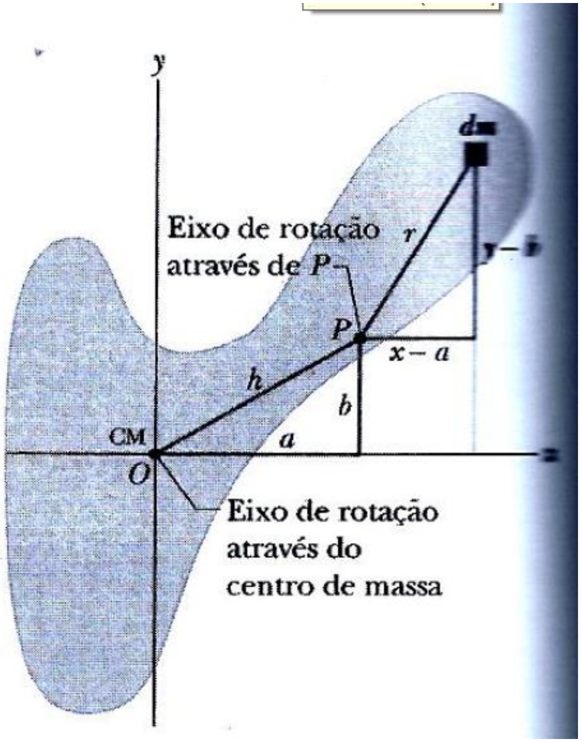
Física I IME

2º Semestre de 2016

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: **Luiz Nagamine**
E-mail: **nagamine@if.usp.br**
Fone: 3091.6877

27, 29 de setembro



$$I = \int r^2 dm = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right] dm$$

$$I = \int \left(x^2 + y^2 \right) dm - 2a \int x\, dm - 2b \int y\, dm + \int \left(a^2 + b^2 \right) dm$$

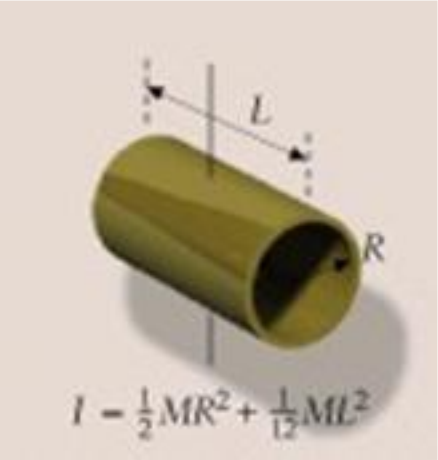
I_{CM} 0 0 h^2M

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

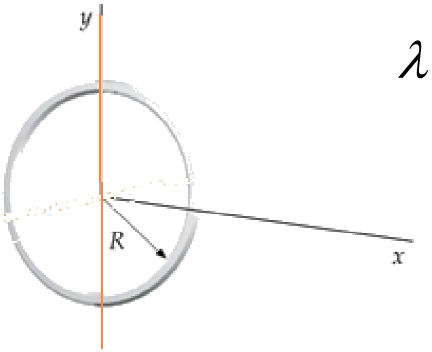
Exemplo

Teorema dos Eixos Paralelos

Vamos calcular o momento de inércia do corpo ao lado.



Mas inicialmente, calcularemos o momento de inércia de uma espira de massa m e raio R, através do eixo que passa por seu cento de massa.



$$\lambda = \frac{m}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad dm = \lambda dl = \frac{m}{2\pi R} R d\theta$$

$$I = 4\int_0^{\pi/2} (R\cos\theta)^2 \frac{m}{2\pi R} R d\theta = \frac{2mR^2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^2 d\theta$$

$$I_{cm} = \frac{mR^2}{2}$$

Mas, se esta espira estiver com seu eixo a uma distância l do eixo principal, ela contribuirá para o momento de inércia total, com

$$dI = \frac{dm \cdot R^2}{2} + dm \cdot l^2$$

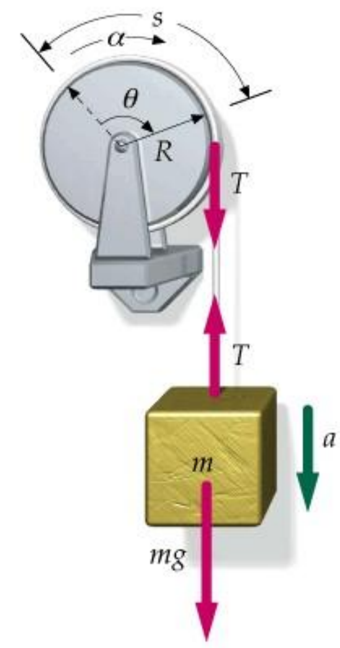
$$dm = \frac{M}{L} dl$$

$$dI = \frac{\frac{M}{L} dl \cdot R^2}{2} + \frac{M}{L} dl \cdot l^2$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M dl \cdot R^2}{2L} + \frac{M}{L} dl \cdot l^2 = \frac{MR^2}{2} + \frac{ML^2}{12}$$

Exemplo

Um objeto de massa *m* está suspenso por um fio de massa m_f que foi enrolado na polia, que tem raio *R* e massa m_P . Suponha que toda a massa da polia esteja em sua borda e que no instante inicial o corpo esteja em repouso e o fio enrolado. Determine qual a velocidade do corpo quando ele tiver caído uma distância *d*.



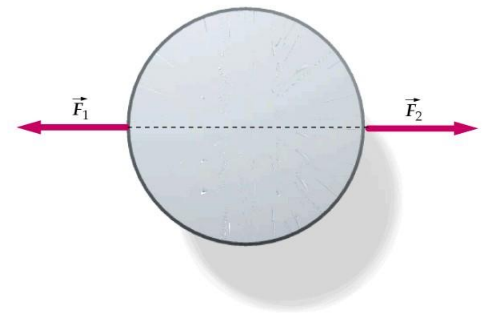
Considerando o sistema como sendo constituído pela corpo, polia e a Terra, temos conservação da energia mecânica, então

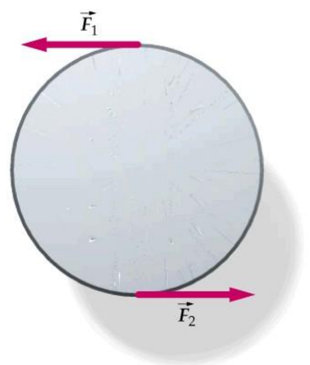
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\left.\begin{aligned} &0 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_f v^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mg(-d) + m_f^* g(-d/2) \\ &I = m_p R^2 \\ &m_f^* = \frac{d}{L}m_f \end{aligned}\right\} \quad v = \sqrt{\frac{(2mL + m_f d)gd}{(m_f + m + m_p)L}}$$

Torque

Já vimos a Segunda Lei de Newton, onde a resultante das forças externas provoca a aceleração do centro de massa de sistemas. Porém, quando a linha de ação das forças externas não passa pelo centro de massa, temos um segundo efeito, que é a rotação do sistema. Esta rotação é acelerada. Assim, temos o equivalente à Segunda Lei de Newton, para a rotação.





Considere uma partícula de massa m, presa a uma barra de comprimento r. Uma força F é aplicada à partícula, como na figura ao lado. Para a componente tangencial da força, temos:

FIGURA 9-19

$$F_t = ma_t$$

Onde, F_t= FsinΦ

Usando-se a_t= rα e multiplicando a equação por r, temos:

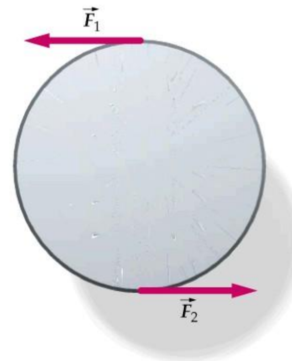
$$rF_t = mr^2\alpha$$

O produto rF_t é o Torque τ em relação ao eixo de rotação A

$$\tau = mr^2\alpha$$

Torque

Um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é uma coleção de partículas, com as mesmas velocidade e aceleração angulares.



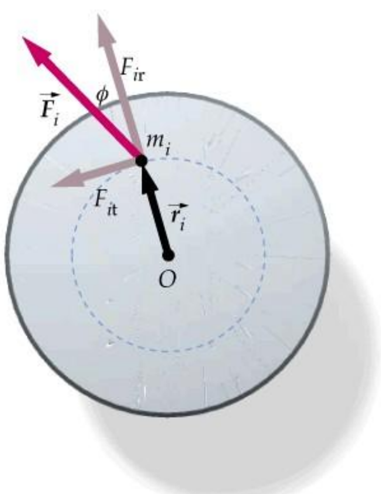
$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Somando sobre todas as partículas do corpo, temos:

$$\sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum m_i r_i^2\right)\alpha = I\alpha$$

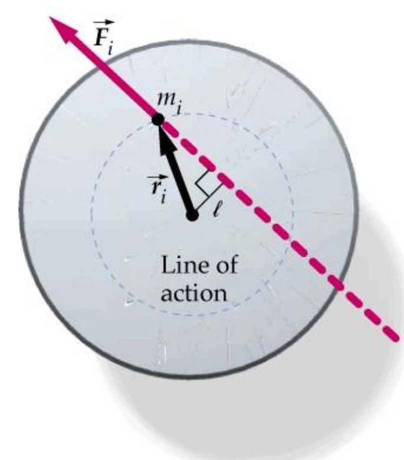
$$\tau_{ext_{res}} = I\alpha$$

Segunda Lei de Newton para a rotação



Para rotações, o que nos interessa são as componentes tangenciais da força

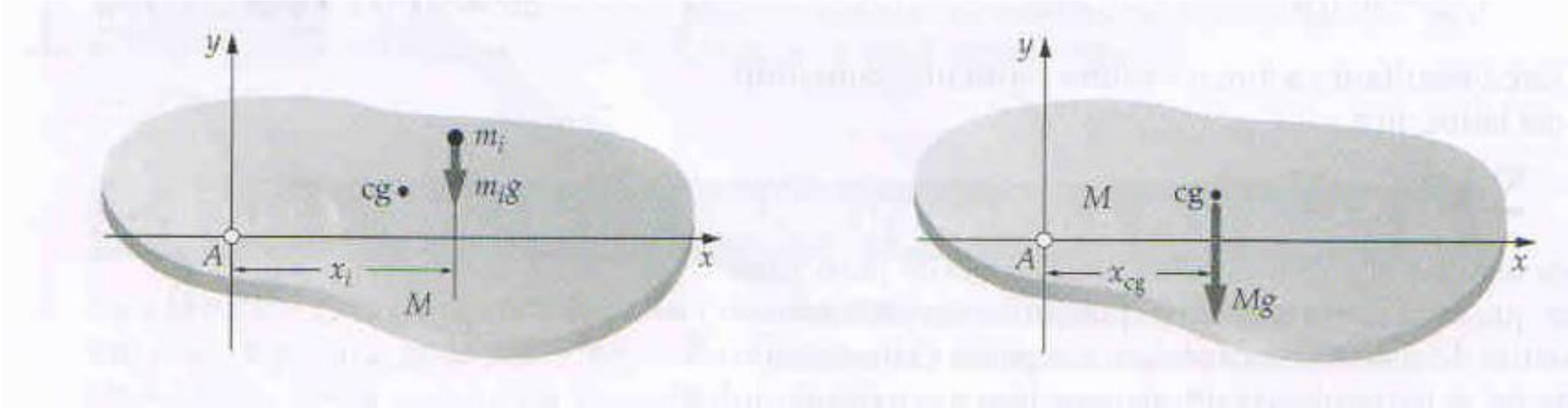
$$\tau = F_t r = F \sin\phi \cdot r = F r \sin\phi = F l$$



Onde, l é o “braço de alavanca”

Exemplo

Considere um corpo extenso de massa M, apoiado pelo eixo A e submetido à força gravitacional.



O torque sobre cada partícula constituinte será:

$$\tau_i = F_i r_i = m_i g x_i$$

O torque total sobre o corpo será a soma dos torques sobre todas as partículas constituintes

$$\tau_{ext_{res}} = \sum m_i g x_i = \left(\sum m_i x_i\right) g = M x_{cm} g = P x_{cm}$$

Exemplo

Uma bicicleta ergométrica possui uma roda com grande massa (2,4 kg) e raio R= 35 cm. Aplica-se uma força de 18 N a uma distância de 7 cm do eixo da roda. Após 5 s, qual é a velocidade angular da roda?

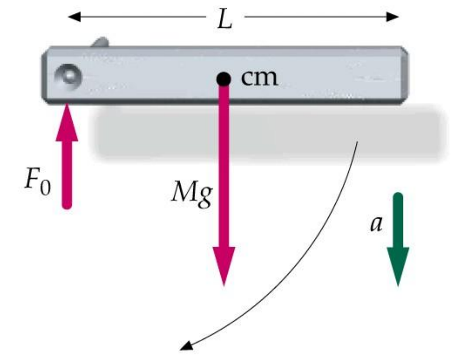
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t \\ \tau_{ext_{res}} = I\alpha = Fr \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{Fr}{I} = \frac{Fr}{MR^2}$$

$$\omega = \frac{Fr}{MR^2} t = 21 rad/s$$

Exemplo

Uma barra de comprimento L e massa M, articulada em sua extremidade, é largada do repouso, da posição horizontal. Determine (a) a sua aceleração angular, quando largada e (b) a força exercida pelo pivô sobre a barra, neste intante.



O torque em relação ao eixo de rotação é dado apenas pela força peso.

$$\tau_{ext} = I\alpha = Px_{cm}$$

$$\alpha = \frac{Px_{cm}}{I}$$

$$\alpha = \frac{Mg(L/2)}{(1/3)ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

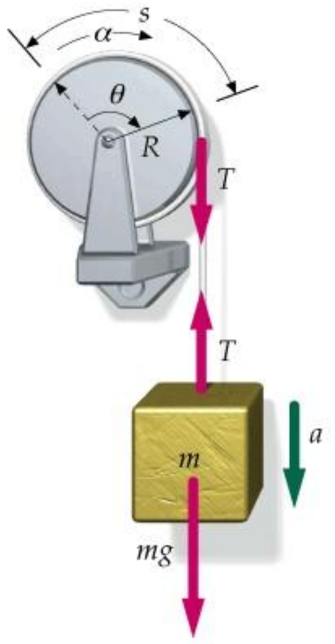
$$F_{ext} = Ma_{cm}$$

$$Mg - F_0 = Mx_{cm}\alpha$$

$$F_0 = M(g - x_{cm}\alpha) = Mg/4$$

Exemplo

Um objeto de massa *m* está suspenso por um fio leve que foi enrolado na polia com momento de inércia *I* e raio *R*. A polia é largada do repouso. Determine a tensão no fio e a aceleração do objeto.



Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à polia (rotação) e ao objeto. (o peso e a normal na polia, não geram torque)

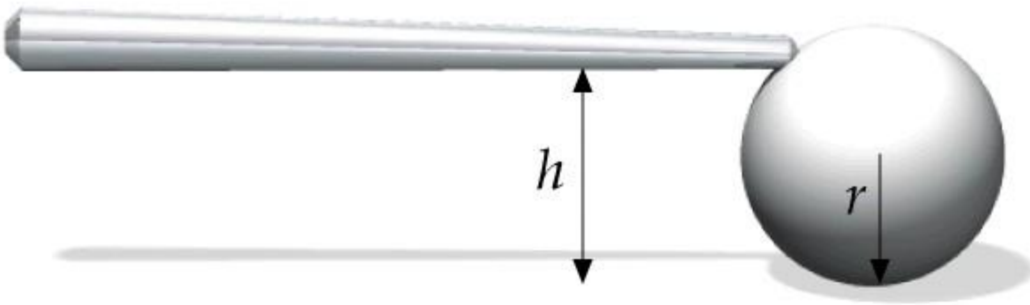
$$\begin{cases} \tau_{ext} = I\alpha = TR \\ mg - T = ma_t \end{cases}$$

Com $a_t = R\alpha$

$$\frac{mg - T}{m} = R\frac{TR}{I} \qquad T = \frac{mg}{1 + (mR^2 / I)}$$

$$a_t = \frac{mg - T}{m} \qquad a_t = \frac{g}{1 + (I / mR^2)}$$

Jogo de Sinuca



Um taco atinge uma bola de bilhar em um ponto a uma distância *d* acima do centro da bola. Determine o valor de *d* para que a bola role, sem deslizar.

Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação). (o peso e a normal na polia, não geram torque)

$$\begin{cases} \tau_{ext} = I\alpha = Fd \\ F = ma_{cm} \end{cases}$$

Com

$$a_{cm} = R\alpha$$

$$\frac{F}{m} = R\frac{Fd}{I}$$

$$d = \frac{I}{mR} = \frac{(2/5)mR^2}{mR}$$

$$d = \frac{I}{mR} = \frac{2R}{5}$$