



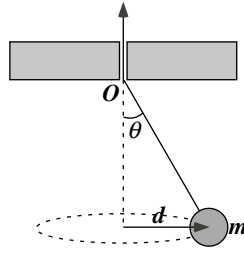
## LISTA 04

### Movimento Circular

Observe os diferentes graus de dificuldade para as questões: (\*), (\*\*), (\*\*\*)

- (\*) A hélice de um avião gira a  $1900 \text{ rev/min}$ .
  - Calcule a velocidade angular da hélice em  $\text{rad/s}$ .  
R:  $199 \text{ rad/s}$
  - Quantos segundos a hélice leva para girar  $35$  graus?  
R:  $0,00307 \text{ s}$
- (\*) Uma criança está empurrando um carrossel. O deslocamento angular do carrossel varia com o tempo de acordo com a relação  $\theta(t) = \gamma t + \beta t^3$ , onde  $\gamma = 0,400 \text{ rad/s}$  e  $\beta = 0,0120 \text{ rad/s}^3$ .
  - Calcule a velocidade angular do carrossel em função do tempo.  
R:  $\omega(t) = \gamma + 3\beta t^2$
  - Qual é o valor da velocidade angular inicial?  
R:  $\omega(0) = \gamma = 0,400 \text{ rad/s}$
  - Calcule o valor da velocidade angular instantânea para  $t = 5,00 \text{ s}$  e a velocidade média angular para o intervalo do tempo de  $t = 0$  até  $t = 5,00 \text{ s}$ . Mostre que a velocidade média angular não é igual à média das velocidades angulares para  $t = 0$  até  $t = 5,00 \text{ s}$  e explique a razão dessa diferença.  
R:  $\omega(5) = 1,30 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{\text{media}} = 0,70 \text{ rad/s}$ , média das velocidades =  $0,85 \text{ rad/s}$ .
- (\*) O ângulo descrito por uma roda de bicicleta girando é dado por  $\theta(t) = a + bt^2 - ct^3$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes positivas tais que se  $t$  for dado em segundos,  $\theta$  deve ser medido em radianos.
  - Calcule a aceleração angular da roda em função do tempo.  
R:  $\alpha(t) = 2b - 6ct$

- (b) Em que instantes a velocidade angular instantânea da roda é nula?  
 R:  $t = 0$  e  $t = \frac{2b}{3c}$
4. (\*) Um ventilador elétrico é desligado, e sua velocidade angular diminui uniformemente de  $500 \text{ rev/min}$  até  $200 \text{ rev/min}$  em  $4,00 \text{ s}$ .
- (a) Ache a aceleração angular em  $\text{rev/s}^2$  e o número de revoluções ocorridas no intervalo de  $4,00 \text{ s}$ .  
 R:  $\alpha = -1,25 \text{ rev/s}^2$  e  $23,3$  revoluções
- (b) Supondo que a aceleração angular calculada no item (a) permaneça constante, durante quantos segundos, depois de desligado o aparelho, a hélice continuará a girar até parar?  
 R:  $t = 6,67 \text{ s}$
5. (\*) A roda de uma olaria gira com aceleração angular constante igual a  $2,25 \text{ rad/s}^2$ . Depois de  $4,00 \text{ s}$ , o ângulo descrito pela roda é de  $60,0 \text{ rad}$ . Qual era a velocidade angular inicial da roda?  
 R:  $\omega_0 = 10,5 \text{ rad/s}$ .
6. (\*) Para um movimento com aceleração angular constante
- (a) Deduza uma expressão que forneça  $\theta - \theta_0$  em função de  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $t$  (não use  $\omega_0$ ).  
 R:  $\theta - \theta_0 = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- (b) Para  $t = 8,0 \text{ s}$ , uma engrenagem gira em torno de um eixo fixo a  $4,50 \text{ rad/s}$ . Durante o intervalo precedente de  $8,0 \text{ s}$  ela girou através de um ângulo de  $40,0 \text{ rad}$ . Use o resultado da parte (a) para calcular a aceleração constante da engrenagem.  
 R:  $\alpha = -0,125 \text{ rad/s}^2$
- (c) Qual era a velocidade angular de engrenagem para  $t = 0$ ?  
 R:  $\omega_0 = 5,5 \text{ rad/s}$
7. (\*) Uma bolinha presa a um fio de massa desprezível gira em torno de um eixo vertical com velocidade escalar constante, mantendo-se a uma distância  $d = 0,5 \text{ m}$  do eixo; o ângulo  $\theta$  entre o fio e a vertical é igual a  $30^\circ$ . O fio passa sem atrito através de um orifício  $O$  numa placa, e é puxado lentamente para cima até que o ângulo  $\theta$  passa a ser de  $60^\circ$ .
- (a) Que comprimento do fio foi puxado?  
 R:  $\Delta l = 0,6 \text{ m}$
- (b) De que fator variou a velocidade de rotação?  
 R:  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2,08$



8. (\*) Uma força é aplicada tangencialmente à borda de uma polia que tem  $10\text{ cm}$  de raio e momento de inércia de  $1 \times 10^{-3}\text{ kg m}^2$  em relação ao seu eixo. A força tem módulo variável com o tempo, segundo a relação  $F(t) = 0,5t + 0,30t^2$ , com  $F$  em Newtons e  $t$  em segundos. A polia está inicialmente em repouso. Em  $t = 3\text{ s}$ , quais são
- (a) a sua aceleração angular e  
R:  $\alpha = 420\text{ rad/s}^2$
- (b) sua velocidade angular?  
R:  $\omega = 495\text{ rad/s}$
9. (\*\*\*) Um corpo rígido roda em torno de um eixo fixo com o deslocamento angular dado por  $\theta(t) = at - bt^3$ , onde  $a = 6,0\text{ rad/s}$  e  $b = 2,0\text{ rad/s}^3$  e  $t \geq 0$ . Ache os valores médios da velocidade angular e da aceleração angular para o intervalo de tempo de  $t = 0$  até o instante em que o corpo para.  
R:  $\omega_{\text{media}} = \frac{2a}{3} = 4\text{ rad/s}$  e  $\alpha_{\text{media}} = -\sqrt{3ab} = -6,0\text{ rad/s}^2$ .
10. (\*\*\*) Considere o movimento de uma partícula de massa  $m$  num campo de forças centrais associado à energia potencial  $U(r)$ , onde  $r$  é a distância da partícula ao centro de forças  $O$ . Neste movimento, a magnitude  $l = |\vec{l}|$  do momento angular da partícula em relação a  $O$  se conserva. Sejam  $(r, \theta)$  as componentes em coordenadas polares do vetor de posição  $r$  da partícula em relação à origem  $O$ .
- (a) Mostre que as componentes em coordenadas polares do vetor velocidade  $v$  da partícula são  $v_r = \frac{dr}{dt}$  (velocidade radial) e  $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$  (velocidade transversal).  
Mostre que  $l = mrv_\theta$ .
- (b) Mostre que a energia total  $E$  da partícula é dada por  $E = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{l^2}{(2mr^2)} + U(r)$

## Gravitação

11. (\*) Europa é um satélite do planeta Júpiter, com raio de  $1569\text{ km}$  e com aceleração em queda-livre, na sua superfície, de  $1,39\text{ m/s}^2$ .

- (a) Calcule a velocidade de escape em Europa.  
R: 2,09 km/s
- (b) Que altura uma partícula alcança se ela deixa a superfície com uma velocidade vertical de 1,01 km/s?  
R: 478,9 km
- (c) Com que velocidade um objeto atinge o satélite se ele for largado de uma altura de 1000 km?  
R: 1,303 km/s
- (d) Calcule a massa de Europa.  
R:  $5,13 \times 10^{22}$  kg

12. (\*) O asteróide Eros, um dos muitos “planetas menores” que orbitam em torno do Sol na região entre Marte e Júpiter, tem raio 7,0 km e massa  $5,0 \times 10^{15}$  kg.

- (a) Se você estivesse em Eros, poderia levantar uma caminhonete de 2000 kg?  
(b) Você poderia correr rápido o suficiente para se colocar em órbita?

Ignore os efeitos devidos à rotação do asteróide. Nota: os recordes olímpicos de tempo para a corrida de 400 m é de 43,49 s para homens (Michael Johnson-EUA, 1996) e de 48,25 s para mulheres (Marie-José Pérec-França, 1996).

13. (\*) Considere um sistema isolado formado por três esferas. Duas delas, de massas 2,53 kg e 7,16 kg, são separadas por uma distância de centro a centro de 1,56 m. A terceira de 212 g é posicionada a 42,0 cm do centro da esfera de 7,16 kg, ao longo da linha que liga os centros. Quanto trabalho deve ser realizado por um agente externo para mover a esfera de 212 g ao longo da linha que liga os centros e a posicionar a 42,0 cm do centro da esfera de 2,53 kg?

R:  $9,845 \times 10^{-11}$  J

14. (\*\*) Considere um sistema em que um corpo de massa  $m$  orbita em torno de outro com massa  $M$ , onde  $M \gg m$  (equivalente a assumir  $M$  em repouso).

- (a) Mostre que, para uma órbita circular de raio  $r$ , a energia mecânica total do sistema pode ser escrita como:

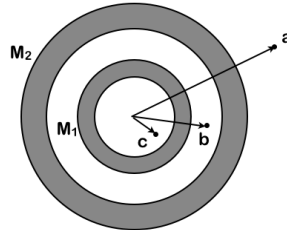
$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

- (b) Use a conservação de energia para mostrar que a velocidade  $v$  de um objeto em uma órbita elíptica satisfaz a relação

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

onde  $r$  é a distância entre o corpo em órbita e o corpo central de massa  $M$  e  $a$  é o comprimento do maior semi-eixo da elipse.

15. (\*\*) Duas cascas concêntricas de densidade uniforme e massas  $M_1$  e  $M_2$  são posicionadas conforme mostrado na figura abaixo. Encontre a força sobre uma partícula de massa  $m$  quando a partícula está localizada em

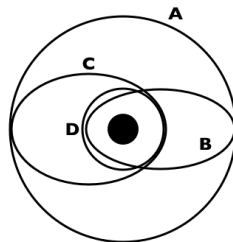


- (a)  $r = a$   
R:  $F = -\frac{G(M_1+M_2)m}{a^2}$
- (b)  $r = b$   
R:  $F = -\frac{GM_1m}{b^2}$
- (c)  $r = c$   
R:  $F = 0$

A distância  $r$  é medida a partir do centro das cascas.

16. (\*\*) Várias órbitas possíveis de um satélite são mostradas na figura abaixo:

- (a) Qual órbita tem o maior momento angular?  
R: A
- (b) Qual órbita tem a maior energia total?  
R: A
- (c) Em que órbita a maior velocidade é alcançada?  
R: B



## Momento de Inércia

17. (\*) Calcule o momento de inércia de um aro (um anel fino) de raio  $R$  e massa  $M$  em relação a um eixo perpendicular ao plano do aro passando pela sua periferia.  
R:  $I = 2MR^2$
18. (\*) Uma placa metálica fina de massa  $M$  tem forma retangular com lados  $a$  e  $b$ . Use o teorema dos eixos paralelos para determinar seu momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao plano da placa passando por um de seus vértices.  
R:  $I = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$
19. (\*\*) Ache o momento de inércia de um disco maciço, uniforme, de raio  $R$  e massa  $M$  em relação a um eixo perpendicular ao plano do disco passando pelo seu centro.  
R:  $I = \frac{1}{2}MR^2$
20. (\*\*) Um cilindro oco tem massa  $m$ , raio externo  $R_2$  e raio interno  $R_1$ . Mostrar que o momento de inércia em relação ao eixo de simetria é

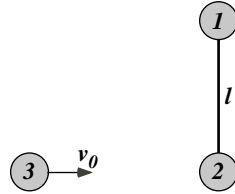
$$I = m \frac{R_2^2 + R_1^2}{2}$$

## Rotação de Objetos Extensos

21. (\*) Um cilindro de massa  $m$  e raio  $r$ , é solto (a partir do repouso) do topo de um plano inclinado que faz um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Sabendo que o cilindro deve descer o plano inclinado rolando sem deslizar, encontre sua aceleração.  
R:  $a = \frac{2}{3}g \sin(\alpha)$
22. (\*) Uma esfera, um cilindro e um aro, todos com o mesmo raio  $R$ , partem do repouso e rolam para baixo sobre o mesmo plano inclinado. Qual corpo atingirá a base primeiro?  
R: a esfera
23. (\*) O que é maior, o momento angular da Terra associado à rotação em torno de seu eixo ou o seu momento angular associado ao movimento orbital em torno do Sol?  
R: o momento angular orbital.
24. (\*) Um haltere formado por dois discos 1 e 2 iguais de massas  $m$  unidos por uma barra rígida de massa desprezível e comprimento  $l = 30 \text{ cm}$  repousa sobre uma mesa de ar horizontal. Um terceiro disco 3 de mesma massa  $m$  desloca-se com atrito desprezível

e velocidade  $v_0 = 3 \text{ m/s}$  sobre a mesa, perpendicularmente ao haltere, e colide frontalmente com o disco 2, ficando colado a ele. Descreva completamente o movimento subsequente do sistema.

R:  $v_{CM} = 1 \text{ m/s}$  na direção de  $v_0$  e  $\omega = 5 \text{ rad/s}$



25. (\*) Dois patinadores de massa  $60 \text{ kg}$ , deslizando sobre uma pista de gelo com atrito desprezível, aproximam-se com velocidades iguais e opostas de  $5 \text{ m/s}$ , segundo retas paralelas, separadas por uma distância de  $1,40 \text{ m}$ .

(a) Calcule o vetor momento angular do sistema e mostre que é o mesmo em relação a qualquer ponto e se conserva.

R:  $l = 420 \text{ kg m}^2/\text{s}$  perpendicularmente à pista

(b) Quando os patinadores chegam a  $1,40 \text{ m}$  um do outro, estendem os braços e dão-se as mãos, passando a girar em torno do centro de massa comum. Calcule a velocidade angular de rotação.

R:  $\omega = 7,1 \text{ rad/s}$

26. (\*) A molécula de oxigênio,  $O_2$ , tem massa total de  $5,3 \times 10^{-26} \text{ kg}$  e um momento de inércia de  $1,94 \times 10^{-46} \text{ kg m}^2$ , em relação ao eixo que atravessa perpendicularmente a linha de junção dos dois átomos. Suponha que essa molécula tenha em um gás a velocidade de  $500 \text{ m/s}$  e que sua energia cinética de rotação seja dois terços da energia cinética de translação. Determine sua velocidade angular.

R:  $\omega = 6,75 \times 10^{12} \text{ rad/s}$

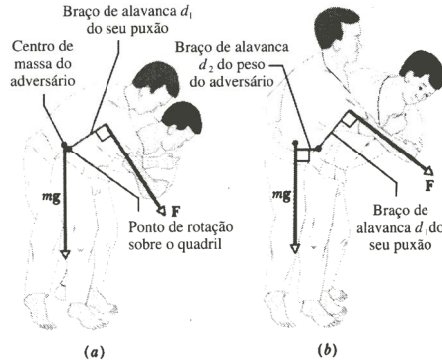
27. (\*) Para atirar ao solo um adversário de  $80 \text{ kg}$ , você utiliza o deslocamento em torno do quadril, um golpe básico do judô em que você tenta puxá-lo pelo uniforme com uma força  $F$ , que tem um braço de alavanca  $d_1 = 0,30 \text{ m}$  em relação ao ponto de apoio (eixo de rotação) no seu quadril direito, sobre o qual deseja girá-lo com uma aceleração angular de  $-12 \text{ rad/s}^2$ , ou seja, uma aceleração no sentido horário na figura a seguir. Suponha que o momento de inércia  $I$  em relação ao ponto de rotação seja  $15 \text{ kg m}^2$ .

(a) Qual deve ser o módulo de  $F$  se, inicialmente, você incliná-lo para frente, para fazer com que o centro de massa dele coincida com o seu quadril (figura a)?

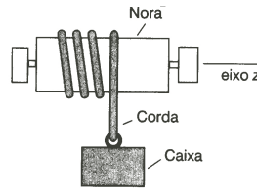
R:  $F = 600 \text{ N}$

- (b) Qual será o módulo de  $F$  se o adversário permanecer ereto e o vetor peso dele tiver um braço de alavanca  $d_2 = 0,12 \text{ m}$  em relação ao eixo de rotação (figura b)?

R:  $F = 913,6 \text{ N}$



28. (\*) Libera-se uma caixa que está presa a uma corda enrolada em uma nora (figura a seguir). A massa da caixa é  $M_c = 35 \text{ kg}$ , e a massa e o raio da nora são  $M_n = 94 \text{ kg}$  e  $R_n = 83 \text{ mm}$ . Determine



- (a) o módulo  $a$  da aceleração linear da caixa e

R:  $a = 4,2 \text{ m/s}^2$

- (b) a tensão  $F_T$  da corda. A nora pode ser tratada como um cilindro uniforme de raio  $R_n$ ; despreza-se o torque devido ao atrito nos mancais da corda.

R:  $F_T = 197,4 \text{ N}$

29. (\*) Sob determinadas circunstâncias, uma estrela pode sofrer um colapso e se transformar em um objeto extremamente denso, constituído principalmente por nêutrons e chamado “Estrela de Nêutrons”. A densidade de uma estrela de nêutrons é aproximadamente  $10^{14}$  vezes maior do que a da matéria comum. Suponha que a estrela seja uma esfera maciça e homogênea antes e depois do colapso. O raio inicial da estrela era de  $7,0 \times 10^5 \text{ km}$  (comparável com o raio do Sol); seu raio final é igual a  $16 \text{ km}$ . Supondo que a estrela original completava um giro em 30 dias, encontre a velocidade



angular da estrela de nêutrons.

R:  $\omega = 3,89 \times 10^3 \text{ rad/s}$

30. (\*) Uma mesa giratória grande gira em torno de um eixo vertical fixo, fazendo uma revolução em  $6,00 \text{ s}$ . O momento de inércia da mesa giratória em torno desse eixo é igual a  $1200 \text{ kg m}^2$ . Uma criança com massa de  $40,0 \text{ kg}$ , que estava inicialmente em repouso no centro da mesa, começa a correr ao longo de um raio. Qual é a velocidade angular da mesa giratória quando a criança está a uma distância de  $2,00 \text{ m}$  do centro? (Suponha que a criança possa ser considerada uma partícula).

R:  $\omega = 0,924 \text{ rad/s}$

31. (\*) Uma porta sólida de madeira com largura de  $1,00 \text{ m}$  e altura de  $2,00 \text{ m}$  é articulada em um de seus lados e possui massa total de  $40,0 \text{ kg}$ . Inicialmente ela está aberta e em repouso, a seguir, uma porção de material amorfo e pegajoso de massa igual a  $0,500 \text{ kg}$ , se deslocando perpendicularmente à porta com velocidade de  $12,0 \text{ m/s}$ , colide no centro da porta. Calcule a velocidade angular final da porta. A porção do material supracitado contribui significativamente para o momento de inércia?

R:  $\omega = 0,223 \text{ rad/s}$

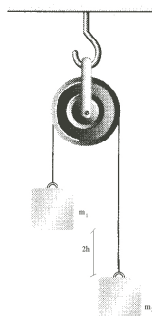
32. (\*\*) Considere dois corpos com  $m_1 > m_2$  ligados por um fio de massa desprezível que passa sobre uma polia de raio  $R$  e momento de inércia  $I = \frac{MR^2}{2}$  ao redor de seu eixo de rotação, como na figura a seguir. O fio não desliza sobre a polia. A polia gira sem atrito. Os corpos são soltos do repouso e estão separados por uma distância vertical de  $2h$ . Expresse as respostas em função de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $M$ ,  $g$  e  $h$ .

- (a) Encontre as velocidades translacionais dos corpos quando passam um pelo outro.

R:  $v = \left[ \frac{2gh(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2 + \frac{M}{2})} \right]^{1/2}$

- (b) Encontre a aceleração linear dos corpos.

R:  $a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2 + \frac{M}{2})} g$



33. (\*\*) Uma roda de bicicleta de massa  $M$  e raio  $R_1$  (massa dos raios da roda desprezível) pode girar livremente em torno de um eixo horizontal. Um fio de massa desprezível é enrolado em torno de seu diâmetro, e ligado a um bloco de massa  $m_1 = \frac{M}{5}$ , passando por uma polia que é um disco de massa  $m_2 = \frac{4M}{5}$  e raio  $R_2$ , como visto na figura.

(a) Faça um diagrama mostrando as forças aplicadas pelo fio em cada um dos três corpos.

(b) Obtenha a força exercida pelo fio na roda de bicicleta, em termos de  $M$  e da aceleração  $a$  da massa  $m_1$ .

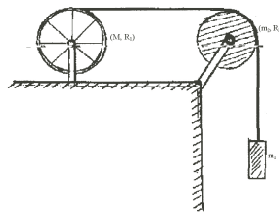
R:  $F = Ma$

(c) Determine a força exercida pelo fio na massa  $m_1$ , em termos de  $a$  e  $M$ .

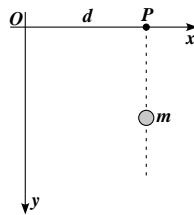
R:  $F = \frac{M(g-a)}{5}$

(d) Determine a aceleração  $a$  da massa  $m_1$ .

R:  $a = \frac{g}{8}$



34. (\*\*) Uma partícula de massa  $m$  parte do repouso no ponto  $P$  indicado na figura abaixo.



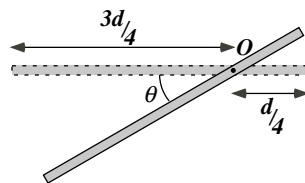
(a) Calcule o torque da força gravitacional sobre a partícula em relação à origem  $O$ .

R:  $\tau = mgd$

(b) Qual é o momento angular da partícula que cai, para um dado instante de tempo  $t$ , em relação ao ponto  $O$ ?

R:  $L = mgt d$

35. (\*\*) Uma haste metálica delgada de comprimento  $d$  e massa  $M$  pode girar livremente em torno de um eixo horizontal, que a atravessa perpendicularmente, à distância  $d/4$  de uma extremidade. A haste é solta a partir do repouso, na posição horizontal. A haste é solta a partir do repouso, na posição horizontal.



- (a) Calcule o momento de inércia  $I$  da haste com respeito ao eixo em torno do qual ela gira.

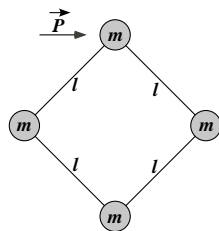
R:  $I = \frac{7}{48}Md^2$

- (b) Calcule a velocidade angular  $\omega$  adquirida pela haste após ter caído de um ângulo  $\theta$  (figura abaixo), bem como a aceleração angular  $\alpha$ .

R:  $\omega = \left[ \frac{24}{7} \frac{g}{d} \text{sen}(\theta) \right]^{1/2}$  e  $\alpha = \frac{12}{7} \frac{g}{d} \text{cos}(\theta)$

36. (\*\*) Quatro discos iguais de massas  $m$  ocupam os vértices de uma armação quadrada formada por quatro barras rígidas de comprimento  $l$  e massa desprezível. O conjunto está sobre uma mesa de ar horizontal, podendo deslocar-se sobre ela com atrito desprezível. Transmite-se um impulso instantâneo  $\vec{P}$  a uma das massas, na direção de uma das diagonais do quadrado (figura). Descreva completamente o movimento subsequente do sistema.

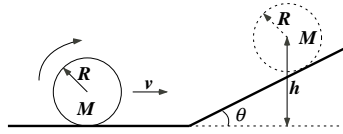
R:  $\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{4m}$  e  $\omega = \frac{\sqrt{2}P}{4ml}$



37. (\*\*) Uma roda cilíndrica homogênea, de raio  $R$  e massa  $M$ , rola sem deslizar sobre um plano horizontal, deslocando-se com velocidade  $v$ , e sobe sobre um plano inclinado de inclinação  $\theta$ , continuando a rolar sem deslizar (figura a seguir). Até que altura  $h$  o centro da roda subirá sobre o plano inclinado?

R:  $h = R + \frac{3}{4} \frac{v^2}{g}$

## Exercícios Complementares



38. (\*\*) Uma barra delgada de comprimento  $L$  possui massa por unidade de comprimento variando a partir da extremidade esquerda, onde  $x = 0$ , de acordo com  $\frac{dm}{dx} = \gamma x$ , onde  $\gamma$  é uma constante de unidade  $kg/m^2$ .

(a) Calcule a massa total da barra em termos de  $\gamma$  e  $L$ .

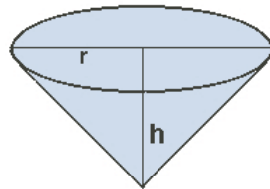
R:  $M = \frac{\gamma L^2}{2}$

(b) Calcule o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular à barra e passando pela sua extremidade esquerda.

R:  $I = \frac{1}{2}ML^2$

39. (\*\*) Determine o momento de inércia de um cone maciço uniforme em relação a um eixo que passa através de seu centro. O cone possui massa  $M$  e altura  $h$ . O raio do círculo da sua base é igual a  $r$ .

R:  $I = \frac{3}{10}Mr^2$



40. (\*\*) Um ioiô é composto por dois discos cuja espessura é  $b$  e cujo raio é  $R$ . Os dois discos estão ligados por um eixo central estreito de raio  $R_0$ . Em torno desse eixo está enrolado um fio de comprimento  $L$  e espessura desprezível. O momento de inércia do sistema, com relação ao seu centro de massa é dado por  $I_{CM}$ . Supondo o atrito desprezível, encontre a velocidade linear do ioiô quando ele sobe o fio.

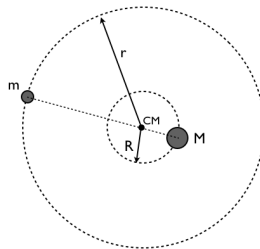
R:  $v = - \left[ \frac{2MR_0^2gL}{(I_{CM} + MR_0^2)} \right]^{1/2}$

41. (\*\*) Um corpo de massa inicial  $M$  inicialmente em repouso está preso à extremidade de uma corda de tamanho  $l$ , quando esticada. A outra extremidade da corda está presa a um suporte, colocado em uma mesa que não oferece atrito. Esse corpo possui uma válvula que é capaz de expelir um gás, perpendicularmente ao fio e paralelamente à

mesa, numa taxa  $\lambda$  [kg/s] e com uma velocidade escalar  $V_E$  relativa ao corpo. O corpo sai do repouso e começa a girar em torno do suporte do fio. Determine o momento angular da partícula num instante  $t$  qualquer, tomando  $t = 0$  no instante em que a válvula é aberta.

R:  $L = (M - \lambda t) l V_E \ln \left[ \frac{M}{(M - \lambda t)} \right]$

42. (\*) Um par de estrelas gira em torno do seu centro de massa comum. Uma das estrelas tem massa  $M$  que é duas vezes a massa  $m$  da outra, isto é,  $M = 2m$ . Seus centros estão separados por uma distância  $d$ , que é grande se comparado ao tamanho de cada estrela.



- (a) Calcule o período de revolução das estrelas em torno do seu centro de massa comum em termos de  $d$ ,  $m$  e  $G$ .

R:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{3Gm}}$

- (b) Compare as quantidades de movimento angular das duas estrelas em torno do seu centro de massa comum calculando a razão  $L_m/L_M$ .

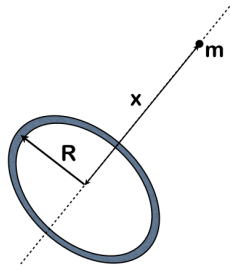
R:  $\frac{L_m}{L_M} = 2$

- (c) Compare as energias cinéticas das duas estrelas calculando a razão  $K_m/K_M$ .

R:  $\frac{K_m}{K_M} = 2$

43. (\*\*\*) O Sol, de massa  $2 \times 10^{30}$  kg, está girando em torno do centro da Via-Láctea, estando distante deste  $2,2 \times 10^{20}$  m. Ele completa uma revolução a cada  $2,5 \times 10^8$  anos. Estime o número de estrelas na Via-Láctea. (Dica: Suponha para simplificar que as estrelas são distribuídas com simetria esférica em relação ao centro da galáxia e que o Sol está essencialmente na extremidade da galáxia).

44. (\*\*\*) Vários planetas (os gigantes gasosos Júpiter, Saturno, Urano e Netuno) possuem anéis praticamente circulares à sua volta, talvez compostos de material que não conseguiu formar um satélite. Além disso, várias galáxias têm estrutura em forma de anel. Considere um anel homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$ .



- (a) Encontre uma expressão para a força gravitacional exercida pelo anel sobre uma partícula de massa  $m$  localizada a uma distância  $x$  do centro do anel ao longo do seu eixo.

R:  $\vec{F} = -\frac{GMmx}{(R^2+x^2)^{3/2}} \vec{l}$

- (b) Suponha que a partícula cai a partir do repouso devido à atração gravitacional do anel de matéria. Encontre uma expressão para a velocidade com a qual ela passa pelo centro do anel.

R:  $v = \sqrt{2GM \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} \right)}$

45. (\*\*) Um corpo esférico sólido de raio igual a  $10\text{ cm}$  e massa de  $12\text{ kg}$ , parte do repouso e rola uma distância de  $6,0\text{ m}$ , descendo o telhado de uma casa, cuja inclinação é igual a  $30^\circ$ .

- (a) Qual a aceleração linear do corpo durante o rolamento?

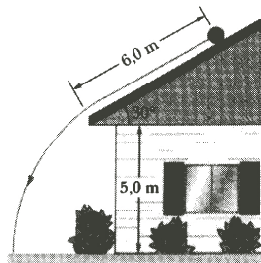
R:  $a = 3,5\text{ m/s}^2$

- (b) Qual é a força de atrito  $f_e$ ?

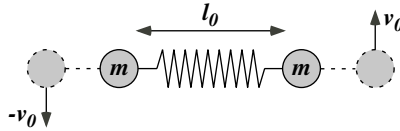
R:  $f_e = 16,8\text{ N}$

- (c) Qual é a velocidade do corpo quando ele sai do telhado?

R:  $v = 6,48\text{ m/s}$



46. (\*\*) Duas partículas de mesma massa  $m$  estão presas às extremidades de uma mola de massa desprezível, inicialmente com seu comprimento relaxado  $l_0$ . A mola é esticada



até o dobro desse comprimento e é solta depois de comunicar velocidades iguais e opostas  $v_0$  e  $-v_0$  às partículas, perpendiculares à direção da mola, tais que  $kl_0^2 = 6mv_0^2$ , onde  $k$  é a constante da mola. Calcule as componentes  $(v_r, v_\theta)$  radial e transversal da velocidade das partículas quando a mola volta a passar pelo seu comprimento relaxado.

R:  $v_r = 0$  e  $v_\theta = 2v_0$

47. (\*\*) Dois blocos idênticos, de massa  $M$  cada um, estão ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de raio  $R$  e de momento de inércia  $I$  (figura a seguir). A corda não desliza sobre a polia; desconhece-se existir ou não atrito entre o bloco e a mesa; não há atrito no eixo da polia. Quando esse sistema é liberado, a polia gira de um ângulo  $\theta$ , num tempo  $t$ , e a aceleração dos blocos é constante. Todas as respostas devem ser expressas em função de  $M, I, R, \theta, g$  e  $t$ .

- (a) Qual a aceleração angular da polia?

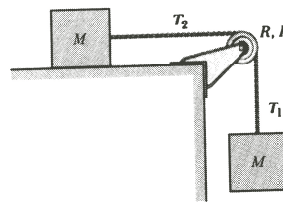
R:  $\alpha = \frac{2\theta}{t^2}$

- (b) Qual a aceleração dos dois blocos?

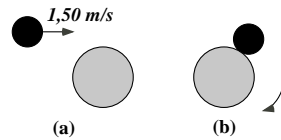
R:  $a = \frac{2\theta R}{t^2}$

- (c) Quais as tensões na parte superior e inferior da corda?

R:  $T_1 = M \left( g - \frac{2\theta R}{t^2} \right)$  e  $T_2 = Mg - \frac{2M\theta R}{t^2} - \frac{2I\theta}{Rt^2}$



48. (\*\*) Um disco com uma massa de  $80,0 \text{ g}$  e um raio de  $4,00 \text{ cm}$  desliza ao longo de uma mesa de ar à velocidade de  $1,50 \text{ m/s}$  como mostrado na figura. Ele faz uma colisão oblíqua com um segundo disco tendo raio  $6,00 \text{ cm}$  e massa  $120 \text{ g}$  (inicialmente em repouso) de forma que suas bordas apenas se toquem. Como suas bordas estão revestidas com uma cola de ação instantânea, os discos ficam grudados e giram após a colisão (ver figura).



(a) Qual é o momento angular do sistema em relação ao centro de massa?

R:  $L = 72000 \text{ g cm}^2/s$

(b) Qual é a velocidade angular ao redor do centro de massa?

R:  $\omega = 9,47 \text{ rad/s}$

49. (\*\*\*) Um giroscópio possui movimento de precessão em torno de um eixo vertical. Descreva o que ocorre com a velocidade angular de precessão quando são feitas as seguintes mudanças nas variáveis, mantendo-se as outras grandezas constantes:

(a) a velocidade angular de spin do volante dobra;

(b) o peso total dobra;

(c) o momento de inércia em torno do eixo do volante dobra;

(d) a distância entre o pivô e o centro de gravidade dobra;

(e) O que ocorreria se todas as quatro variáveis indicadas nos itens de (a) até (d) dobrassem de valor ao mesmo tempo?

50. (\*\*\*) Considere um giroscópio com um eixo que não está na direção horizontal, mas possui uma inclinação  $\beta$  em relação à horizontal. Mostre que a velocidade angular da precessão não depende do valor de  $\beta$ .