0,369	0,385	0,385	0,362	0,314	0,233	0,124
2,0	0,205	0,26	0,321	0,373	0,411	0,434	0,419	0,369	0,280	0,151
3,0	0,074	0,179	0,281	0,375	0,449	0,506	0,519	0,479	0,375	0,210
4,0	0,017	0,137	0,253	0,367	0,469	0,545	0,579	0,553	0,447	0,256
5,0	-0,008	0,114	0,235	0,356	0,469	0,562	0,617	0,606	0,503	0,294
6,0	-0,011	0,103	0,223	0,343	0,463	0,566	0,639	0,643	0,547	0,327
8,0	-0,015	0,096	0,208	0,324	0,443	0,564	0,661	0,697	0,621	0,386
10,0	-0,008	0,095	0,200	0,311	0,428	0,552	0,666	0,730	0,678	0,433
12,0	-0,002	0,097	0,197	0,302	0,417	0,541	0,664	0,750	0,720	0,477
14,0	0,000	0,098	0,197	0,299	0,408	0,531	0,659	0,761	0,752	0,513
16,0	0,002	0,100	0,198	0,299	0,403	0,521	0,650	0,764	0,776	0,536

PEF 2502 – Introdução à Teoria das Cascas – 2ª. Parte



Momentos na parede cilíndrica

Carregamento triangular

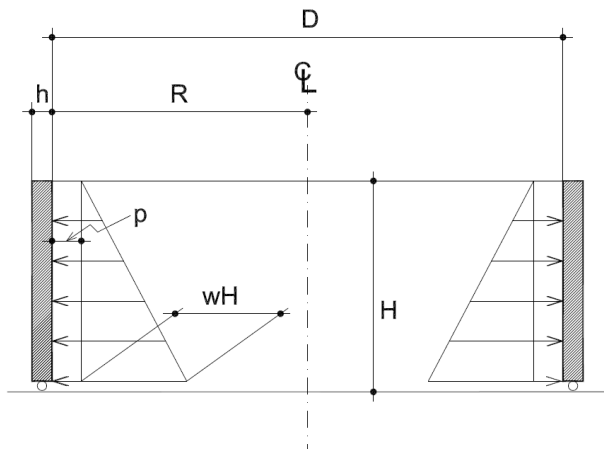
Base engastada, topo livre

$M_y = \text{coef.} \times wH^3$ (kN.m/m) – sinal positivo indica tração no lado externo

Fonte: Westbrook, R. Structural engineering design in practice. Longman Group UK Limited 1988. p.256.

$H^2/(Dxh)$	Coeficiente a ser usado na seção distante do topo de									
	0,1H	0,2H	0,3H	0,4H	0,5H	0,6H	0,7H	0,8H	0,9H	1,0H
0,4	0,0005	0,0014	0,0021	0,0007	-0,0042	-0,0150	-0,0302	-0,0529	-0,0816	-0,1205
0,8	0,0011	0,0037	0,0063	0,0080	0,0070	0,0023	-0,0068	-0,0224	-0,0465	-0,0795
1,2	0,0012	0,0042	0,0077	0,1030	0,0112	0,0090	0,0022	-0,0108	-0,0311	-0,0602
1,6	0,0011	0,0041	0,0075	0,1070	0,0121	0,0111	0,0058	-0,0510	-0,0232	-0,0505
2,0	0,0010	0,0035	0,0068	0,0099	0,0120	0,0115	0,0075	-0,0021	-0,0185	-0,0436
3,0	0,0006	0,0024	0,0047	0,0071	0,0090	0,0097	0,0077	0,0012	-0,1190	-0,0333
4,0	0,0003	0,0015	0,0028	0,0047	0,0066	0,0077	0,0069	0,0023	-0,0080	-0,0268
5,0	0,0002	0,0008	0,0016	0,0029	0,0046	0,0059	0,0059	0,0028	-0,0058	-0,0222
6,0	0,0001	0,0003	0,0008	0,0019	0,0032	0,0046	0,0051	0,0029	-0,0041	-0,0187
8,0	0,0000	0,0001	0,0002	0,0008	0,0016	0,0028	0,0038	0,0029	-0,0022	-0,0146
10,0	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0007	0,0019	0,0029	0,0028	-0,0012	-0,0122
12,0	0,0000	-0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0013	0,0023	0,0026	-0,0005	-0,0104
14,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0019	0,0023	-0,0001	-0,0090
16,0	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0002	-0,0001	0,0004	0,0013	0,0019	0,0001	-0,0079

PEF 2502 – Introdução à Teoria das Cascas – 2ª. Parte



Momentos na parede cilíndrica

Carregamento trapezoidal

Base articulada, topo livre

$M_y = \text{coef.} \times (wH^3 + pH^2)$ (kN.m/m) – sinal positivo indica tração no lado externo

Fonte: Westbrook, R. Structural engineering design in practice. Longman Group UK Limited 1988. p.257.

$H^2/(Dxh)$	Coeficiente a ser usado na seção distante do topo de									
	0,1H	0,2H	0,3H	0,4H	0,5H	0,6H	0,7H	0,8H	0,9H	1,0H
0,4	0,0020	0,0072	0,0151	0,0230	0,0301	0,0348	0,0357	0,0312	0,0197	0
0,8	0,0019	0,0064	0,0133	0,0207	0,0271	0,0319	0,0329	0,0292	0,0187	0
1,2	0,0016	0,0058	0,0111	0,0177	0,0237	0,0280	0,0296	0,0263	0,0171	0
1,6	0,0012	0,0044	0,0091	0,0145	0,0195	0,0236	0,0255	0,0232	0,0155	0
2,0	0,0009	0,0033	0,0073	0,0114	0,0158	0,0199	0,0219	0,0205	0,0145	0
3,0	0,0004	0,0018	0,0040	0,0063	0,0092	0,0127	0,0152	0,0153	0,0111	0
4,0	0,0001	0,0007	0,0016	0,0033	0,0057	0,0083	0,0109	0,0118	0,0092	0
5,0	0,0000	0,0001	0,0006	0,0016	0,0034	0,0057	0,0080	0,0094	0,0078	0
6,0	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0019	0,0039	0,0062	0,0078	0,0068	0
8,0	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0000	0,0007	0,0020	0,0038	0,0057	0,0054	0
10,0	0,0000	0,0000	-0,0002	-0,0001	0,0002	0,0011	0,0025	0,0043	0,0045	0
12,0	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0002	0,0000	0,0005	0,0017	0,0032	0,0039	0
14,0	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0012	0,0026	0,0033	0
16,0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0002	-0,0004	0,0008	0,0022	0,0029	0

PEF 2502 – Introdução à Teoria das Cascas – 2ª. Parte

Cisalhamento na base da parede cilíndrica

$V =$ coef. x wH^2 kN (carregamento triangular)

coef. x pH kN (retangular)

Sinal positivo indica força atuando para dentro.

Fonte: Westbrook, R. Structural engineering design in practice. Longman Group UK Limited 1988. p.258.

$H^2/(Dxh)$	Carga triangular, base engastada	Carga retangular, base engastada	Carga triangular ou retangular, base articulada
0,4	0,436	0,755	0,245
0,8	0,374	0,552	0,234
1,2	0,339	0,460	0,220
1,6	0,317	0,407	0,204
2,0	0,299	0,370	0,189
3,0	0,262	0,310	0,158
4,0	0,236	0,271	0,137
5,0	0,213	0,243	0,121
6,0	0,197	0,222	0,110
8,0	0,174	0,193	0,096
10,0	0,158	0,172	0,087
12,0	0,145	0,158	0,079
14,0	0,135	0,147	0,073
16,0	0,127	0,137	0,068

