Física I para Engenharia
IFUSP - 432195
P2 - 30/05/2014

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, a lápis ou tinta. Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

Nome	Assinatura	Nº. USP	Turma

1) Um homem de $m = 80$ kg está em uma escada pendurada a um balão. O balão, que possui massa igual a $M = 320$ kg, encontra-se inicialmente estacionário em relação ao solo. Se o homem começa a subir a escada a uma velocidade de $v = 2,0$ m/s em relação ao solo, calcule:

a) (0,5) em que sentido e a qual velocidade o balão se moverá?;
b) (0,5) qual será a velocidade do homem em relação ao balão?;
c) (0,5) Suponha que o homem pare de subir a escada. Qual será a nova velocidade do balão?
d) (1,0) Suponha agora que o homem e o balão estão estacionários e, de repente o homem se solte da escada e passe a cair em queda livre. Calcule o momentum do balão em um dado instante de tempo t. Considere que o homem se solte do balão em $t = 0$ s.

SOLUÇÃO:

a) Como o centro de massa do sistema homem-balão não se move, o balão irá se mover em direção ao solo com a velocidade u.

$$v_{CM} = \frac{mv + Mu}{m + M} = \frac{mv + Mu}{m + M} = 0$$

então

$$u = -\frac{m}{M}v = \frac{(80\ \text{kg})\,(2,0\ \text{m/s})}{(320\ \text{kg})} = -0,5\ \text{m/s}$$

b)

$$\boxed{v_{rel} = v - u = 2,5\ \text{m/s}}$$

c) Agora, como não há movimento relativo no sistema, a velocidade de tanto o balão como do homem será igual a velocidade do centro de massa, que é nula. Logo, o balão ficará novamente em repouso.

d) Como o sistema se encontra inicialmente em equilíbrio

$$F_{total} = mg + Mg - F_{empuxo} = 0 \rightarrow F_{empuxo} = (M + m)g$$

então, quando o homem começar a cair em queda livre, a força aplicada ao balão será

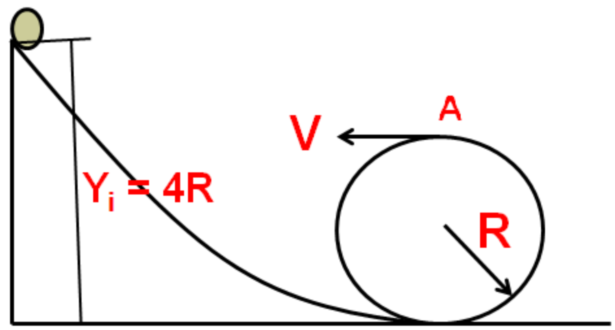
$$F_{bal\tilde{a}o} = Ma_{bal\tilde{a}o} = Mg - F_{empuxo} = -mg \rightarrow a_{bal\tilde{a}o} = -g\frac{m}{M}$$

Ou seja

$$\boxed{p_{balão} = Mv_{balão} = -gmt}$$

Equivalentemente, o mesmo resultado pode ser obtido da conservação do momentum: inicialmente o sistema homem-balão tem momentum nulo, e, em um tempo t o homem passa terá $p_{homem} = mv_{homem} = mgt$, que deve ser igual em módulo, mas de sinal invertido, ao momentum do balão para que o momentum total se conserve.

2) Um pequeno bloco de gelo de massa m desliza, com atrito desprezível, ao longo de um trilho em forma de loop conforme a figura abaixo. O gelo parte do repouso no ponto $y_i = 4R$ acima do nível da parte mais baixa do trilho.



a) (0,75) Qual a velocidade do bloco de gelo no ponto A, o ponto mais alto da parte circular do trilho?
b) (0.75) Qual a força normal exercida sobre o gelo no ponto A?
c) (1,0) Qual é a altura mínima h que o bloco deve ser lançado para completar o loop?
SOLUÇÃO:
a) Usando a lei da conservação da energia mecânica temos que

$$E_i = E_f \Rightarrow 4mgR = \frac{1}{2}mV_A^2 + 2mgR \Rightarrow \boxed{V_A = \sqrt{4gR}}$$

b) Aplicando a segunda lei temos que

$$mg + N = \frac{mV_A^2}{R} \Rightarrow \boxed{N = \frac{m4gR}{R} - mg = 3mg}$$

c) A altura mínima pode ser encontrada impondo a $N = 0$ no ponto A e novamente aplicando a lei da conservação da energia mecânica, ou seja

$$mgh = \frac{mV_A^2}{2} + 2mgR \Rightarrow V_A^2 = 2gh - 4gR$$

da segunda lei temos que,

$$mg = \frac{mV_A^2}{R} \to g = \frac{2gh - 4gR}{R}$$

$$\boxed{h = \frac{5R}{2}}$$

3) Considere um planeta de massa m orbitando uma estrela de massa M , com $M \gg m$. Pela mecânica newtoniana, é possível mostrar que esse planeta possui uma energia potencial "efetiva" dada por

$$U_{\mathbf{ef}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

onde L e G são constantes positivas, e r é a distância entre o planeta e a estrela (que se encontra na origem do sistema de coordenadas).

——-

(a) (0,5) Esboce o gráfico do potencial efetivo.

(b) (0,5) Determine a força "efetiva" que age sobre o planeta.

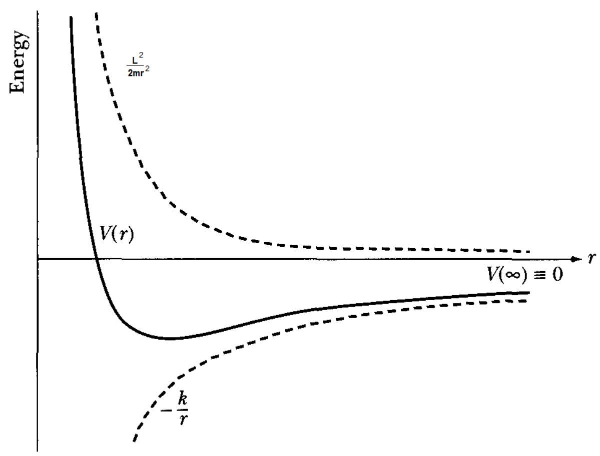
(c) (1,0) Determine r_0 que corresponde ao distância de equilíbrio desse planeta.

(d) (0,5) Sabendo que o planeta possui uma trajetória elíptica, cuja maior distância à estrela é $2r_0$, calcule a distância mínima que ele se aproxima da estrela.

———-

Solução:

a)



b)

$$\begin{aligned} F_{ef} &= -\frac{d}{dr}U(r) \\ F_{ef} &= -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}\right) \\ \vec{F}_{ef} &= \left(\frac{L^2}{mr^3} - \frac{GmM}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

c)Para o equilíbrio, precisamos que

$$\left.\frac{dU_{\text{ef}}(r)}{dr}\right|_{r=r_0} = 0$$

ou seja

$$\frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{GmM}{r_0^2} = 0 \rightarrow \frac{L^2}{m} - GmMr_0 = 0$$

então

$$\boxed{r_0 = \frac{L^2}{GM^2m^2}}$$

d) Temos que $U_{\text{ef}}(r_{max}) = U_{\text{ef}}(r_{min})$, então

$$\begin{aligned}
\frac{L^2}{2mr_{min}^2} - \frac{GmM}{r_{min}} &= \frac{L^2}{2m\left(2\frac{L^2}{GMm^2}\right)^2} - \frac{GmM}{2\frac{L^2}{GMm^2}} \\
&= \frac{G^2m^3M^3}{8L^2} - \frac{G^2m^3M^3}{2L^2} \\
&= -\frac{3G^2m^3M^3}{8L^2}
\end{aligned}$$

e, daí

$$\frac{4L^4}{3G^2m^4M^4} - \frac{8L^2}{3Gm^2M^2}r_{min} + r_{min}^2 = 0$$

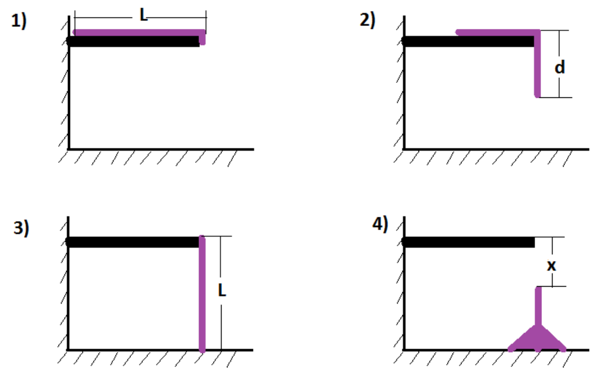
E

$$r_{min} = \frac{\frac{8L^2}{3Gm^2M^2} - \sqrt{(\frac{8L^2}{3Gm^2M^2})^2 - 4\frac{4L^4}{3G^2m^4M^4}}}{2} \to \boxed{r_{min} = \frac{2L^2}{3Gm^2M^2}}$$

ou

$$r_{min} = \frac{2L^2r_0}{4Gm^2M^2r_0 - L^2}$$

4) Uma corrente de densidade linear $\lambda = M/L$ constante, comprimento $L = 10,0m$ e massa $M = 0,5kg$ está sobre uma mesa horizontal cujo comprimento é ligeiramente inferior a L de modo que uma pequena parte da corrente, de comprimento desprezível, fica pendurada. A parte da corrente que está sobre a mesa começa aos poucos a deslizar sem atrito. Pede-se calcular



a) (0,75) o trabalho realizado pela força gravitacional quando o comprimento da parte pendurada atinge $d = 2,0m$ (item 2 da figura).

b) (0,75) a velocidade da corrente no instante em que a parte pendurada é $d = 2,0m$.

c) (0,5) a aceleração sofrida pela corrente em função do comprimento da parte pendurada.

d) (0,5) Supondo agora que a corrente tenha escorregado completamente da mesa, como mostra a figura acima (item 3), pede-se calcular a força exercida pelo solo sobre a corrente (força normal) após a corrente ter escorregado uma distância x igual a $2,0m$, como indicado na figura acima (item 4). Suponha para tanto que a velocidade inicial com que a corrente começa a cair é nula.

Obs: Considere $g = 10m/s^2$

Dica: Expresse a massa da parte da corrente fora da mesa em função de sua densidade linear e seu comprimento ($m = \lambda y$).

Solução:

a) O trabalho realizado pela força gravitacional é por definição igual a:

$$W_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{d}} F.dy$$

Como a massa é variável, a força também será, portanto temos que:

$$F = mg$$

onde $m = y.\lambda$ e λ é a densidade linear da corrente. Portanto;

$$\boxed{W_{1,2} = \int_0^d \lambda g y dy = \frac{M}{2L} g d^2 = 1J}$$

b) Usando o teorema do trabalho e energia cinética temos que:

$$\frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}MV_i^2 = \int_0^d F.dy$$

$$\frac{1}{2}MV_f^2 = \int_0^d \lambda g y dy = \frac{1}{2}\lambda g d^2 \Rightarrow L\lambda V_f^2 = \lambda g d^2$$

$$\boxed{V_f = \sqrt{gd^2/L} = 2m/s}$$

c) Sendo y o comprimento da corrente fora da mesa temos que a massa da corrente pendurada é λy, e a massa da corrente sobre a mesa é $\lambda (L - y)$. Então

$$\lambda y a + \lambda (L - y) a = \lambda y g$$

e, portanto

$$\boxed{a = \frac{gy}{L}}$$

d) A força exercida pelo solo é por definição igual a:

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d(mV)}{dt} = \frac{d(x\lambda V)}{dt} = \frac{M}{L}\frac{d(xV)}{dt}$$

Portanto temos que:

$$F = \frac{M}{L}V\frac{dx}{dt} + \frac{M}{L}x\frac{dV}{dt} = \frac{M}{L}V^2 + \frac{M}{L}xg$$

Porém $V^2 = 2gx$ Logo temos que:

$$\boxed{F = 2gx\frac{M}{L} + gx\frac{M}{L} = 3gx\frac{M}{L} = 3N}$$