Física I IME

2º Semestre de 2016

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

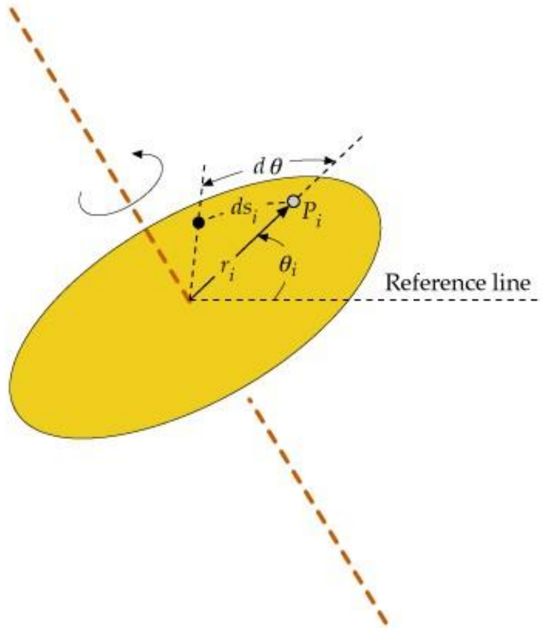
Professor: **Luiz Nagamine**
E-mail: nagamine@if.usp.br
Fone: 3091.6877

27, 29 de setembro

Cinemática Rotacional

Neste tópico, trataremos da rotação em torno de um eixo fixo no espaço, ou em torno de um eixo que se move sem alterar sua direção no espaço.

Velocidade angular e aceleração angular



Seja um corpo rígido de massa M, que gira em torno de um eixo fixo. Cada ponto deste corpo descreve um círculo, cujo raio r_i é a distância entre o ponto e o eixo de rotação.

Quando o corpo gira de um ângulo dθ, o ponto descreve um arco de comprimento dS_i

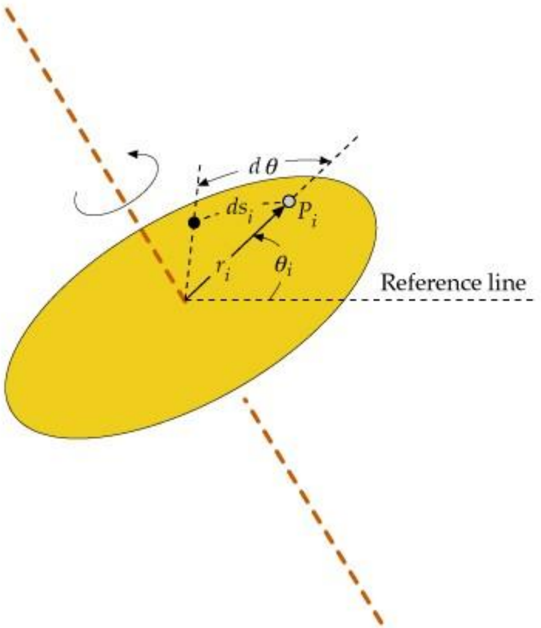
$$dS_i = r_i d\theta$$

A taxa de variação do ângulo é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de velocidade angular ω.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \omega = \frac{1}{r_i}\frac{dS_i}{dt} = \frac{v_i}{r_i}$$

Velocidade angular e aceleração angular

Analogamente, a taxa de variação da velocidade angular é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de aceleração angular α.



$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Para os valores médios temos:

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \alpha_{med} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Se α é constante:

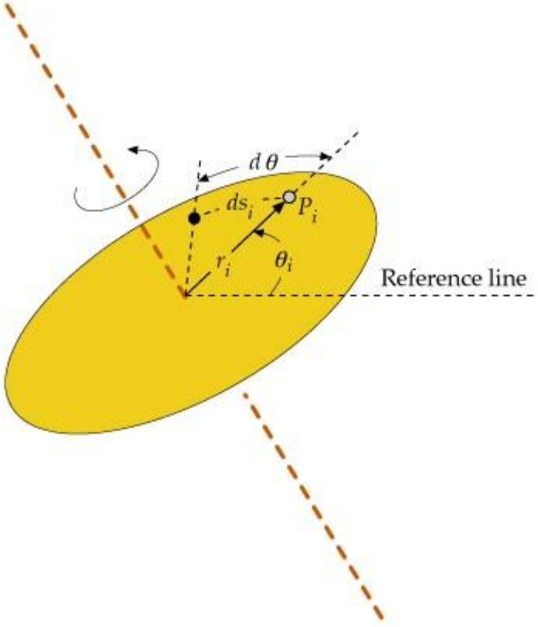
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{array} \right\} \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

Exemplo

Um CD gira, do repouso a até 500 rpm, em 5,5 s. (a) Qual a aceleração angular suposta constante? (b) Quantas voltas o disco dá em 5,5 s? (c) Qual a distância percorrida por um ponto a 6,0 cm do centro, nestes 5,5 s?

(a) $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\quad \omega = 500 rpm = 500 \cdot 2\pi / 60 = 52{,}36$

$$52{,}36 = 0 + \alpha 5{,}5 \qquad \alpha = 9{,}5 rad / s^2$$



(b) $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$\theta = 0 + 0 + \frac{1}{2} 9{,}5(5{,}5)^2 \qquad \theta = 143{,}7 rad$$

= 22,9 voltas

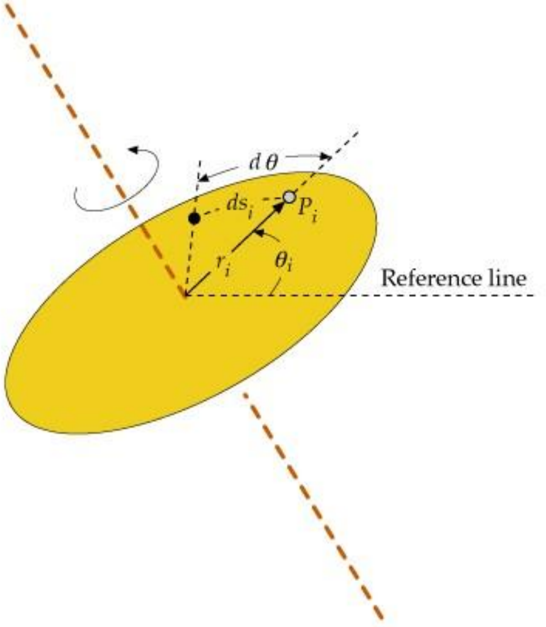
(c) $\Delta S = r \cdot \Delta\theta = 0{,}06 \cdot 143{,}7 = 8{,}62 m$

Acelerações e velocidades angulares

Já vimos que:

$$\omega = \frac{1}{r_i}\frac{dS_i}{dt} = \frac{v_i}{r_i}$$

$$v_i = \omega r_i$$



Analogamente, para a aceleração tangencial temos:

$$a_{t_i} = \alpha r_i$$

Mas, como o movimento é circular, existe uma aceleração centrípeta

$$a_c = \frac{v_i^2}{r_i} = \frac{(r_i\omega)^2}{r_i}$$

$$a_c = r_i\omega^2$$

Energia Cinética Rotacional

A energia cinética de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é a soma das energias cinéticas das partículas individuais que constituem o corpo.

Para a i^{esima} partícula, de massa m_i e velocidade v_i, temos:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Somando sobre todas as partes, obtemos a energia cinética do corpo:

$$K = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \left(m_i r_i^2 \right)$$

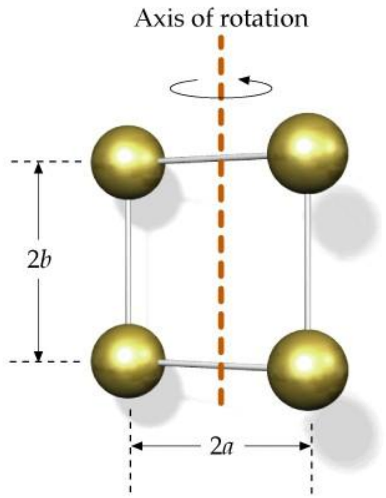
Onde, o termo à direita recebe o nome de momento de inércia (I) do corpo:

$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2 \right)$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Exemplo

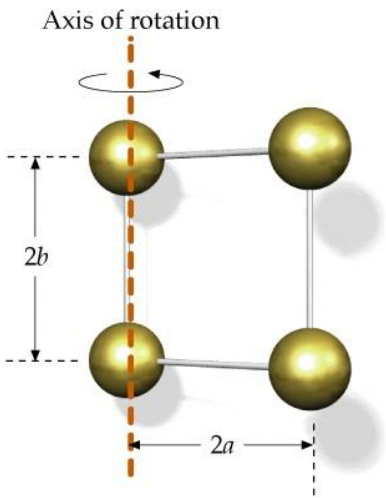
Um corpo consiste de 4 partículas pontuais, com massas m, ligadas por hastes sem massa, como na figura ao lado. O sistema gira com velocidade angular ω em torno do centro do corpo. (a) Determine o momento de inércia do corpo. (b) Determine a energia cinética do corpo.



$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2\right) \qquad I = 4ma^2$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad K = 2ma^2\omega^2$$

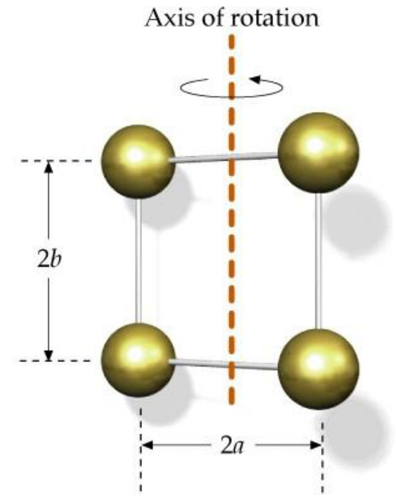
Repetir os cálculos para a nova configuração ao lado.



$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2\right) \qquad I = 2m(2a)^2 = 8ma^2$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad K = 4ma^2\omega^2$$

Cálculos do Momento de Inércia



Para sistemas discretos:

$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2 \right)$$

Corpos contínuos

Se subdividirmos o corpo em pequenas porções, no limite quando a massa de cada porção vai a zero, a somatória acima se tranforma na integral:

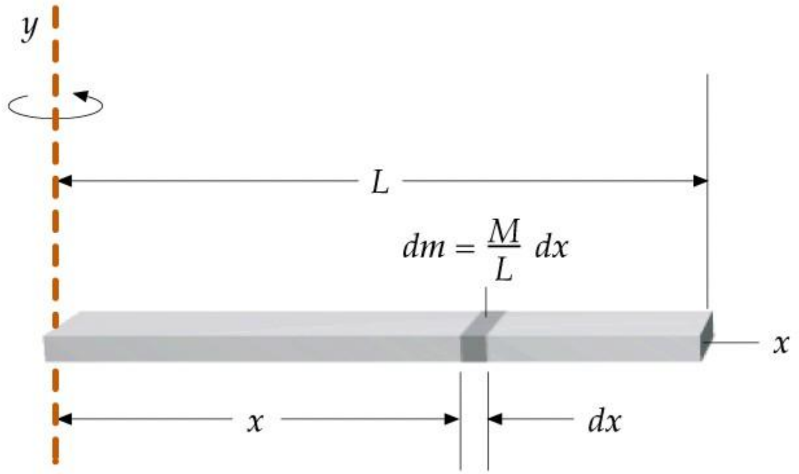
$$I = \int r^2 dm$$

Onde *r* é a distância ao eixo, de cada parcela *dm* do corpo.

Cálculos do Momento de Inércia

Calcule o momento de inércia de uma barra fina de comprimento L e massa M, em relação ao eixo que passa por sua extremidade.

$$I = \int r^2 dm$$



Um pedaço dm da barra, situado na posição x, ocupa uma extensão dx da barra.

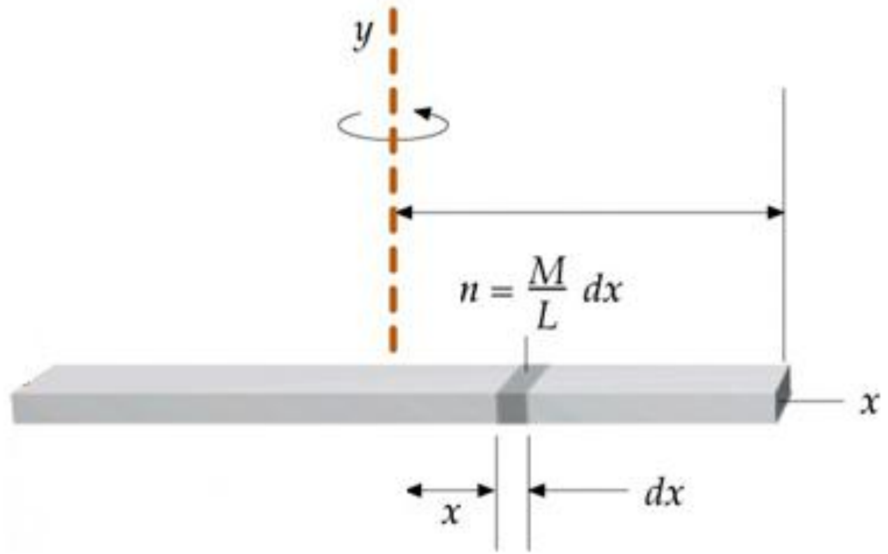
Considerando a densidade linear de massa λ.

$$\lambda = \frac{M}{L} \Rightarrow dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Repetir o cálculo para um eixo no centro da barra.



$$I = \int r^2 dm$$

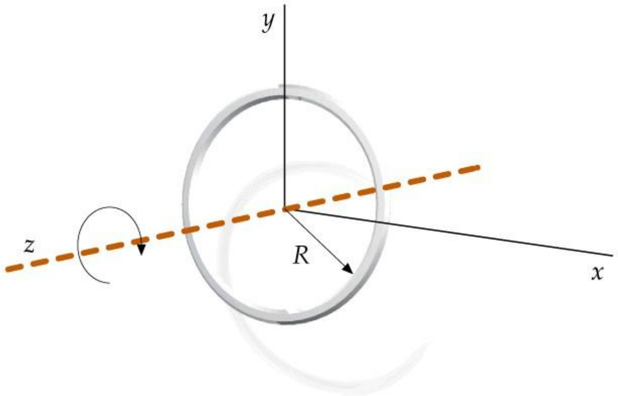
$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3}\bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L}\left(\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3}\right) = \frac{M}{L} 2\left(\frac{(L/2)^3}{3}\right) = \frac{ML^2}{12}$$

Cálculos do Momento de Inércia

Calcule o momento de inércia de um anel circular de raio R e massa M, em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.



$$I = \int r^2 dm$$

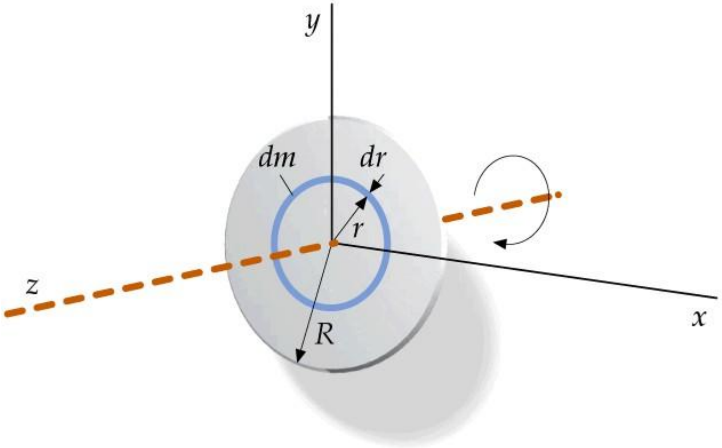
Todos os pedaços dm do anel, estão situados a uma mesma distância R do eixo.

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

Cálculos do Momento de Inércia

Calcule o momento de inércia de um disco homogêneo de raio R e massa M, em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.

$$I = \int r^2 dm$$



Podemos subdividir o disco em uma série de anéis concentricos.

Cada anel tem uma massa dm, raio r e espessura dr.

Considerando a densidade superficial de massa σ.

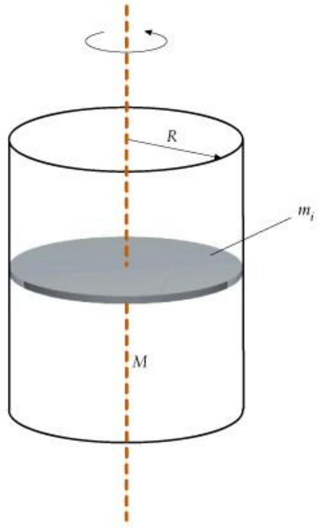
$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \Longrightarrow dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

$$I = \int_0^R r^2 \frac{M}{R^2} 2r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Cálculos do Momento de Inércia

Calcule o momento de inércia de um cilindro maciço homogêneo de raio R e massa M, em relação ao seu eixo.



$$I = \int r^2 dm$$

Podemos subdividir o cilindro em uma série de discos paralelos.

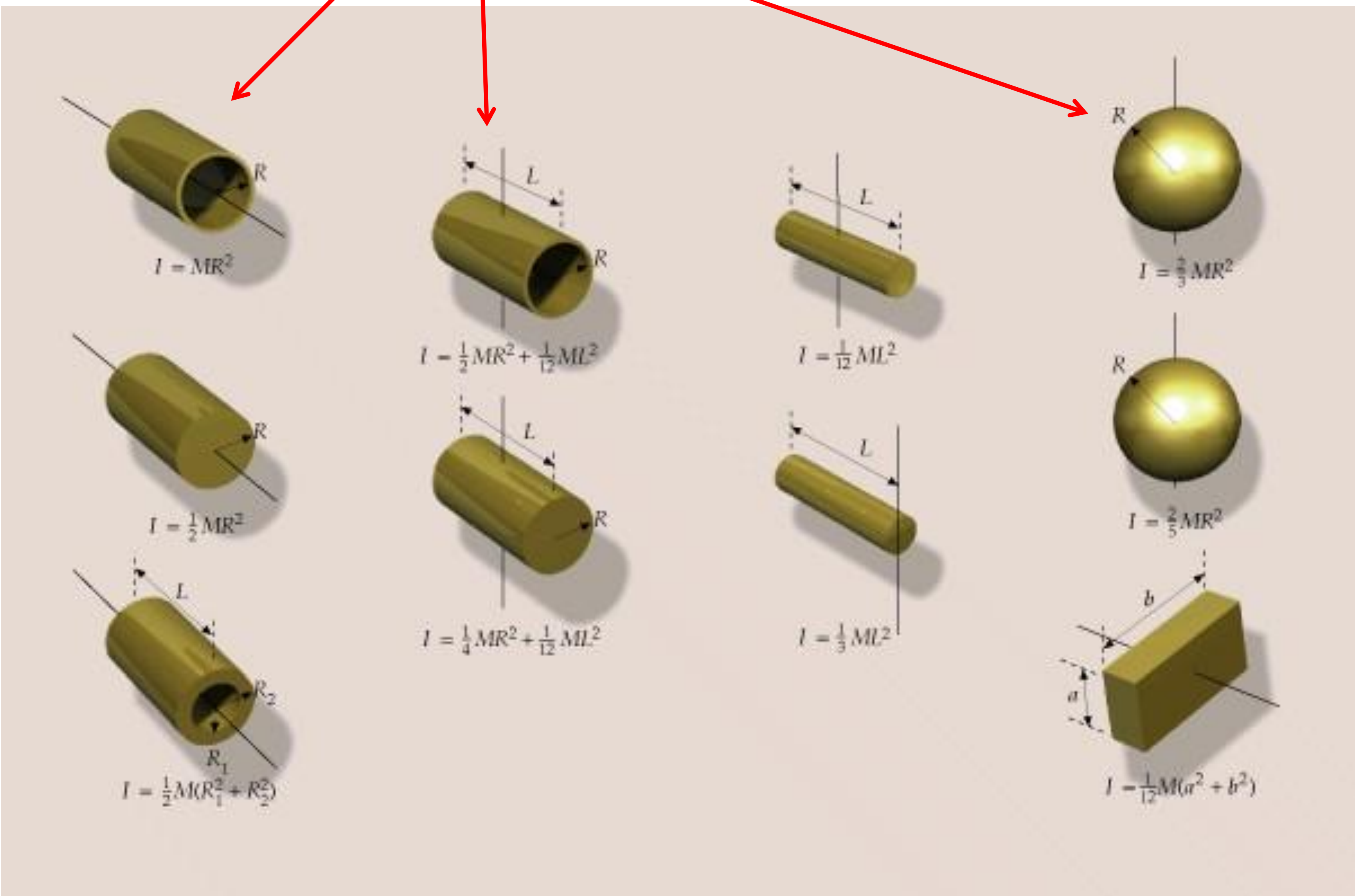
Como todos os discos são equivalentes, podemos considerar o momento de inércia do cilindro como igual ao dos discos.

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

Tabela de Momentos de Inércia

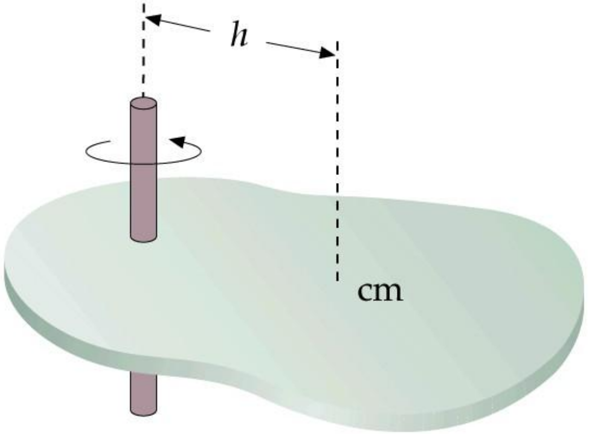
$$I = \int r^2 dm$$

cascas



Cálculos do Momento de Inércia

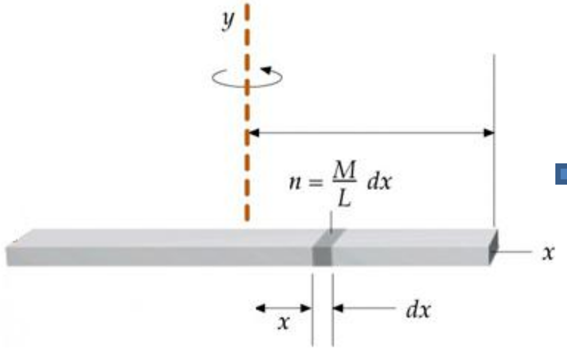
Teorema dos Eixos Paralelos



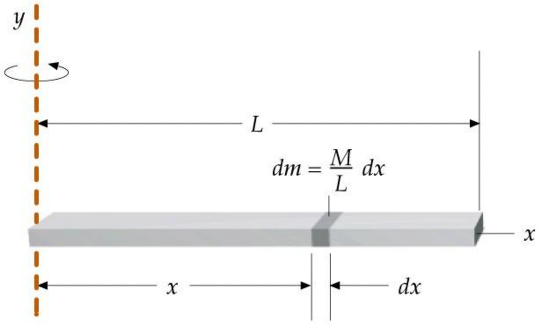
Este teorema permite que se calcule o momento de inércia de um corpo de massa M em relação a um eixo qualquer, a partir do seu valor para o centro de massa, sabendo-se a distância h entre os dois eixos.

$$I = \int r^2 dm \longrightarrow I = I_{cm} + Mh^2$$

Exemplo:



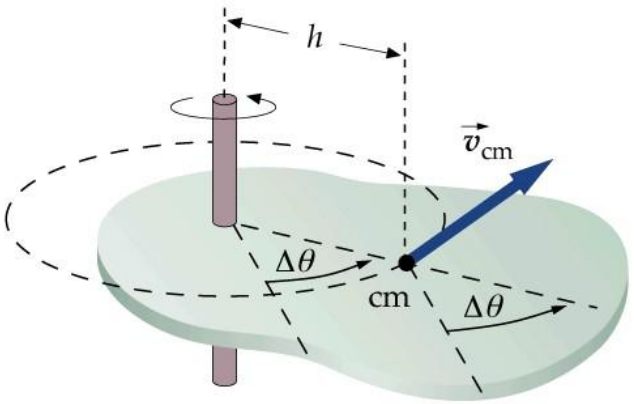
$$\longrightarrow I = I_{cm} + Mh^2$$



$$I = \frac{ML^2}{12}$$

$$I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \longrightarrow I = \frac{ML^2}{3}$$

Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelo



Vamos calcular a energia cinética de rotação para o eixo paralelo do corpo de massa M ao lado, quando girando com velocidade ω.

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Mas, já vimos que a energia cinética de um corpo pode ser escrita como a energia cinética de translação do centro de massa, mais a energia de rotação em relação ao centro de massa.

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = K_{rot_{cm}} + K_{transl_{cm}} \Longrightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega_{cm}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Mas, $v_{cm} = h\omega$

e $\omega_{cm} = \omega$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M h^2 \omega^2$$

$$I = I_{cm} + Mh^2$$