Notas de aula de Física Moderna II

Cinemática Relativística

Marina Nielsen
Fernando Navarra
Gabriel T. Landi

Primeiro semestre de 2010

Neste capítulo iremos sumarizar os princípios básicos, as notações e as terminologias da cinemática relativística. As informações deste capítulo serão fundamentais para o resto do curso. Apesar da forma como vamos expor o conteúdo ser bastante auto-contida, estamos assumindo que já possuam algum conhecimento de relatividade restrita.

1 Transformações de Lorentz

De acordo com a teoria da relatividade restrita, as leis da física funcionam da mesma maneira em um referencial movendo com uma certa velocidade ou em um referencial em repouso. Como uma consequência desagradável deste fato, não há como afirmarmos se um certo sistema está em repouso ou não e portanto, não é possível saber qual a velocidade absoluta de um sistema. Muito bem. Comecemos de novo.

De acordo com a teoria da relatividade restrita, as leis da física são igualmente válidas em todos os referênciais *inerciais*. Um sistema inercial é um sistema onde a primeira lei de Newton (lei da inércia) é obedecida: um objeto continuará a se mover em linha reta e com velocidade constante a não ser que uma força atue sobre ele. É fácil concluir que dois sistemas inerciais tem de estar se movendo com velocidades constantes um em relação ao outro. E também, qualquer sistema se movendo com velocidade constante com relação a um sistema inercial é também um sistema inercial.

Imagine portanto que temos dois referenciais inerciais, S e S', com S' se movendo com uma velocidade uniforme $\boldsymbol{v}$ (magnitude v) em relação a S (portanto, S está se movendo com uma velocidade $-\boldsymbol{v}$ em relação a S'). Para simplificar, podemos alinhar nossas coordenadas de tal forma que o movimento seja na direção dos eixos x/x' (figura 1) e ajustar os relógios na origem de cada sistema de tal forma que ambos leiam zero no instante em que os eixos coincidem (ou seja $t = t' = 0$ para $x = x' = 0$). Suponha agora que algum evento ocorra na posição (x, y, z) e no tempo t em S. *Pergunta:* quais as coordenadas (x', y', z') e o tempo t' deste *mesmo* evento em S'? A resposta é dada pelas transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned} &\text{i.} \quad x' = \gamma(x - vt) \\ &\text{ii.} \quad y' = y \\ &\text{iii.} \quad z' = z \\ &\text{iv.} \quad t' = \gamma(t - \tfrac{v}{c^2}x), \end{aligned} \tag{1}$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2}$$

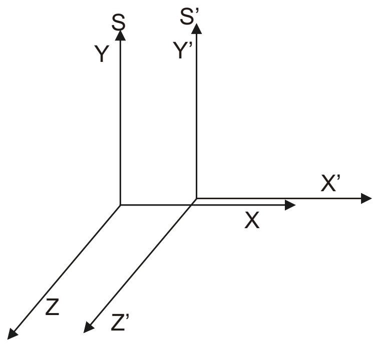

Figura 1: Sistemas inerciais S e S'.

As transformações inversas, que nos levam de S' até S, são obtidas simplesmente invertendo o sinal de v:

$$\begin{aligned} &\text{i. } x = \gamma(x' + vt') \\ &\text{ii. } y = y' \\ &\text{iii. } z = z' \\ &\text{iv. } t = \gamma(t' + \tfrac{v}{c^2}x'). \end{aligned} \tag{3}$$

As transformações de Lorentz tem uma série de consequências. Algumas delas são:

1. *A relatividade da simultaneidade:* se dois eventos ocorrem ao mesmo tempo em S, mas em lugas diferentes, então eles *não* ocorrem ao mesmo tempo em S'. Especificamente, se $t_A = t_B$, então

$$t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A). \tag{4}$$

   Assim, eventos que são simultâneos em um sistema inercial não são simultâneos em outro sistema inercial.

2. *Contração de Lorentz:* suponha que um bastão se encontre no eixo x', em repouso em S'. Suponha que uma de suas extremidades esteja na origem ($x' = 0$) e a outra em L' (assim, seu comprimento em S' é L'). Qual o comprimento medido em S? Como a barra está se movendo em relação a S, é preciso ter o cuidado de medir as posições das duas extremidades no mesmo instante, por exemplo, $t = 0$. Nesse instante, a extremidade da esquerda está em $x = 0$ e a extremidade da direita, de acordo com a Eq. (3)i, está em $x = L'/\gamma$. Assim, o comprimento

da barra é $L = L'/\gamma$, em S. Como γ é sempre maior ou igual a 1, um *objeto em movimento é encurtado* por um fator γ, se comparado com o seu comprimento no referencial de repouso. Note que a contração de Lorentz acontece apenas nos comprimentos *ao longo da direção do movimento*; dimensões perpendiculares não são afetadas.

3. *Dilatação temporal:* Suponha que o relógio na origem de S' toque em intervalos T'; por simplicidade assuma que ele vá de $t' = 0$ até $t' = T'$. Em quanto tempo esse período é medido em S? Bem, ele começa em $t' = 0$ e vai até $t' = T'$ em $x' = 0$. Portanto, de acordo com a Eq. (3)iv, $t = \gamma T'$. Ou seja, o relógio em S irá medir um intervalo $T = \gamma T'$. Em outras palavras, *relógios em movimento andam mais devagar.*

   Ao contrário da contração de Lorentz, que é apenas relevante indiretamente para a física de partículas elementares, a dilatação do tempo é fundamental no laboratório. Pois, de certa forma, todas as partículas instáveis possuem um relógio interno para avisá-las quando o seu tempo de vida está para se esgotar. Estes relógios internos de fato andam mais devagar quando as partículas estão em movimento. Em outras palavras, uma partícula vive mais tempo (por um fator γ) se estiver em movimento[1]. Os muons de raios cósmicos produzidos na atmosfera nunca chegariam à superfície da terra se não fosse pela dilatação temporal.

4. *Adição de velocidades:* suponha que uma partícula está se movendo na direção x/x' com velocidade u' com respeito a S'. Qual é sua velocidade u com respeito a S? Ela irá percorrer uma distância $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$ em um intervalo de tempo $\Delta t = \gamma[\Delta t' + (v/c^2)\Delta x']$ e portanto:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + (v/c^2)\Delta x'} = \frac{(\Delta x'/\Delta t') + v}{1 + (v/c^2)(\Delta x'/\Delta t')}.$$

   Mas $\Delta x/\Delta t = u$ e $\Delta x'/\Delta t = u'$ e portanto

$$u = \frac{u' + v}{1 + (u'v/c^2)}. \tag{5}$$

   Note que caso $u' = c$ então $u = c$. *A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.*

Pode ser confuso em algumas situações particulares discernir quais valores devem ser utilizados e quais os sinais das velocidades. Portanto, existem algumas regras básicas para ajuda-lo:

[1] Na verdade, a desintegração de uma partícula individual é um processo aleatório. Quando falamos em tempo de vida, estamos querendo dizer na verdade um tempo de vida *médio*. Quando dizemos que uma partícula vive mais tempo, na verdade queremos dizer que o tempo *médio* de vida de um *grupo* de partículas é maior.

- Bastões em movimento são pequenos (por um fator γ);
- Relógios em movimento são mais lentos (por um fator γ)

Conclusão: coloque γ (que é sempre maior do que 1) no lado da equação necessário para chegar nesse resultado.

Finalmente:

$$u_{AC} = \frac{u_{AB} + u_{BC}}{1 + (u_{AB} u_{BC}/c^2)}, \tag{6}$$

onde u_{AB} (por exemplo), significa a velocidade de A com relação a B. O numerador corresponde ao resultado clássico, a chamada adição Galileliana de velocidades. O denominador é a correção de Einstein – é muito próximo de 1 a não ser que a velocidade seja próxima de c.

2 Quadri-vetores

É conveniente, neste ponto, introduzirmos algumas notações para simplificar os cálculos. Definimos o *quadri-vetor posição-tempo* x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, da seguinte forma:

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z. \tag{7}$$

Em termos de x^μ, as transformações de Lorentz podem ser escritas de forma mais simétrica:

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3, \end{aligned} \tag{8}$$

onde

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{9}$$

Numa forma mais compacta:

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3), \tag{10}$$

onde os coeficientes Λ^μ_ν são os elementos da matriz $\mathbf{\Lambda}$:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Ou seja, $\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = \gamma$, $\Lambda^1_0 = \Lambda^0_1 = -\gamma\beta$, $\Lambda^2_2 = \Lambda^3_3 = 1$ e todos os outros termos são nulos. Uma outra convenção que também iremos adotar é a "regra da somatória" de Einstein criada para evitar o uso excessivo de Σ's. Esta regra dita que letras gregas repetidas (uma sobrescrita e outra subscrita) devem ser somadas de 0 a 3.Assim, a Eq. (10) se torna:[2]

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{13}$$

Uma vantagem desta notação compacta é que ela também é capaz de descrever transformações de Lorentz que não estejam ao longo da direção x. De fato, os sistemas S e S' não precisam nem ser paralelos. Obviamente, a matriz $\mathbf{\Lambda}$ seria mais complicada mas a Eq. (13) permanece verdadeira. (Por outro lado, não há nenhuma perda de generalidade em se usar a Eq. (11), uma vez que sempre podemos escolher eixos paralelos e alinhar x ao longo da direção de $\boldsymbol{v}$).

Apesar das coordenadas individuais de um certo evento mudarem quando passados de S para S', de acordo com a Eq. (13), uma *combinação* específica delas se mantêm inalterada durante a transformação:

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2 \tag{14}$$

Esta grandeza tem o mesmo valor em qualquer referencial inercial e é chamada de um *invariante* (no mesmo sentido que a grandeza $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ é um invariante sob rotações). Neste momento, seria de interesse escrever este invariante na forma de uma somatória: $\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x^\mu$ mas, infelizmente, ainda sobramos com aqueles três sinais de menos. Para não perdê-los de vista nós introduzimos a *métrica* $g_{\mu\nu}$, cujas componentes correspondem aos elementos da matriz $\boldsymbol{g}$:

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Com o auxílio da métrica $g_{\mu\nu}$, o invariante pode ser escrito como uma dupla somatória

$$I = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \tag{16}$$

[2]Neste tipo de expressão, a letra grega ν usada como índice da somatória é completamente arbitrária. O mesmo vale para a letra μ que, no entanto, tem que ser o mesmo dos dois lados da equação. Assim, a Eq. (13) pode ser escrita como $x^{\kappa'} = \Lambda^\kappa_\lambda x^\lambda$. Ambas as expressões representam o conjunto de quatro equações:

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3 \\ x^{1'} &= \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 + \Lambda^1_2 x^2 + \Lambda^1_3 x^3 \\ x^{2'} &= \Lambda^2_0 x^0 + \Lambda^2_1 x^1 + \Lambda^2_2 x^2 + \Lambda^2_3 x^3 \\ x^{3'} &= \Lambda^3_0 x^0 + \Lambda^3_1 x^1 + \Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3 \end{aligned} \tag{12}$$

Prosseguindo, definimos o quadri-vetor *covariante* x_μ (índice embaixo) como sendo

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu. \tag{17}$$

Para enfatizar a distinção entre os dois, chamamos o quadri-vetor original x^μ de *contravariante*. Com isso, o invariante I pode ser escrito de forma sucinta:

$$I = x_\mu x^\mu \tag{18}$$

(ou também $x^\mu x_\mu$). Sem dúvida, todo este trabalho para simplesmente não perder de vista três sinais negativos parece um exagero. Mas na verdade, tudo isso é bastante simples uma vez que você se acostuma com a notação. (Além disso, com esta notação é possível generalizar para sistemas de coordenadas não-cartesianas e espaços curvados, observados na relatividade geral; no entanto nada disso fará parte deste curso.)

O quadri-vetor posição é um protótipo para todos os quadri-vetores. Nós definimos um quadri-vetor a^μ como um objeto com quatro componentes que se transforma da mesma maneira que x^μ quando vai de um sistema inercial para outro:

$$a^{\mu'} = \Lambda^\mu_\nu a^\nu, \tag{19}$$

com os mesmo coeficientes Λ^μ_ν. Para cada vetor contravariante a^μ, associamos um vetor covariante a_μ obtido apenas trocando os sinais das componentes espaciais:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \tag{20}$$

É obvio que podemos voltar para a notação contravariante apenas invertendo o sinal novamente:

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \tag{21}$$

onde $g^{\mu\nu}$ correspondem, na verdade, aos elementos da matriz inversa $\boldsymbol{g}^{-1}$. No entanto, como nossa métrica é a própria inversa, $\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{g}$, então os elementos de $g^{\mu\nu}$ correspondem aos mesmo elementos de $g_{\mu\nu}$.

Dados dois quadri-vetores quaisquer, a^μ e b^μ, a grandeza

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3, \tag{22}$$

é invariante (igual em qualquer sistema de coordenadas). Definimos esta operação como o *produto escalar* de a com b; é o análogo quadri-dimensional ao produto escalar de vetores bi e tri-dimensionais (não há um análogo para o produto vetorial[3]). Se por ventura você se cansar de usar índices, use a notação usual do produto escalar

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu \tag{23}$$

[3]O mais próximo é $(a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu)$ mas isso é um tensor de segundo grau e não um quadri-vetor.

No entanto, é necessário tomar cuidado ao distinguir este produto escalar quadri-dimensional do produto escalar usual. A melhor maneira é tomar o cuidado de colocar uma flecha sobre vetores tri-dimensionais (ou negrito). Assim:

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}. \tag{24}$$

Nós também usamos a notação a^2 para indicar o produto escalar de a^μ com ele mesmo:

$$a^2 = a \cdot a = (a^0)^2 - \boldsymbol{a}^2 \tag{25}$$

Note, no entanto, que a^2 não precisa ser positivo. De fato, nós classificamos todos os quadri-vetores de acordo com o sinal de a^2:

$$\begin{array}{ll} \text{Se } a^2 > 0 & a^\mu \text{ é um quadri-vetor tipo tempo} \\ \text{Se } a^2 < 0 & a^\mu \text{ é um quadri-vetor tipo espaço} \\ \text{Se } a^2 = 0 & a^\mu \text{ é um quadri-vetor tipo luz} \end{array} \tag{26}$$

Partindo dos quadri-vetores, é fácil definir *tensores*. Um tensor de segundo grau $s^{\mu\nu}$ possui dois índices, tem $4^2 = 16$ componentes e se transforma utilizando dois fatores Λ:

$$s^{\mu\nu'} = \Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\Lambda s^{\kappa\lambda}. \tag{27}$$

Um tensor de terceiro grau $t^{\mu\nu\sigma}$ tem três índices, $4^3 = 64$ componentes e se transforma utilizando três fatores Λ:

$$t^{\mu\nu\sigma'} = \Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\lambda \Lambda^\sigma_\alpha t^{\kappa\lambda\alpha}, \tag{28}$$

e assim por diante. Nesta hierarquia, um vetor é um tensor de primeiro grau e o um escalar é um tensor de grau zero.

3 Energia e Momento

Suponha que você esteja dirigindo em uma estrada e esteja próximo da velocidade da luz. Existem dois "tempos"que você precisa prestar atenção: se você está preocupado em chegar logo a um compromisso, então deve ficar atento aos relógios dispostos eventualmente na estrada. Mas, se você está se perguntando quando será a hora certa de parar para comer, então faz mais sentido acompanhar o relógio do seu pulso. Isso se deve ao fato de que, de acordo com a relatividade, o relógio em movimento (neste caso o relógio do seu pulso) anda mais devagar que os relógios da estrada e portanto, seu batimento cardíaco, seu metabolismo, sua fala, seus pensamentos, e tudo mais, também estarão mais lentos. Quando o relógio da estrada avança um tempo dt, o seu relógio avança um tempo menor $d\tau$:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{29}$$

Em velocidades usuais de um automóvel é claro que γ é tão próximo de 1 que dt e $d\tau$ são essencialmente idênticos. Mas, em física de partículas elementares, a distinção entre o tempo do laboratório (relógio na parede do laboratório) e o tempo da partícula (relógio no pulso da partícula) é crucial. Apesar de podermos sempre ir de um para o outro através da Eq. (29), na prática é normalmente mais conveniente trabalhar com o tempo próprio pois τ *é um invariante – todos* os observadores podem ler o relógio da partícula e, em todos os instantes eles devem concordar no que este relógio diz; mesmo que seus relógios pessoais estejam mostrando tempos diferentes.

Quando nos referimos a "velocidade" de uma partícula (com respeito ao laboratório), nós queremos dizer é claro, a distância que a partícula viaja (no referencial do laboratório) dividida pelo tempo que ela leva (também medido no laboratório):

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \tag{30}$$

Mas, tendo em mente o que acabou de ser dito, é interessante introduzir a *velocidade própria, η,* que corresponde a distancia percorrida (novamente medida no referencial do laboratório) dividida pelo tempo *próprio*[4]:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} \tag{31}$$

De acordo com a Eq. (29), as duas velocidades estão relacionadas então por um fator γ:

$$\boldsymbol{\eta} = \gamma\boldsymbol{v} \tag{32}$$

Note que η é muito mais fácil de se trabalhar pois, caso queira-se ir do sistema do laboratório, S, para o sistema em movimento, S', *ambos o numerador e o denominador na Eq. (30) tem de ser transformados* levando à regra de adição de velocidades da Eq. (5), que não é nem um pouco agradável. Por outro lado, na Eq. (31), *apenas o numerador se transforma*; $d\tau$ como vimos, é invariante. De fato, a velocidade própria faz parte de um quadri-vetor:

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{33}$$

cujo componente de ordem zero é

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{1/\gamma dt} = \gamma c \tag{34}$$

[4]A velocidade própria é uma grandeza híbrida no sentido de que a distância é medida no referencial do laboratório ao passo que o tempo é medido no referencial da partícula. Algumas pessoas não concordam com o adjetivo "próprio" neste contexto afirmando que este deve ser reservado para quantidades medidas inteiramente no referencial da partícula. É claro que, em seu próprio referencial a partícula não se move, sua velocidade é nula! Se esta terminologia não lhe agrada, chame η de "quadri-velocidade". Devemos mencionar também que apesar da velocidade própria ser a quantidade mais conveniente para realizar os cálculos, a velocidade usual continua sendo uma quantidade mais *natural* no ponto de vista de um observador vendo a partícula se mover.

Assim,

$$\eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) \tag{35}$$

Consequentemente, $\eta_\mu \eta^\mu$ deverá ser invariante e de fato é:

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2 \tag{36}$$

É impossível ser mais invariante do que isso!

Classicamente, o momento é a massa vezes a velocidade. Seria interessante levarmos esta definição para a relatividade. No entanto surge uma pergunta: qual velocidade devemos usar – a velocidade *ordinaria* ou a velocidade *própria*? Considerações clássicas não fornecem nenhuma dica, pois ambas as velocidades coincidem no regime não relativístico. De certa forma é apenas uma questão de definição mas no entanto, existe uma razão sutil e tentadora de porque a velocidade ordinária seria uma escolha *ruim* e a velocidade própria uma escolha *boa*. O argumento é: se definimos o momento como sendo $m\boldsymbol{v}$, então a lei de conservação do momento seria inconsistente com o princípio da relatividade (se ele valesse em um sistema inercial, *não* valeria em outro). Mas, se definirmos o momento como $m\boldsymbol{\eta}$, então a conservação do momento será consistente com o princípio da relatividade (se ela valer em um referencial inercial, automaticamente irá valer em todos os outros). A prova deste fato sera deixada como exercício. Mas cuidado, isso não garante que o momento se conserva; são necessários experimentos para confirmar isso. O que estou dizendo é que, se temos a intenção de definir momento em relatividade, então sem dúvida, $m\boldsymbol{\eta}$ é uma escolha melhor que $m\boldsymbol{v}$.

Este argumento é bastante capcioso. Se você não acompanhou, tente ler novamente o último parágrafo. Mas bem, a conclusão é que em relatividade nós definimos o momento como a massa vezes a velocidade *própria*:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\eta} \tag{37}$$

Como a velocidade própria faz parte de um quadri-vetor, o mesmo vale então para o momento:

$$p^\mu = m\eta^\mu \tag{38}$$

A componente espacial de p^μ corresponde ao vetor momento relativístico:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{39}$$

A componente temporal é:

$$p^0 = \gamma mc \tag{40}$$

Por razões que ficarão claras em instantes, definimos a energia relativística, E, como:

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{41}$$

Assim, a componente de ordem zero de p^μ é E/c. Assim, a energia e o momento juntos compõem um quadri-vetor – *o quadri-vetor energia-momento (ou quadri-momento)*:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \tag{42}$$

Consequentemente, das Eqs. (36) e (38) temos que:

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2 \tag{43}$$

que novamente é um invariante.

O momento relativístico (Eq. (37)) se reduz a expressão clássica no regime não relativístico ($v \ll c$) mas o mesmo não pode ser dito da energia relativística (Eq. (41)). Para vermos porque essa quantidade pode ser chamada de energia, expandimos o radical em série de Taylor:

$$E = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^4} + \dots \tag{44}$$

Note que o segundo termo corresponde ao termo clássico da energia cinética ao passo que o primeiro (mc^2) é uma constante. Você deve se lembrar que em mecânica clássica apenas *mudanças* na energia são fisicamente relevantes. Neste sentido, a fórmula relativística é consistente com a energia clássica no limite $v \ll c$ onde os termos de ordem superior da expansão são desprezados. O termo constante que sobrevive quando $v = 0$ é chamado de *energia de repouso*:

$$R = mc^2 \tag{45}$$

O restante, que corresponde a energia do movimento da partícula é a *energia cinética relativística*:

$$T = mc^2(\gamma - 1) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^4} + \dots \tag{46}$$

Na mecânica clássica não existem partículas sem massa: seu momento ($m\boldsymbol{v}$) seria nulo, sua energia cinética ($\frac{1}{2}mv^2$) seria nula, ela não conseguiria sofrer nenhuma força uma vez que $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ e portanto (pela terceira lei de Newton) ela não poderia exercer força em nada – esta partícula seria um fantasma da dinâmica. A primeira vista, você poderia supor que o mesmo aconteceria na relatividade, mas uma inspeção mais cuidadosa das fórmulas

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{47}$$

revelam uma anomalia: quando $m = 0$ os numeradores são zero. Mas, se $v = c$, os denominadores também se anulam e ambas as equações ficam indeterminadas (0/0). Portanto, *é permitido haver uma partícula com* $m = 0$

contanto ela sempre viaje na velocidade da luz. Neste caso, as Eqs. (47) não servem para definir E e $\boldsymbol{p}$ mas a Eq. (43) continua valendo:

$$v = c, \quad E = |\boldsymbol{p}|c \quad \text{(para particulas sem massa)} \tag{48}$$

Pessoalmente, poderíamos levar este argumento como uma piada se não fosse o fato de que particulas sem massa (fótons) existem na natureza, viajam na velocidade da luz e tem seus momentos e energias relacionados pela Eq. (48). Dessa forma, temos que levar esta anomalia a sério. Podemos perguntar: se a Eq. (47) não define $\boldsymbol{p}$ e E, então *o que* define o momento e a energia de uma partícula sem massa. Não é a massa (que é sempre zero), não é a velocidade (que é sempre c). Como então, que um fóton de energia 2 eV difere de um fóton de energia 3 eV? A relatividade não oferece uma resposta a essa pergunta mas, curiosamente, a mecânica quântica oferece, através da equação de Plank:

$$E = h\nu \tag{49}$$

É a frequência do elétron que determina sua energia e momento: o fóton de 2 eV é vermelho ao passo que o de 3 eV é roxo!

4 Colisões

A razão pela qual introduzimos os conceitos de energia e momento se deve ao fato de que estas grandezas são conservadas durante qualquer processo físico. Em relatividade, assim como na mecânica clássica, a melhor aplicação destas leis de conservação são as *colisões*. Primeiramente, imagine uma colisão clássica entre dois objetos A e B (por exemplo, dois carrinhos numa mesa), produzindo objetos C e D (vide figura 2). Sem dúvida que os objetos C e D possam ser os mesmos que A e B. Mas podemos, sem nenhum problema, permitir que um pouco de tinta (ou qualquer coisa) saia do corpo A para o corpo B de tal forma que as massas finais não sejam as mesmas que as iniciais. (Nós assumimos no entanto que A, B, C e D são os únicos atores neste palco; se algum lixo W ficasse no local da colisão, então estaríamos discutindo um processo mais complicado: $A + B \longrightarrow C + D + W$.) Pela sua natureza, uma colisão é um processo que ocorre tão rápido que nenhuma força *externa*, como a gravidade ou o atrito, tenham uma influência considerável. Classicamente, massa e momento sempre se conservam nestes processos; a energia cinética pode ou não ser conservada.

Colisões clássicas

1. Massa é conservada: $m_A + m_B = m_C + m_D$
2. Momento é conservado: $\boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B = \boldsymbol{p}_C + \boldsymbol{p}_D$
3. Energia cinética pode, ou não, ser conservada.

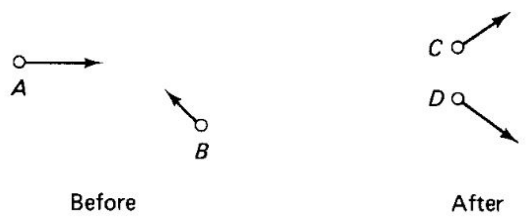

Figura 2: Uma colisão onde $A + B \longrightarrow C + D$.

De fato, podemos dividir as colisões em três tipos: as "grudentas" , onde a energia cinética *diminui* (normalmente é convertida em calor); as "explosivas" onde a energia *aumenta* (por exemplo, suponha que A tenha dentro de si uma mola comprimida que é solta durante o exato processo da colisão de tal forma que energia potencial da mola seja convertida em energia cinética); e as colisões *elásticas* onde a energia cinética é conservada.

Tipos de colisões (clássicas)

(a) *Grudentas*: Energia cinética diminui, $T_A + T_B > T_C + T_D$.

(b) *Explosivas*: Energia cinética aumenta, $T_A + T_B < T_C + T_D$

(c) *Elásticas*: Energia cinética é conservada, $T_A + T_B = T_C + T_D$

O caso extremo do item (a) é quando as duas partículas grudam uma na outra de tal forma que o objeto final seja único: $A + B \longrightarrow C$. O caso extremo do item (b) corresponde a situação onde um objeto se quebra em dois $A \longrightarrow C + D$ (na linguagem de física de partículas dizemos que A *decaiu* em $C + D$).

Em uma colisão relativística, *energia e momento sempre se conservam.* Em outras palavras, todas as quatro componentes do quadri-vetor momento-energia se conservam. Assim como no caso clássico, a energia cinética pode ou não ser conservada.

Colisões relativísticas

(1) Energia se conserva: $E_A + E_B = E_C + E_D$

(2) Momento se conserva: $\boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B = \boldsymbol{p}_C + \boldsymbol{p}_D$

$$(1) + (2) \Longrightarrow p^\mu_A + p^\mu_B = p^\mu_C + p^\mu_D$$

(3) Energia cinética pode ou não se conservar.

Podemos novamente classificar as colisões como grudentas, explosivas ou elásticas nos casos onde a energia cinética diminui, aumenta ou permanece a mesma, respectivamente. Como a energia *total* (cinética + energia de repouso) é *sempre* conservada, segue então que a energia de repouso (e portanto a massa) aumenta em uma colisão grudenta, diminui em uma colisão explosiva e permanece inalterada em uma colisão elástica.

Tipos de colisões (relativísticas)

(1) *Grudentas*: Energia cinética diminui, energia de repouso e massa aumentam

(2) *Explosivas*: Energia cinética aumenta, energia de repouso e massa diminuem

(3) *Elásticas*: Energia cinética, energia de repouso e massa são conservadas

Note portanto que *exceto em colisões elásticas, a massa não se conserva.* Em outras palavras, se a massa se conserva, a colisão é elástica. Em uma colisão explosiva (ou o decaimento de uma partícula), a energia de repouso é convertida em energia cinética (ou, na linguagem absurda da mídia popular, enfurecedora para qualquer pessoa que tenha o mínimo de respeito pela consistência dimensional, "massa é transformada em energia").

Apesar dos paralelismos aqui traçados entre a abordagem clássica e a relativística, existe uma diferença fundamental na interpretação de colisões inelásticas. No caso clássico costumamos dizer que a energia cinética é convertida em alguma forma de energia "interna" (calor, energia da mola, etc.), ou vice-versa. Na análise relativística dizemos que a conversão é de energia cinética para energia de repouso e vice-versa. Como isso pode ser consistente? Afinal, a mecânica relativística deveria se reduzir a mecânica clássica no limite $v \ll c$. A resposta é que totas as formas de energias "internas" estão refletidas na energia de repouso. Uma batata quente é *mais pesada* que uma batata fria; uma mola comprimida *pesa mais* que uma mola relaxada. Na escala macroscópica, a energia de repouso é infinitamente maior que as energias internas de tal forma que estas diferenças de massa são completamente desprezíveis no cotidiano, e também consideravelmente pequenas mesmo na escala atômica. É apenas quando tratamos da física nuclear ou de partículas que energias internas típicas se tornam comparáveis às energias de repouso. No entanto, em princípio, sempre que pesar um objeto, você não está medindo apenas a massa de suas partes constituintes mas também as energias de suas interações.

5 Exemplos e aplicações

Resolver problemas em cinemática relativística é tanto arte quanto é ciência. Apesar da *física* envolvida ser mínima – nada mais do que a conservação

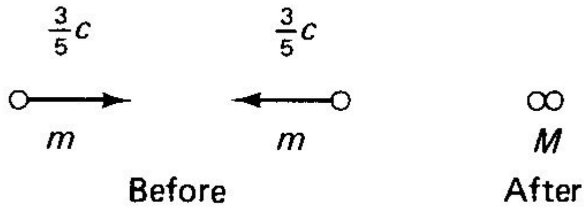

Figura 3: Colisão grudenta entre duas massas iguais.

da energia e a conservação do momento – a *álgebra* é formidável. Se um problema demora duas linhas ou sete páginas para ser resolvido, depende apenas da técnica e da experiência da pessoa em manipular as ferramentas e os truques disponíveis. Portanto, propomos agora resolver alguns exemplos destacando ao longo do caminho algumas técnicas disponíveis para economizar trabalho braçal.

Exemplo 1

Dois pedaços de argila, cado um com massa m, colidem frontalmente com velocidades $\frac{3}{5}c$ (figura 3). Eles grudam um no outro. Pergunta: qual a massa M do pedaço final de argila?

Solução: A conservação da energia diz que $E_1+E_2 = E_M$. A conservação do momento diz que $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_M$. Neste caso a conservação do momento é trivial pois $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ e portanto, o pedaço final de argila fica parado. As energias iniciais são iguais o que implica que:

$$Mc^2 = 2E_m = 2\frac{mc^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{4}(2mc^2)$$

Conclusão: $M = \frac{5}{2}m$. Note que essa massa é *maior* que a soma das massas iniciais. Em uma colisão grudenta, a energia cinética é convertida em energia de repouso e portanto a massa aumenta.

Exemplo 2

Uma partícula de massa M, inicialmente em repouso, decai em duas partes, cada qual com massa m (figura 4). Pergunta: qual a velocidade de cada uma das partes após o decaimento?

Solução: Este é, obviamente, o processo inverso do exemplo anterior. A conservação do momento diz apenas que ambos os pedaços voarão em direções opostas com a mesma velocidade. A conservação da energia requer que

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \text{portanto} \quad v = c\sqrt{1-(2m/M)^2}$$

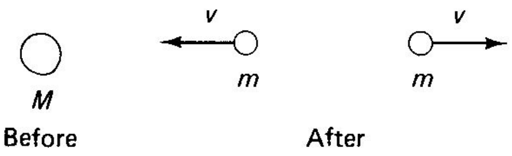

Figura 4: Uma partícula decai em duas de mesma massa.

Note que essa resposta não faz nenhum sentido a não ser que M seja maior que $2m$; é necessário que haja energia de repouso suficiente para compensar as energias de repouso do estado final (fornecer mais energia do que isso não é um problema pois ela será convertida em energia cinética). Dizemos então que $M = 2m$ é um *limiar* para que o processo $M \to 2m$ ocorra. O deutério, por exemplo, está abaixo do limiar necessário para decair em um próton e um nêutron ($m_d = 1875,6\text{MeV}/c^2$, $m_p + m_d = 1877,9\text{MeV}/c^2$), e portanto ele é estável. Um deutério pode ser dividido, mas apenas se injetarmos energia suficiente no sistema para compensar essa diferença. (Caso você fique confuso com a afirmação de que o estado ligado de um próton e um nêutron seja mais *leve* que a soma das partes, o ponto é que a energia de ligação do deutério que, como todos os tipos de energias internas, está refletida na energia de repouso, é *negativa*. De fato, para *qualquer* estado ligado, a energia de ligação tem sempre que ser negativa; sempre que a partícula composta pesar mais do que a soma de seus constituintes, ela irá automaticamente se desintegrar.)

Exemplo 3

Um píon em repouso decai em um muon e um neutrino (figura 5). Pergunta: qual a velocidade do muon?

Solução: A conservação da energia requer que $E_\pi = E_\mu + E_\nu$. A conservação do momento diz que $\boldsymbol{p}_\pi = \boldsymbol{p}_\mu + \boldsymbol{p}_\nu$; mas $p_\pi = 0$ e portanto $\boldsymbol{p}_\mu = -\boldsymbol{p}_\nu$. Ou seja, o muon e o neutrino saem voando em direções opostas com momentos iguais e opostos.

Para proceder, precisamos da equação que relaciona a energia da partícula com o seu momento. A equação 43 é o que precisamos. [Você poderia estar inclinado a resolver a equação 39 para a velocidade e incluir o resultado na equação 41. Mas esta não seria uma boa estratégia. Normalmente, em relatividade, a velocidade é um péssimo parâmetro para se trabalhar. É mais eficiente usar a equação 43 que relaciona diretamente E e $\boldsymbol{p}$.]

Dica 1: Para obter a energia da partícula sabendo o momento (ou vice-versa) use o invariante:

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \tag{50}$$

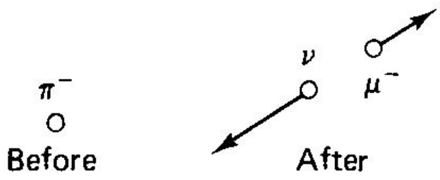

Figura 5: Decaimento de um píon carregado.

Assim, neste caso,

$$E_\pi = m_\pi c^2$$
$$E_\mu = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2}$$
$$E_\nu = |\boldsymbol{p}_\nu| c = |\boldsymbol{p}_\mu| c$$

Colocando estes valores na equação da conservação da energia, temos que:

$$m_\pi c^2 = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2} + |\boldsymbol{p}_\mu| c$$

Ou também:

$$(m_\pi c - |\boldsymbol{p}_\mu|)^2 = m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2$$

Resolvendo para $|\boldsymbol{p}_\mu|$ chegamos a:

$$|\boldsymbol{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

Usando este resultado na equação 50 obtemos a energia do muon:

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

Uma vez achada a energia e o momento da partícula, é trivial encontrar sua velocidade. Temos que $E = \gamma mc^2$ e $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$. Para cancelar o fator γ (que depende da velocidade), dividimos uma pela outra chegamos e concluímos que:

$$\boldsymbol{p}/E = \boldsymbol{v}/c^2$$

Dica 2: Se você sabe a energia e o momento de uma partícula, e quer determinar sua velocidade, então use que:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}c^2/E \tag{51}$$

Portanto, a resposta para o nosso problema é:

$$v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c$$

Colocando os valores das massas, chegamos a $v_\mu = 0,271c$.

Não há nada de errado com os cálculos que fizemos. Usamos, de forma simples e direta, as leis de conservação. No entanto, gostaríamos de mostrar uma forma mais rápida de calcular a energia e o momento do muon usando a notação de quadri-vetores. [É comum colocar um sobrescrito μ em todos os quadri-vetores. No entanto, não queremos que confundam o índice de espaço-tempo μ com o identificador do muon μ. Assim, ocasionalmente, iremos suprimir os índices referentes ao espaço-tempo e usar um ponto para indicar produtos escalares.] A conservação da energia e do momento requerem que:

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu, \quad \text{ou} \quad p_\nu = p_\pi - p_\mu$$

Tomando o produto escalar de cada lado da equação da direita chegamos a:

$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\nu$$

Mas:

$$p_\nu^2 = 0; \quad p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2, \quad p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2, \quad \text{e} \quad p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c}\frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$$

Ou seja:

$$0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu$$

De onde é possível obter E_μ imediatamente. Da mesma forma, temos:

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu$$

Elevando ao quadrado chegamos a:

$$m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu$$

Mas $E_\nu = |\boldsymbol{p}_\nu|c = |\boldsymbol{p}_\mu|c$ e portanto chegamos a:

$$2m_\pi|\boldsymbol{p}_\mu = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c,$$

o que nos fornece $|\boldsymbol{p}_\mu|$. Neste caso o problema era simples o suficiente de tal forma que o trabalho economizado pela notação de quadri-vetores não foi marcante. Mas, em problemas mais complicados o benefício é enorme.

Dica 3: Use a notação de quadri-vetores e explore o fato do produto escalar ser um invariante.

Uma das razões pela qual o uso de invariantes é tão poderoso nesta área da física é que temos a liberdade de avalia-los em qualquer sistema inercial. Frequentemente, o sistema do laboratório não é o mais simples de se trabalhar. Em um experimento típico de espalhamento, por exemplo, um feixe de partículas é "arremessado" em direção a um alvo estacionário. A reação em questão pode ser das mais diversas mas no laboratório a situação será sempre assimétrica uma vez que uma partícula está se movendo e a outra

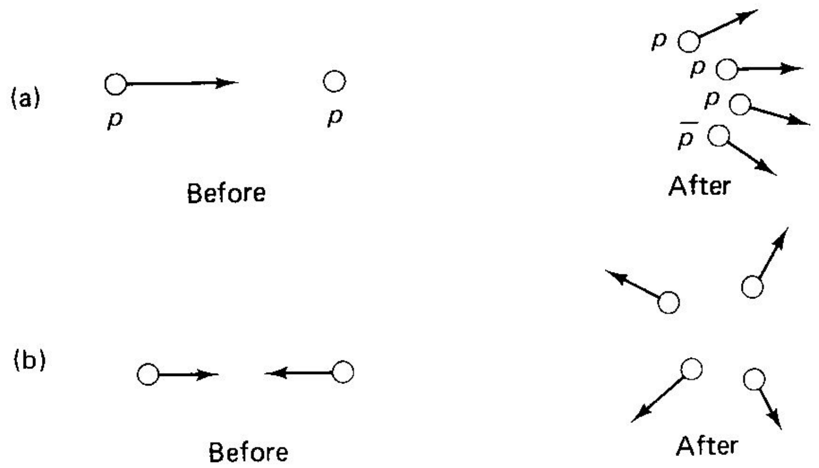

Figura 6: $p + p \to p + p + p + \overline{p}$. (a) no referencial do laboratorio e (b) no referencial do CM.

está em repouso. Cinematicamente, o processo é muito mais simples se visto do ponto de vista de um sistema de referências onde ambas as partículas estejam se aproximando com velocidades iguais. Este sistema é chamado de *centro de momento* (CM) pois neste sistema o momento total (o tri-vetor; não o quadri-vetor) é zero.

Exemplo 4

O Bevatron em Berkeley foi construído com a idéia de produzir antiprótons através da reação $p + p \to p + p + p + \overline{p}$. Ou seja, um próton de alta energia atinge um próton em repouso criando (além das partículas originais), um par próton-antipróton. Pergunta: qual o limiar de energia para que esta reação ocorra? (ou seja, qual a energia mínima do próton incidente?)

Solução: No laboratório o processo é algo parecido com a figura 6a. No CM ele se parece com a figura 6b. A pergunta então é: qual a condição para o limiar? Resposta: energia incidente, no mínimo suficiente, para criar as duas partículas extras. No referencial do laboratório não é trivial ver como formularíamos esta condição mas no referencial do CM é fácil! *Todas as quatro partículas finais tem de estar em repouso* com nenhuma energia "desperdiçada" na forma de energia cinética. (Isso não é possivel de ocorrer no referencial do laboratório pois a conservação do momento requer que haja algum movimento residual.)

Seja p^{μ}_{TOT} o quadri-vetor energia-momento *total* no sistema do laboratório; ele é conservado e portanto não importa se calcularmos ele antes ou depois da colisão. Faremos isso antes:

$$p^{\mu}_{TOT} = \left(\frac{E + mc^2}{c}, |\boldsymbol{p}|, 0, 0\right),$$

onde E e $\boldsymbol{p}$ são a energia e o momento do próton incidente e m é a massa sua massa. Seja $p^{\mu'}_{TOT}$ o quadri-vetor energia-momento total no CM. Novamente, podemos calculá-lo antes ou depois da colisão. Dessa vez, faremos isso *após*:

$$p^{\mu'}_{TOT} = (4mc, 0, 0, 0),$$

uma vez que (no limiar) todas as partículas estão no repouso. Agora, p^{μ}_{TOT} é sem dúvida diferente de $p^{\mu'}_{TOT}$ mas o produto escalar dos dois $p_{\mu TOT} p^{\mu}_{TOT}$ e $p_{\mu' TOT} p^{\mu'}_{TOT}$ são invariantes e portanto são iguais:

$$\left(\frac{E}{c} + mc\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 = (4mc)^2$$

Usando a relação 50 para eliminar $\boldsymbol{p}^2$ e resolvendo para E chegamos a:

$$E = 7mc^2$$

Evidentemente, o próton incidente terá então que carregar consigo uma energia pelo menos *seis* vezes maior que sua energia de repouso. De fato, os primeiros antiprótons foram descobertos quando a máquina atingiu 6 GeV.

Agora é uma boa hora para enfatizar a diferença entre uma quantidade *conservada* e um *invariante*. Energia se *conserva* – tem o mesmo valor antes e depois da colisão – mas não é um invariante. A massa é um *invariante* – é a mesma em todos os sistemas inerciais – mas não se conserva. Algumas quantidades são invariantes e conservadas. Outras não são nenhuma das duas. Como indica o exemplo 4, o uso inteligente das quantidades conservadas e invariantes pode salva-lo de muita álgebra. Esse exemplo também demonstra que alguns problemas são muito mais simples de serem resolvidos no CM ao passo que outros podem ser mais simples de serem resolvidos no referencial do laboratório.

Dica 4: Se um problema parece complicado no sistema do laboratório, tente analisá-lo no sistema do CM.

Mesmo que esteja lidando com algo mais complicado do que uma colisão entre duas partículas idênticas, o centro-de-momento (onde $p_{TOT} = 0$) continua sendo um sistema de referência útil pois nele a conservação do momento é trivial: zero antes, zero depois. Mas, você pode se perguntar se *sempre* existe um referencial do CM. Em outras palavras, dados um enxame de partículas com massas $m_1, m_2, m_3, \ldots$ e velocidades $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots$ necessariamente existe um sistema inercial onde o momento (tri-vetor) total é zero? A resposta é *sim*; provaremos isso encontrando a velocidade deste referencial e demonstrando que essa velocidade é menor que c. A energia e o momento total no referencial do laboratório (S) são:

$$E_{TOT} = \sum_i \gamma_i m_i c^2, \quad \boldsymbol{p}_{TOT} = \sum_i \gamma_i m_i \boldsymbol{v}_i \tag{52}$$

Como p^μ_{TOT} é um quadri-vetor, podemos usar as transformadas de Lorentz para calcular o momento em um referencial S' movendo-se na direção de p_{TOT} com velocidade v:

$$|p'_{TOT}| = \gamma \left(|p_{TOT}| - \beta \frac{E_{TOT}}{c} \right)$$

Em particular, este momento será nulo sempre que escolhermos um v tal que

$$\frac{v}{c} = \frac{|\boldsymbol{p}_{TOT}|c}{E_{TOT}} = \frac{|\sum \gamma_i m_i \boldsymbol{v}_i|}{\sum \gamma_i m_i c}$$

Agora, note que o comprimento da soma dos tri-vetores não pode ser maior que a soma de seus comprimentos (este fato geométrico é conhecido como *inigualdade triangular*). Assim:

$$\frac{v}{c} \leq \frac{\sum \gamma_i m_i (v_i/c)}{\sum \gamma_i m_i}$$

Como $v_i < c$ então podemos afirmar que $v < c$.[5] Assim, um CM sempre existe e sua velocidade com relação ao referencial do laboratório é

$$\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{\boldsymbol{p}_{TOT} c^2}{E_{TOT}} \tag{53}$$

É estranho, lembrando do resultado do exemplo 4, que seja necessária uma energia cinética seis vezes maior que a energia de repouso do próton para produzir um par $p - \overline{p}$. Afinal, estamos criando apenas $2mc^2$ de nova energia de repouso. Este exemplo ilustra a ineficiência do espalhamento de um alvo estacionário; a conservação do momento força-o a desperdiçar uma quantidade enorme de energia no estado final. Suponha que pudéssemos ter acelerado dois prótons, um em direção ao outro, fazendo com que o laboratório fosse de fato o CM. Neste caso, seria suficiente fornecer a cada próton apenas mc^2 de energia cinética, um sexto do que um experimento com alvo estacionário requer. Esta realização levou, no inicio da década de 70, ao desenvolvimento das chamadas máquinas de *colisão de feixes* (vide figura 7). Atualmente, praticamente todas as novas máquinas em física de altas energias são deste tipo.

[5] Estamos assumindo que pelo menos uma das partículas tenha massa. Se todas não tiverem massa então $v = c$ e não existirá um CM para essas partículas. Por exemplo, não existe um CM para um único fóton.

Figura 7: Dois arranjos experimentais: (a) feixes colidindo e (b) alvo fixo.

Exemplo 5

Suponha que duas partículas idênticas, cada uma com massa m e energia cinética T colidam frontalmente. Pergunta: quais são suas energias cinéticas *relativas* T' (ou seja, a energia cinética de uma no referencial de repouso da outra)?

Solução: Existem diversas formas de resolver este problema. Uma forma rápida é escrever o quadri-vetor energia-momento no CM e no laboratório.

$$p^{\mu}_{TOT} = \left(\frac{2E}{c}, \mathbf{0}\right), \quad p^{\mu'}_{TOT} = \left(\frac{E' + mc^2}{c}, \boldsymbol{p}'\right),$$

e em seguida usar que $(p_{TOT})^2 = (p'_{TOT})^2$:

$$\left(\frac{2E}{c}\right)^2 = \left(\frac{E' - mc^2}{c}\right) - \boldsymbol{p}'^2$$

Usando a equação 50 para eliminar $\boldsymbol{p}'$ temos:

$$2E^2 = mc^2(E' + mc^2)$$

Finalmente, expressando a resposta em termos de $T = E - mc^2$ e $T' = E' - mc^2$ chegamos a:

$$T' = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right)$$

A resposta *clássica* teria sido $T' = 4T$ que corresponde ao caso $T \ll mc^2$ (No sistema de repouso de B, A tem classicamente, o dobro da velocidade e portanto quatro vezes mais energia cinética do que no CM.) É verdade que o fator 4 corresponde a um aumento razoável mas o ganho *relativístico* pode ser muito maior. Elétrons colidindo com uma energia cinética no laboratório de 1 GeV por exemplo, teriam uma energia cinética *relativa* de 4000 GeV!