Física I-IME

2º Semestre de 2016

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: **Luiz Nagamine**
E-mail: nagamine@if.usp.br
Fone: 3091.6877

20 e 22 de outubro

Colisões Unidimensionais

Considere um sistema com dois corpos que se movem sobre uma linha reta. Como as forças de interação entre os corpos são internas, a Quantidade de Movimento do sistema se conserva.

Seja um corpo de massa m_1 com velocidade v_{1i}, que se aproxima de outro com massa m_2 e velocidade v_{2i}, com $v_{2i} < v_{1i}$. A conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Para determinar v_{1f} e v_{2f}, necessitamos outra equação.

1° caso: Colisões perfeitamente inelásticas

Neste caso, as velocidades depois da colisão serão iguais.

$$v_{1f} = v_{2f} = v_{CM} = v$$

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

$$v = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Relação entre Energia Cinética e Momento

Considere um corpo de massa m que se move com velocidade v.

A sua Quantidade de Movimento é

$$p = mv$$

Enquanto, a sua Energia Cinética é

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Se um corpo colide inelasticamente com um segundo corpo em repouso, temos :

Energia Cinética inicial: $K_i = \dfrac{P_{sis}^2}{2m_1}$, com $p_{1i} = m_1 v_{1i} = P_{sis}$

Considerando a conservação do momento, a Energia Cinética final é:

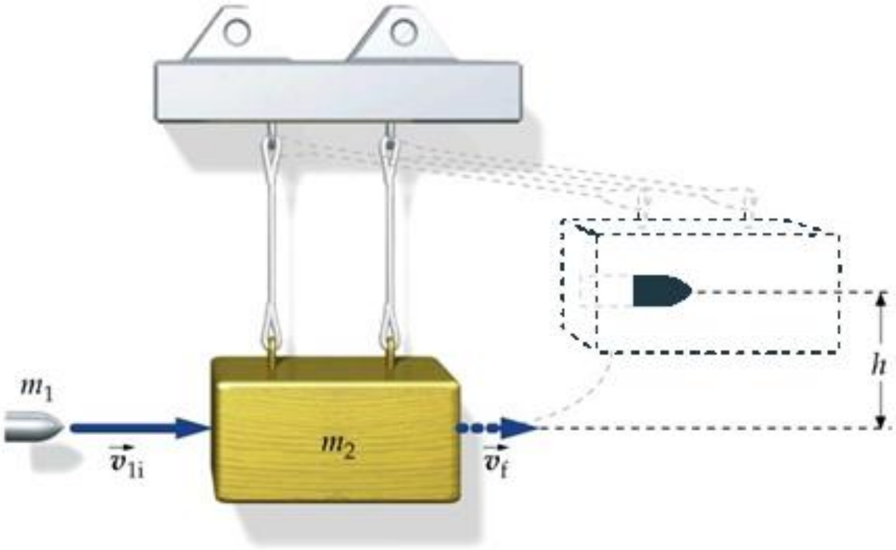
$$K_f = \frac{P_{sis}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Portanto, houve redução da Energia Cinética

Exemplo

Pêndulo Balístico

Um projétil é atirado em um bloco de madeira dependurado. O bloco com o projétil , oscila subindo. Considerando a altura máxima atingida, determine a velocidade do projétil.



Usando a conservação do momento durante a colisão, temos:

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} v_f$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Usando a conservação da Energia Mecânica após a colisão, temos:

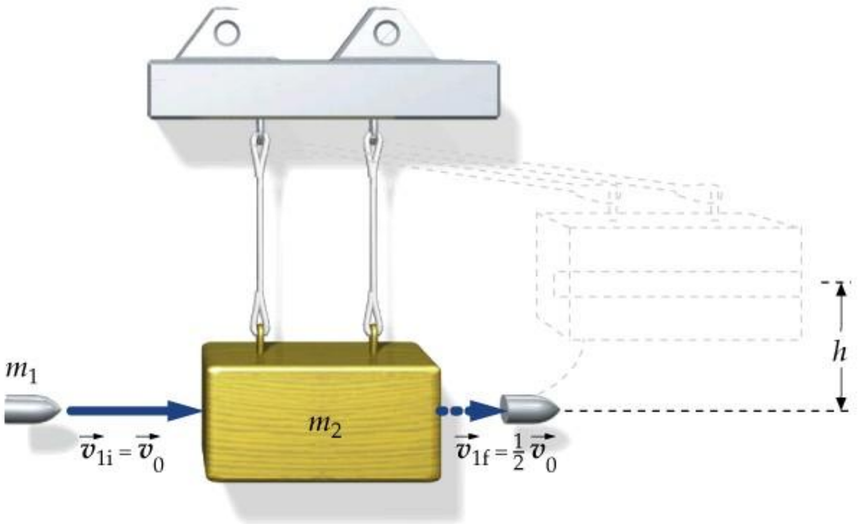
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = (m_1 + m_2) gh$$

Portanto:

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Pêndulo Balístico

Como no problema anterior, porém supondo que o projétil atravessou a madeira, perdendo metade de sua velocidade inical. Determine a altura h, alcançada pelo bloco.



Usando a conservação do momento durante a colisão, temos:

$$m_1 v_{1i} = m_2 v_2 + m_1 \frac{v_{1i}}{2}$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}\frac{v_{1i}}{2}$$

Usando a conservação da Energia Mecânica após a colisão, temos:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h$$

$$h = \frac{v_2^2}{2g}$$

Portanto:

$$h = \frac{m_1^2 v_{1i}^2}{8 m_2^2 g}$$

2° caso: Colisões Elásticas

Em colisões elásticas, além da Quantidade de Movimento, também a Energia Cinética do sistema, se conserva.

Seja um corpo de massa m_1 com velocidade v_{1i}, que se aproxima de outro com massa m_2 e velocidade v_{2i}, com $v_{2i} < v_{1i}$.

A conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Da conservação da Energia Cinética, temos:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f} \right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f} \right) \qquad \textbf{(1)}$$

$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f} \right) \left(v_{1i} + v_{1f} \right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f} \right) \left(v_{2i} + v_{2f} \right) \qquad \textbf{(2)}$$

Dividindo (2) pela (1)

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}$$

$$\boxed{v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}}$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Exemplo

Um bloco de 4,0 kg, move-se para a direita a 6,0 m/s e sofre uma colisão elástica frontal com um bloco de 2,0 kg que se move para a direita a 3,0 m/s. Encontre as velocidades finais dos blocos.

A conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(4,0)(6,0) + (2,0)(3,0) = (4,0) v_{1f} + (2,0) v_{2f}$$

E, temos também:

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$$

$$(6,0) - (3,0) = v_{2f} - v_{1f}$$

$$2v_{1f} + v_{2f} = 15 m/s$$

$$v_{2f} - v_{1f} = 3 m/s$$

$$v_{1f} = 4,0 m/s$$

$$v_{2f} = 7,0 m/s$$

Colisões Elásticas

Em colisões elásticas, além da Quantidade de Movimento, também a Energia Cinética do sistema, se conserva.

Na colisão entre dois corpos, estando 1 em repouso,

a conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

E, temos também:

$$\boxed{v_{1i} = v_{2f} - v_{1f}}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Verificar o que acontece se $m_1 = m_2$, $m_1 >> m_2$ e $m_1 << m_2$.

(A) Massas iguais (m_1=m_2)

$$v_{1f} = 0 \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i}$$

(B) Um alvo maciço: m_2>>m_1

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2} \right) v_{1i}$$

(C) Um projétil maciço: m_1>>m_2

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}$$

Colisões Bi e Tridimensionais

Deve-se trabalhar vetorialmente e a conservação da Quantidade de Movimento se aplica a cada uma das componentes (x, y e z).

Colisão inelástica

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

onde:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{cm}$$

Exemplo

Um corpo de massa m_1, com rapidez de 20 m/s colide com um segundo corpo de massa $m_2=2m_1$. O segundo corpo está inicialmente em repouso. Depois da colisão o primeiro corpo está se movendo a 15 m/s a um ângulo de 25° com a orientação da sua velocidade inicial. Qual é a orientação de afastamento do segundo corpo? Qual é a velocidade de escape do segundo corpo? A energia cinética se conservou?

$$m_1\vec{v}_{1i} = +m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

Para as componentes temos:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta_1 + m_2 v_{2f}\cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f}\, sen\,\theta_1 + m_2 v_{2f}\, sen\,\theta_2 \end{cases}$$

e $$m_2 = 2m_1$$