PEF2602
Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

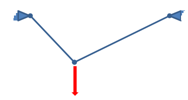
Arcos e Cabos – I

(Aula 3 - 29/08/2016)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti & Leila Meneghetti Valverdes
2º Semestre 2016

CABOS: estruturas lineares e flexíveis, capazes de resistir exclusivamente à forças normais de tração.

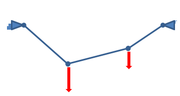
Como os cabos não desenvolvem forças cortantes nem momentos fletores, somente são capazes de equilibrar cargas transversais ajustando a sua geometria:



❖ Uma força transversal concentrada provoca uma mudança abrupta da direção do eixo do cabo!

CABOS: estruturas lineares e flexíveis, capazes de resistir exclusivamente à forças normais de tração.

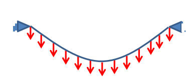
Como não desenvolvem forças cortantes nem momentos fletores, somente são capazes de equilibrar cargas transversais ajustando a sua geometria:



❖ O cabo se ajusta às forças concentradas, assumindo uma geometria poligonal

CABOS: estruturas lineares e flexíveis, capazes de resistir exclusivamente à forças normais de tração.

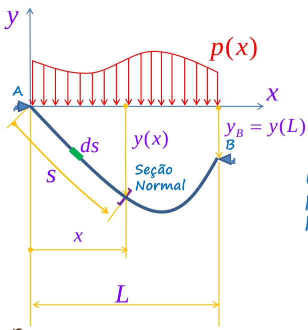
Como não desenvolvem forças cortantes nem momentos fletores, somente são capazes de equilibrar cargas transversais ajustando a sua geometria:



❖ Forças distribuídas provocam variações contínuas de direção do eixo do cabo, ou seja, o cabo equilibra esforços transversais ajustando a sua CURVATURA

Cabos sob carregamento contínuo

Notação:



x : Abscissa cartesiana

s : Abscissa curvilínea

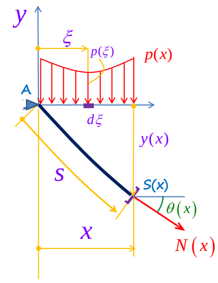
L : Vão

ℓ : comprimento do cabo

Um ponto do eixo do cabo pode ser identificado tanto por x como por s!

$$\ell = \int_0^{s(L)} ds = \int_0^L \left(\frac{ds}{dx}\right) dx$$

Equilíbrio de momentos de um segmento de cabo:



Os momentos fletores são sempre nulos, ou seja:

$$M(x) = M(s(x)) = 0 \begin{cases} \forall x \in [0, L] \\ \forall s \in [0, \ell] \end{cases}$$

As forças cortantes também são sempre nulas, pois

$$V(x) = V(s(x)) = \frac{dM}{dx} = 0 \ , \quad \forall x$$

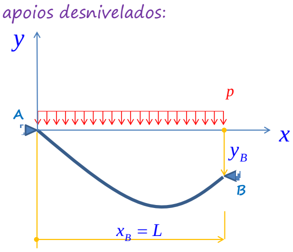
Logo o único esforço solicitante é a força normal N(x), tangente ao eixo do cabo!

$$\boxed{\sum M_{(A)} = \left(N(x)\cos\theta\right)\cdot y(x) - \left(N(x)\sin\theta\right)\cdot x - \int_0^x \left(p(\xi)\cdot\xi\right) d\xi = 0 \ , \ \forall x \in [0, L]}$$

Cabo sujeito à carga vertical uniformemente distribuída:

"CABO PARABÓLICO"

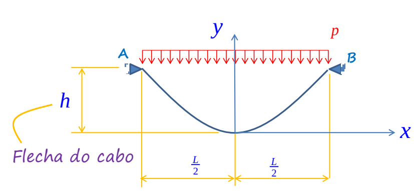
Caso geral: apoios desnivelados:



Cabo sujeito à carga vertical uniformemente distribuída:

"CABO PARABÓLICO"

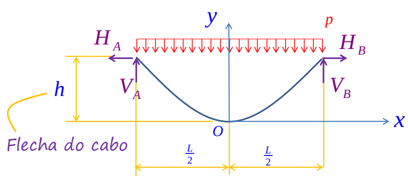
Caso particular: apoios nivelados



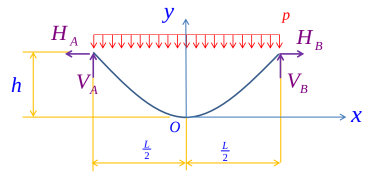
Cabo sujeito à carga vertical uniformemente distribuída:

"CABO PARABÓLICO"

Diagrama de corpo livre:



<u>Equilíbrio do cabo parabólico:</u>



$\sum F_X = H_B - H_A = 0 \quad \therefore \quad \boxed{H_A = H_B = H}$ "Empuxo"

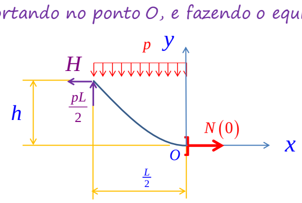
$\sum F_Y = V_A + V_B - pL = 0$

$\sum M_{(A)} = V_B L - \frac{pL^2}{2} = 0$

$\Big\} \quad \boxed{V_A = V_B = \frac{pL}{2}}$ Simetria, OK!

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Cortando no ponto O, e fazendo o equilíbrio da parte da esquerda:



Cortante para x=0: $V(0) = 0$

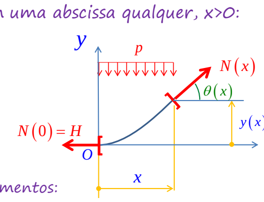
$\sum M_{(O)} = 0 \quad \therefore \quad Hh - \frac{pL}{2} \cdot \frac{L}{2} + \frac{pL}{2} \cdot \frac{L}{4} = 0$

$\boxed{H = \frac{pL^2}{8h}}$ <u>"Fórmula do empuxo"</u>

$\sum F_Y = -H + N(0) = 0 \quad \therefore \quad N(0) = H$

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Cortando em uma abscissa qualquer, x>0:



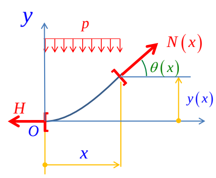
<u>Equilíbrio</u> de Momentos:

$\sum M_{(SN(x))} = 0 \quad \therefore \quad -Hy - px \cdot \frac{x}{2} = 0 \quad \therefore \quad y = \frac{px^2}{2H}$

Mas $H = \frac{pL^2}{8h}$ logo $\boxed{y = \left(\frac{4h}{L^2}\right)x^2}$ Uma parábola! (CQD)

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Cortando em uma abscissa qualquer, x>O:



Equilíbrio Horizontal:

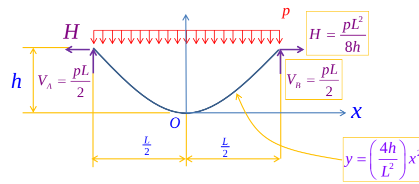
$\therefore \quad N(x)\cos\theta = H$, constante!

$\therefore$ A componente horizontal da força no cabo parabólico é constante e igual ao empuxo!

$N(x) = \dfrac{H}{\cos\theta}$ $\therefore$ N(x) é máxima nos apoios, onde cos(θ) é mínimo

$$N_{\max} = \sqrt{H^2 + V_A^2} \qquad N_{\max} = \frac{pL}{2}\sqrt{1+\left(\frac{L}{4h}\right)^2}$$

Em resumo, para o cabo parabólico (com apoios nivelados):



$$H = \frac{pL^2}{8h} \qquad V_A = \frac{pL}{2} \qquad V_B = \frac{pL}{2} \qquad y = \left(\frac{4h}{L^2}\right)x^2$$

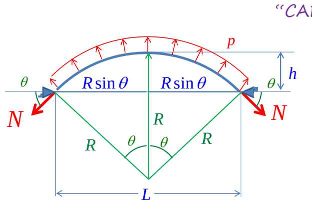
Para h=L/10 (típico): $N_{\max} = 1{,}34\,pL = 2{,}68 V_A$

Comprimento do cabo parabólico:

Tem expressão exata, mas complicada...
É útil a aproximação: $\boxed{\ell \simeq L + \dfrac{8h^2}{3L}}$

Cabo sujeito à pressão transversal uniforme:

"CABO CIRCULAR"



A simetria de qualquer seção exige que a curvatura seja constante!

Logo o Raio de curvatura é constante!

$$\boxed{R = \frac{L^2}{8h} + \frac{h}{2}}$$

Logo a força normal N em qualquer seção é constante!

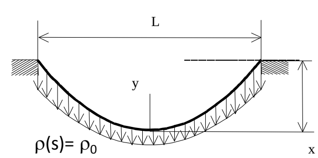
Equilíbrio vertical : $2pR\sin\theta - 2N\sin\theta = 0\,, \quad \forall\theta$

$$\boxed{N = pR}$$

Comprimento do cabo circular: $\boxed{\ell = 2R\theta}$

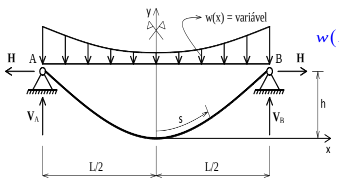
Onde: $\boxed{\cos\theta = \frac{R-h}{R}}$ Ou seja, $\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R-h}{R}\right)}$

Cabo sujeito ao peso próprio: CABO CATENÁRIO



Peso próprio por unidade de comprimento (kN/m): ρ_0

Cabo sujeito ao peso próprio: CABO CATENÁRIO



$$w(x) = \frac{\rho_0}{\cos\theta(x)}$$

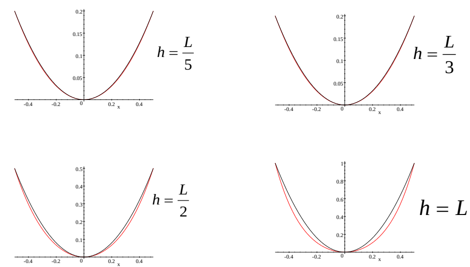
Geometria do cabo catenário: $$y(x) = \frac{H}{\rho_0}\left[\cosh\frac{\rho_0}{H}x - 1\right]$$

(Vide artigo "Sobre Cabos e Cordas", na página da disciplina!)

Para h<=L/10, o cabo catenário e o cabo parabólico praticamente se confundem!

Comprimento do cabo catenário: $$\ell = \frac{2H}{\rho_0}\sinh\left(\frac{\rho_0 L}{2H}\right)$$

Comparação entre a catenária e a parábola:

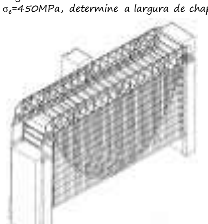


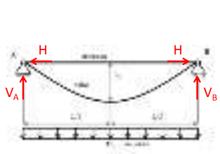
Note-se que a escala do eixo está sempre exagerada, exceto no caso h=L

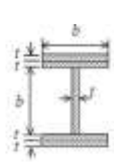
Para pequenas flechas a catenária e a parábola se confundem!

Exemplo (PEF2602-P1-Q1-2010): A figura mostra o prédio do 'Federal Reserve Bank', localizado em Minneapolis, EUA. Cada um dos 11 pisos tem vão transversal de 18m, e a carga total dos pisos é transferida para dois "cabos parabólicos" (constituídos, na prática, por perfis metálicos), por meio de montantes (trabalhando à compressão, nos trechos acima dos cabos) e por tirantes (trabalhando à tração, nos trechos abaixo dos cabos). Os cabos têm vão L=84m e flecha h=30m , e são ancorados ao topo de duas torres laterais. As reações verticais das ancoragens são transferidas às torres, enquanto o empuxo é equilibrado por duas estroncas treliçadas, localizadas no topo do prédio.

- Considere uma carga total, uniformemente distribuída sobre cada um dos 11 pisos, q=2,5 kN/m². e determine a carga w (em kN/m), uniformemente distribuída, agindo em cada um dos cabos parabólicos;
- Determine o empuxo horizontal H e as reações apoios A e B de cada cabo, indicados no modelo estrutural esquematizado abaixo;
- Determine a máxima tração N_{max} em cada cabo;
- Considere que a seção transversal dos cabos seja composta por três chapas de aço de espessura t=30mm e largura b. Admitindo um coeficiente de segurança s=2 e um aço com tensão de escoamento tração σ_e=450MPa, determine a largura de chapa necessária.







$$\begin{cases} q = 2,5kN/m^2 \\ d = 18m; \quad L = 84m; \quad h = 30m \\ n = 11 \end{cases} \qquad w = n\frac{qd}{2} = 11\frac{2,5\times18}{2} = 247,5kN/m$$

Reações de apoio $$H_A = 0$$
$$V_A = V_B = \frac{wL}{2} = \frac{247,5\times84}{2} = 10.395,0kN$$

O empuxo do cabo é sustentado pela estronca, que trabalha comprimida, e vale

$$H = \frac{wL^2}{8h} = \frac{247,5\times84^2}{8\times30} = 7.276,5kN$$

A máxima força normal ocorre nos apoios e vale

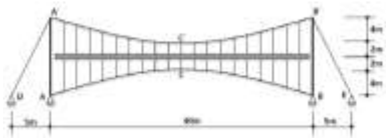
$$N_{max} = \sqrt{V_A{}^2 + H^2} = \sqrt{10.395^2 + 7.276,5^2} = 12.688,7kN$$

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A_c} \le \frac{\sigma_e}{s} \qquad A_c = 5bt \ge \frac{sN_{max}}{\sigma_e}$$

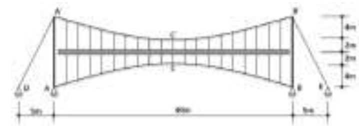
$$b \ge \frac{sN_{max}}{5t\sigma_e} = \frac{2\times12.688,7\times10^3}{5\times30\times10^{-3}\times450\times10^6} = 0,376m$$

1ª Questão (5,0): [illegible]

[illegible]



[illegible]



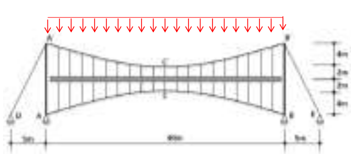
[illegible]

(a) [illegible]

(b) [illegible]

(c) [illegible]

(d) [illegible]

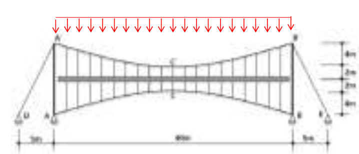


[illegible]

$$\omega_0 = \frac{T_0}{d} = \frac{8}{2} = 4kN/m$$

$$H_0 = \frac{\omega_0 L^2}{8h} = \frac{4\times 40^2}{8\times 4} = 200kN \qquad V_0 = \frac{\omega_0 L}{2} = \frac{4\times 40}{2} = 80kN$$

$$N^0_{max} = \sqrt{H_0^2 + V_0^2} = \sqrt{200^2 + 80^2} = 215,41kN$$



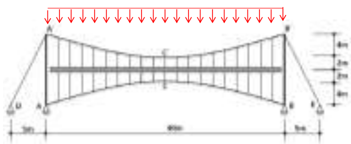
Indicando o ângulo que o estai DA' faz com a vertical AA' por α:

$$\sin\alpha = DA/DA' = 5/\sqrt{5^2+12^2} = 5/13 \quad ; \quad \cos\alpha = AA'/DA' = 12/13$$

O equilíbrio de momentos da coluna AA' em torno do ponto A fornece a tração no estai DA':

$$N^0_{est}\sin\alpha \times AA' - H_0 \times AA' = 0$$

$$N^0_{est} = \frac{H_0}{\sin\alpha} = \frac{13}{5}200 = 520kN$$



A compressão na coluna AA' equilibra as componentes verticais das trações no estai e no cabo superior

$$N_{col}^{0}=-\left(N_{est}^{0}\cos\alpha+V_{0}\right)=-\left(520\times\frac{12}{13}+80\right)=-560kN$$

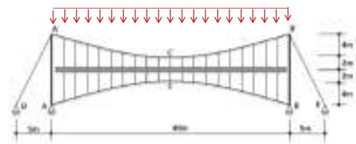
A reação vertical no apoio A é para cima, e vale

$$V_{A}^{0}=-N_{col}^{0}-V_{0}=480kN$$

(ou seja, igual à componente vertical da tração no estai!)

A reação horizontal no apoio A, deve equilibrar o empuxo no cabo inferior,

ou seja, $H_{A}^{0}=-200kN$ (para a esquerda!)

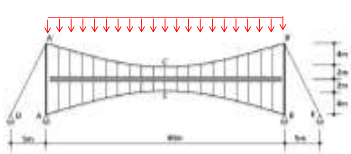


(c.d) Com o deck: Admitindo que os cabos tenham a mesma rigidez, a carga distribuída no cabo superior cresce, e a carga no cabo inferior decresce do mesmo valor. Como o deck se apoia em dois cabos-treliças, dispostos ao longo dos lados maiores,

$$\Delta\omega=\frac{\gamma b}{2} \qquad \boxed{b=8\text{ metros}} \qquad \Delta\omega=\frac{0,5\times 8}{2}=2,0kN/m$$

$$\omega_{sup}^{1}=\omega_{0}+\Delta\omega=4+2=6kN/m \quad \begin{cases} H_{sup}^{1}=\dfrac{\omega_{sup}^{1}L^{2}}{8h}=\dfrac{6\times 40^{2}}{8\times 4}=300kN \\ V_{sup}^{1}=\dfrac{\omega_{sup}^{1}L}{2}=\dfrac{6\times 40}{2}=120kN \end{cases}$$

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

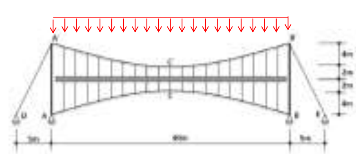


$$N_{sup}^{1}=\sqrt{\left(H_{sup}^{1}\right)^{2}+\left(V_{sup}^{1}\right)^{2}}=\sqrt{300^{2}+120^{2}}=323,11kN$$

$$N_{est}^{1}=\frac{H_{sup}^{1}}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}300=780kN$$

$$N_{col}^{1}=-\left(N_{est}^{1}\cos\alpha+V_{sup}^{1}\right)=-\left(780\times\frac{12}{13}+120\right)=-840kN$$

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

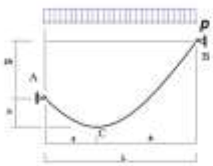


$$\omega_{inf}^{1}=\omega_{0}-\Delta\omega=4-2=2kN/m \quad \begin{cases} H_{inf}^{1}=\dfrac{\omega_{inf}^{1}L^{2}}{8h}=\dfrac{2\times 40^{2}}{8\times 4}=100kN \\ V_{inf}^{1}=\dfrac{\omega_{inf}^{1}L}{2}=\dfrac{2\times 40}{2}=40kN \end{cases}$$

$$N_{inf}^{1}=\sqrt{\left(H_{inf}^{1}\right)^{2}+\left(V_{inf}^{1}\right)^{2}}=\sqrt{100^{2}+40^{2}}=107,70kN$$

$$V_{A}^{1}=-N_{col}^{1}-V_{inf}^{1}=840-40=800kN \text{ (para cima!)}$$

$$H_{A}^{1}=-H_{inf}^{1}=-100kN \text{ (para a esquerda)}$$



4ª Questão (2,0): Determine a máxima tração no cabo da figura ao lado, sujeito a um carregamento vertical uniformemente distribuído $p=\left(30+\frac{m}{2}\right)kN/m$, onde m é o penúltimo algarismo não-nulo do seu número USP. São dados $L=30m$ e $h=2m$.

Gabarito -4A

Equilíbrio de momentos do trecho AC em torno de A: $Hh=\frac{pa^2}{2} \Rightarrow H=\frac{pa^2}{2h}$

Equilíbrio de momentos do trecho CB em torno de B: $3Hh=\frac{p(L-a)^2}{2} \Rightarrow H=\frac{p(L-a)^2}{6h}$

$$\frac{pa^2}{2h}=\frac{p(L-a)^2}{6h} \Rightarrow 3a^2=(L-a)^2 \Rightarrow 2a^2+2La-L^2=0 \Rightarrow a=\left(-1\pm\sqrt{3}\right)\frac{L}{2}$$

Toma-se a raiz positiva: $a=\left(-1+\sqrt{3}\right)\frac{L}{2}=0,36603L$ Para L=30m: $\boxed{a=10,981m}$

Logo: $\boxed{H=\frac{pa^2}{2h}=30,15p}$

Nota: há outras formas de resolver esta questão, por exemplo, impondo que o empuxo no ponto C seja o mesmo, considerando o trecho da esquerda ou da direita, ou buscando os coeficientes da parábola que passa pelos pontos A B e C.

Equilíbrio vertical: $\sum_Y=V_A+V_B-pL=0$

Equilíbrio de momentos em relação ao apoio A: $\sum M_{(A)}=LV_B-\frac{pL^2}{2}-2Hh=0$

$$V_B=\frac{pL}{2}+\frac{2h}{L}H \Rightarrow V_A=\frac{pL}{2}-\frac{2h}{L}H \Rightarrow \text{A máxima tração ocorre no apoio B!}$$

Substituindo valores ($L=30m$, $h=2m$, $a=10,981m$): $\boxed{\begin{array}{l} H=30,15p \\ V_B=19,02p \\ V_A=10,98p \end{array}} \Rightarrow \boxed{N_{max}=\sqrt{H^2+V_B^2}=35,64p}$

Exercício: A Figura 1 mostra a cobertura do Aeroporto Dulles, em Washington (Arq. Eero Saarinen, 1958), a qual consiste de uma casca de concreto protendido, obtida por meio de um engenhoso sistema construtivo, ilustrado na Figura 2. A cobertura tem geometria cilíndrica, com uma geratriz catenária, razoavelmente aproximada por uma parábola, funicular, portanto, a um carregamento vertical uniformemente distribuído. O peso próprio da estrutura é da ordem de $w_{pp}=6kN/m^2$. As cargas adicionais (neve e outros carregamentos) atingem $w_{ad}=4kN/m^2$. Os cabos de protensão estão espaçados de 3m, e ancoram-se a vigas de borda que transferem as cargas para os topos de colunas inclinadas, engastadas nas bases, afastadas entre si de 12m. A cobertura tem um vão transversal de 50m, medindo 192m na direção transversal.

Figura 1

Considerando o esquema estrutural da Figura 3, determine a altura y_C que define a menor cota da cobertura (ponto C). Determine as reações de ancoragem dos cabos de protensão nas vigas de borda (pontos A e B). Determine as cargas resultantes nos topos das colunas, e o momento fletor nas ancoragens das colunas maiores (ponto D), quando atuar a carga $w_{pp}+w_{ad}$. Desconsidere o peso da coluna. Compare o momento fletor na base das coluna inclinada com o momento que resultaria do uso de colunas verticais (ou seja, dispostas segundo o eixo BE, e engastadas em E).

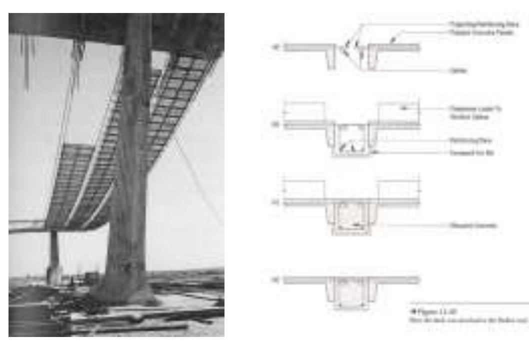


Figura 2

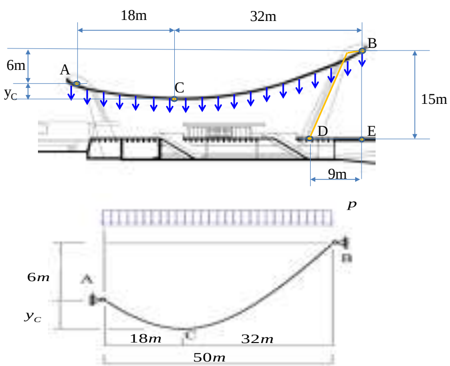


Figura 3