Computador Ótico

Experimento IV

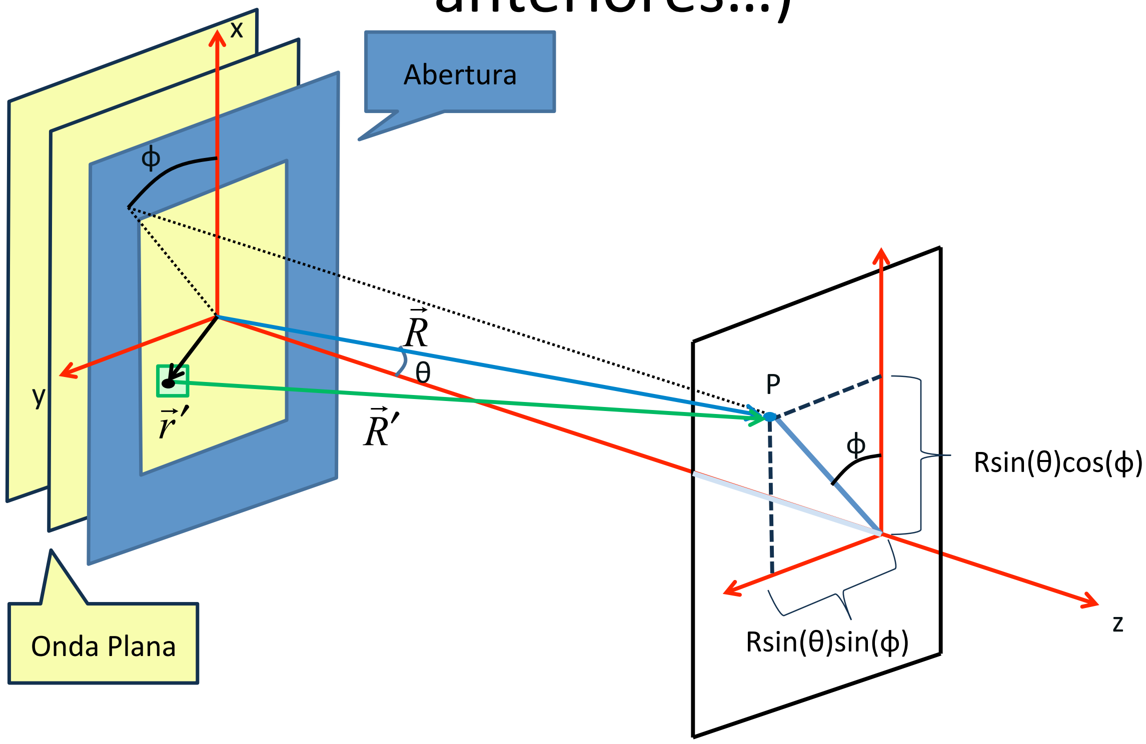
Computador ótico

- **Computador ótico** é um dispositivo que permite a manipulação de imagem de maneira controlada sem a necessidade de efetuar cálculos complicados.
- Esse dispositivo pode e vai ser construído e estudado no laboratório e vamos, nas próximas aulas, discutir como fazê-lo em detalhe.

E Como funciona?

Vamos lembrar das aulas anteriores...

Generalizando a difração (aulas anteriores…)



Como escrevemos o Campo Elétrico no anteparo?

Generalizando a difração (aulas anteriores…)

- Para grandes distâncias, i.e. limite de Fraunhofer, temos:

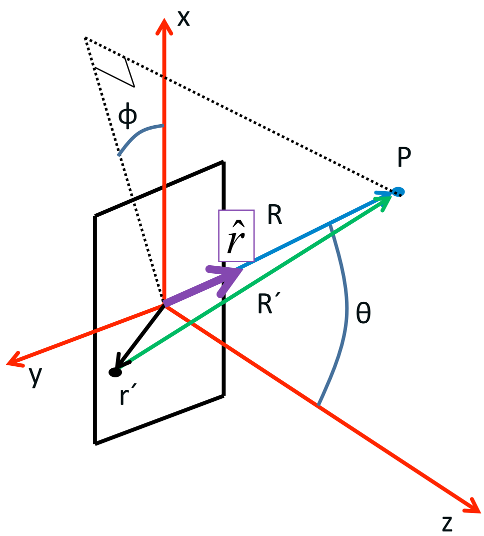
$$\vec{k} \approx k\hat{r}$$

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}' = R\hat{r} - \vec{r}'$$

- Assim:

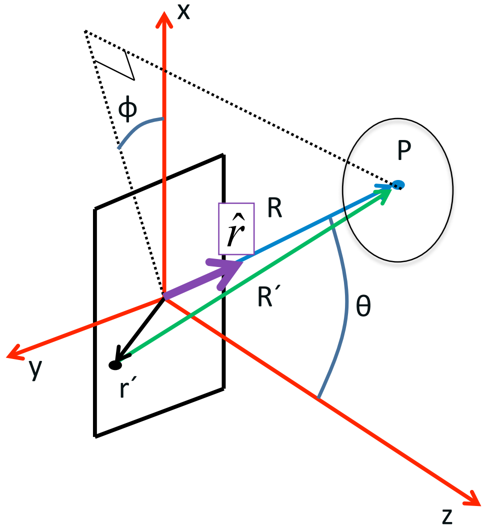
$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{jkR - \vec{k}\cdot\vec{r}'} dxdy$$

$$\hat{E}(\vec{R}) = e^{jkR} \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}'} dxdy$$



Generalizando a difração (aulas anteriores...)

- Ainda para grandes distâncias, temos:



$$R' \approx R$$

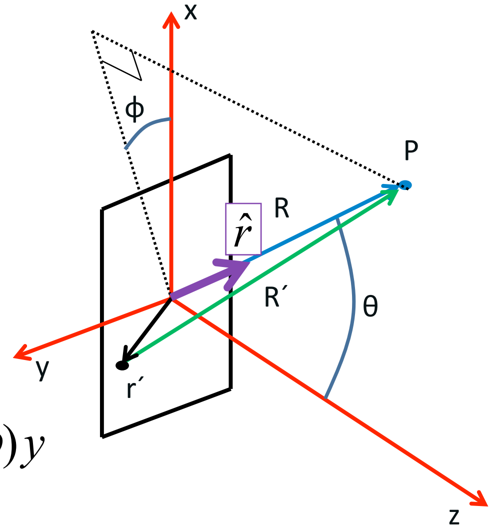
- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}'} dxdy$$

Campo Elétrico no ponto P

Generalizando a difração (aulas anteriores...)

- Quem é $\vec{k}\cdot\vec{r}$'?



$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\vec{k} = k\hat{r} = (k\sin\theta\cos\varphi)\hat{x} +$$
$$(k\sin\theta\sin\varphi)\hat{y} + (k\cos\theta)\hat{z}$$

- Assim:

$$\vec{k}\cdot\vec{r}' = (k\sin\theta\cos\varphi)x + (k\sin\theta\sin\varphi)y$$

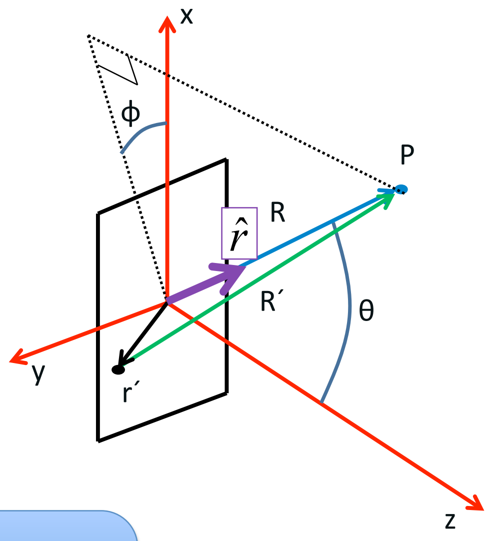
- Podemos ainda definir:

$$\begin{cases} k_x = (k\sin\theta\cos\varphi) \\ k_y = (k\sin\theta\sin\varphi) \end{cases} \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r}' = k_x x + k_y y$$

Generalizando a difração (aulas anteriores...)

- A expressão para o campo era assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R}\int E_0(r')e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}'}dxdy$$



- E agora pode ser escrita como:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R}\int E_0(x,y)e^{-j(k_x x+k_y y)}dxdy$$

Séries de Fourier

- A transformada de fourier em 2D

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm}e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)e^{-j(nx+my)}dxdy$$

- Difração de Fraunhofer:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R}\int E_0(x,y)e^{-j(k_x x+k_y y)}dxdy$$

Difração e transformada de Fourier

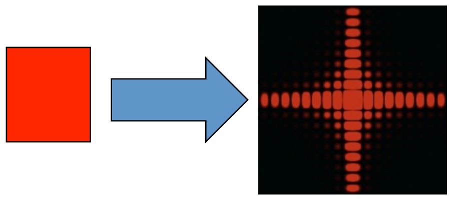
- **A figura de difração** está relacionada à **transformada de Fourier** do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x,y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

- **A intensidade luminosa** em uma dada posição está relacionada às **intensidades para cada freqüência espacial**

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow E(R_y, R_y) \rightarrow E(k_x, k_y)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \begin{cases} k_x = k \sin\theta \cos\phi \\ k_y = k \sin\theta \sin\phi \end{cases}$$



Até aqui, sem muitas novidades...

- Vimos nos outros experimentos que a fenda **altera a direção de propagação** do campo elétrico evanescente...
- E quanto a **Amplitude** e a **Fase** deste campo, são alterados?
- E se ao invés de uma fenda, colocássemos uma lente?

Colocando a lente no lugar da fenda...

- Se houver uma lente, o que interessa é o **campo transformado por ela**, ou seja:

$$E_0(x,y) \underset{LENTE}{\Rightarrow} \varepsilon(x,y)$$

A **função da abertura** é o campo incidente **transformado** pelo objeto/fenda/lente/etc onde ocorre a difração.

- A distribuição de **campo elétrico na figura de difração** de Fraunhofer é **a transformada de Fourier da distribuição do campo elétrico** na abertura.

$$\hat{E}(k_x,k_y) = \iint \varepsilon(x,y)\, e^{-j(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy$$

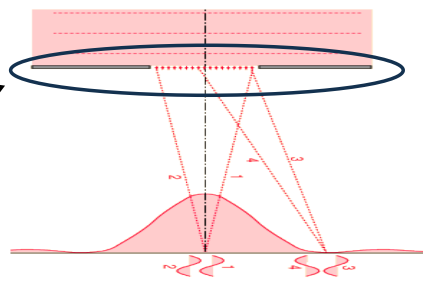
$$\varepsilon(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint E(k_x,k_y)\, e^{j(k_x x + k_y y)}\, dk_x dk_y$$

Exemplo: Fenda Simples

- Na fenda simples, temos apenas 1D

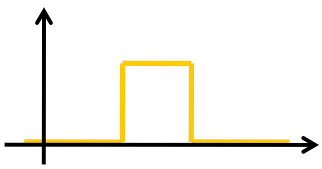
$$\hat{E}(k_x) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx$$

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int E(k) e^{jk_x x} dk$$



- A função da abertura de uma fenda simples é a onda quadrada!

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} E_0, \text{se} |x| < \dfrac{d}{2} \\ 0, \text{se} |x| > \dfrac{d}{2} \end{cases}$$



Exemplo: Fenda Simples

- Vamos fazer a integral da onda quadrada:

$$\hat{E}(k) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx \ = E_0 \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jk_x x} dx = E_0 \left[\frac{e^{-jk_x x}}{-jk_x} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

- Lembrando da notação complexa para o seno:

$$\hat{E}(k) = \frac{E_0}{k_x} \frac{\left(e^{+jk_x d/2} - e^{-jk_x d/2}\right)}{j} = 2\frac{E_0}{k_x} \sin(k_x d/2)$$

- Multiplicando e dividindo por ***d***, temos:

$$\hat{E}(k) = E_0 d \frac{\sin(k_x d/2)}{k_x d/2}$$

Vimos isso na última experiência

Exemplo: T.F.

- Será que **a posição** e **a intensidade** dos máximos são o que esperamos?

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2, \ \beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta$$

- Para os máximos SECUNDÁRIOS, ***sin(β)=±1***

$$\sin\beta = 1 \Rightarrow \ \beta = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}, m = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$$

Lembram da T.F. da onda quadrada ??

- E as posições são:

$$\boxed{\Rightarrow \sin\theta_{\max} = \pm\frac{\lambda}{2d}, \pm 3\frac{\lambda}{2d}, \pm 5\frac{\lambda}{2d}, \ldots \text{ para } m = 0,1,2,3,\ldots}$$

Exemplo: T.F.

- No entanto, a intensidade é:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2$$

- Portanto os máximos SECUNDÁRIOS ficam:

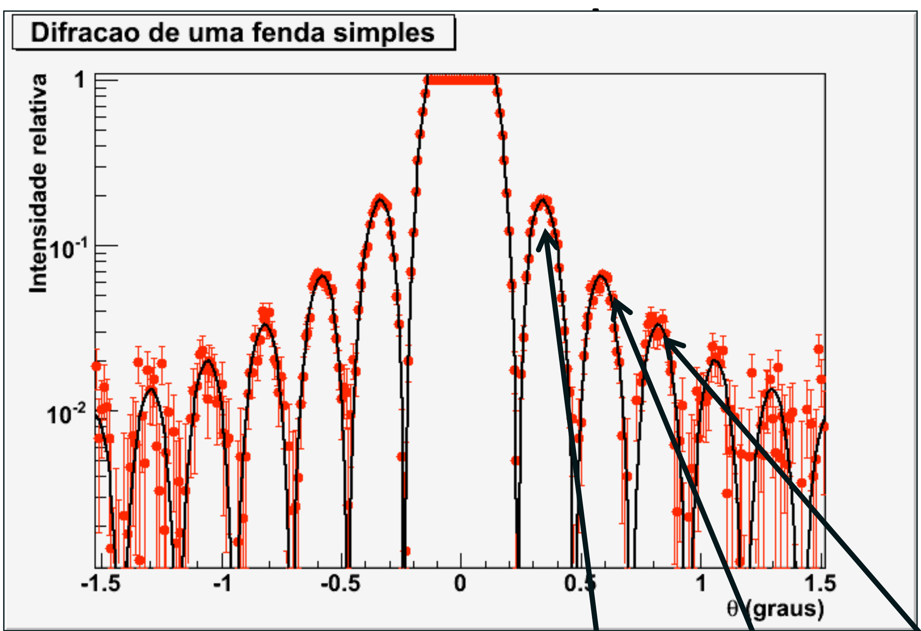
$$I(\theta_{max}) = \frac{I_0}{\beta^2} = \frac{1}{(2m+1)^2}\frac{4I_0}{\pi^2} = 1\frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{9}\frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{25}\frac{4I_0}{\pi^2}, \ldots$$

Cuidado que as ideias que estamos mostrando aqui server para o **E** e não a **I**

- Assim, o campo elétrico é:

$$\boxed{|\hat{E}| = \sqrt{I} \Rightarrow \frac{|\hat{E}|}{\sqrt{\frac{4I_0}{\pi^2}}} = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots}$$

Lembram da T.F. da onda quadrada ??



$$V(t) = V_0\left[\frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \ldots\right]$$

Slide de A. Suaide, Flex aula #9/2008s1

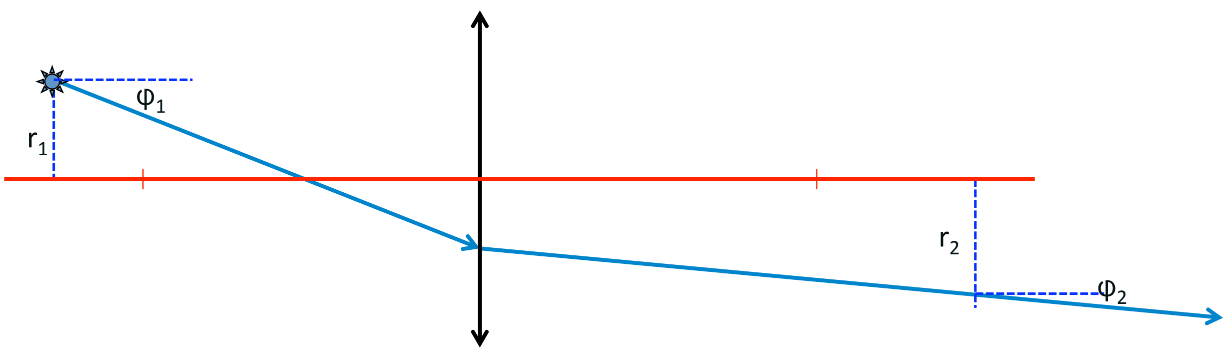
Computador ótico

- Então, como fazer a transformada de Fourier da imagem do nosso objeto macroscópico? (Acabamos de ver o caso da Fenda simples...)
- Sabemos que quando a imagem do objeto **passar pela lente**, do outro lado vai sair um $\boldsymbol{E(k_x,k_y)}$ que é a transformada de Fourier do $\boldsymbol{\varepsilon(x,y)}$.
- Para saber o que vai acontecer exatamente, é preciso considerar como a lente modifica a amplitude e a fase de $\boldsymbol{E_0}$ em cada ponto $\boldsymbol{(x,y)}$.
  - Vejam detalhes no site da Rice University, Physics 332, Fourier optics, seção C.

O que acontece é que a transformada de Fourier aparece no plano focal.

Lente simples

- Seja uma fonte pontual em um sistema óptico do tipo:



- Vamos relembrar como tratamos as lentes...

T.F. e o método matricial

- Seja uma transformação do tipo:

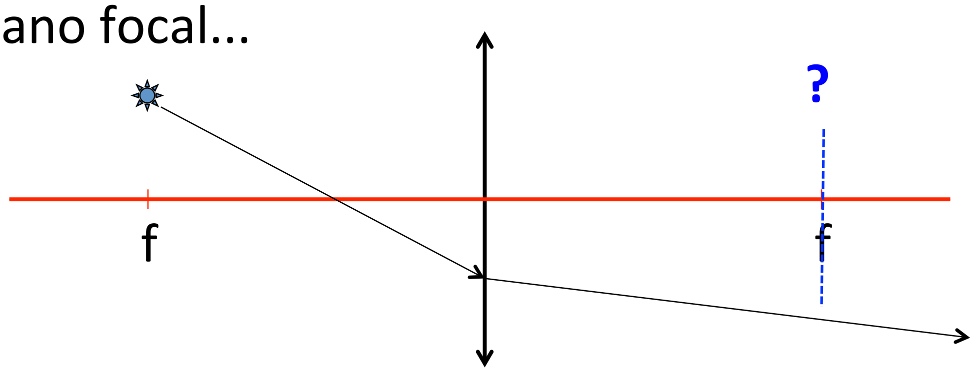
$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = Ar_1 + B\phi_1 \\ \phi_2 = Cr_1 + D\phi_1 \end{cases}$$

- Se **A = 0**, todos os raios de mesmo ângulo passam pelo mesmo ponto $\mathbf{r_2}$

- Se **D = 0**, todos os raios de mesmo ponto de origem emergem com o mesmo ângulo do sistema óptico.

Lente simples

- Agora vamos considerar uma fonte pontual no plano focal...



- O que acontece?

Calculando…

- A matriz de transformação é:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = f\phi_1$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{f} r_1$$

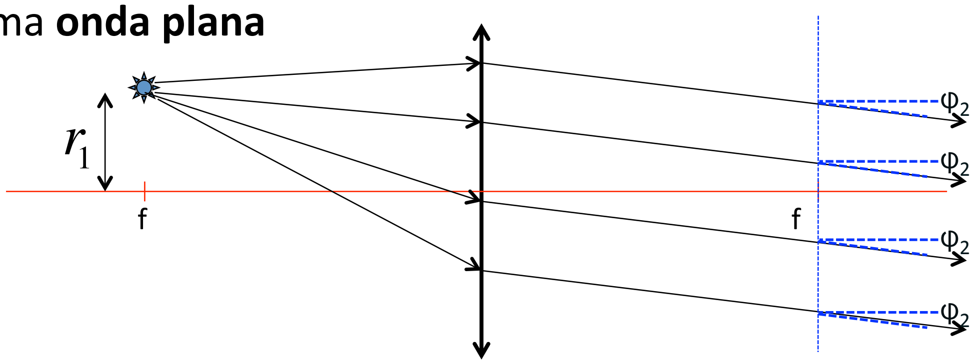
O **Ângulo** no qual o raio de luz emerge **depende apenas da posição da fonte**, ou seja, os **raios emergem paralelos → onda plana**

Lente simples

- Fonte pontual no plano focal.
  - Todos os raios emergem com o mesmo ângulo → saída é uma **onda plana**

$$r_2 = f\phi_1$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{f} r_1$$



  - O que está acontecendo? **Porque um fonte pontual se transforma em uma onda plana**??

Uma T.F. importante

- Um fonte pontual é uma função delta:

$$f(r)=\delta(r-b)$$

- Cuja transformada de fourier é:

$$FT\{\delta(r-b)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(r-b)e^{-2\pi irk}\,dr=e^{-2\pi ibk}$$

- Conseqüentemente, **a transformada de Fourier** de **uma onda plana** será uma **função delta**!

Onda plana

- Onda plana de direção bem definida (não necessariamente no eixo óptico do sistema)

$$E=e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=e^{ikr\sin\phi}\sim e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r\phi}=e^{2\pi i\mu r},\ \mu=\frac{\phi}{\lambda}$$

Atenção com que é **r** e **φ** !!

tem dimensão de freq: é a frequência espacial

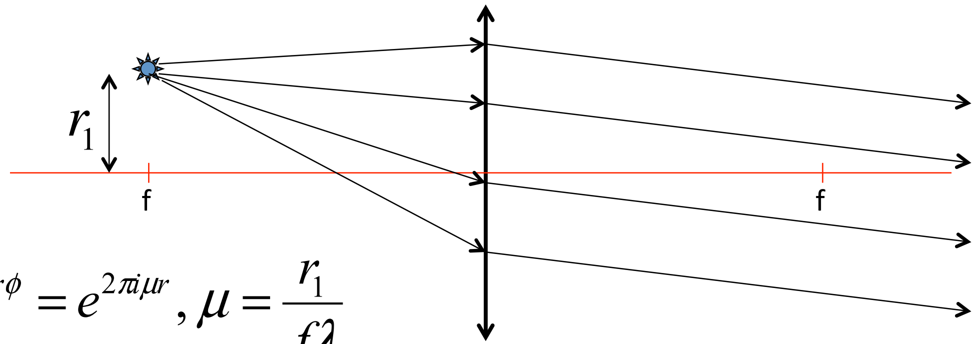
- A transformada de fourier é:

$$FT\{e^{2\pi i\mu r}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i\mu r}e^{-2\pi ikr}\,dr=\delta(\mu-k)$$

a transformada de Fourier de uma onda plana é uma função delta

Lente simples

- **Fonte pontual** no **plano focal**: a lente está fazendo a transformada de fourier!



$$E = e^{ikr\phi} = e^{2\pi i\mu r}, \mu = \frac{r_1}{f\lambda}$$

NOTA: colocamos todas as distâncias=f, por isso aparece a transformada de fourier exata. Se um deles fosse diferente, apareceria uma **fase**. Como estamos medindo apenas a amplitude, não vemos isso no lab!

O reverso de aplica

- Se um conjunto de raios paralelos atinge uma lente em um ângulo bem definido, eles se cruzam no plano focal de tal modo que essa posição vale:

$$r_2 = f\lambda\mu = f\phi_1$$

- Como **m** é uma freqüência espacial, tem dimensão de **1/[L]**, de tal forma que **1/m** tem dimensão de **[L]** e podemos escrever:

$$\lambda\mu = \phi_1 \Rightarrow \frac{\lambda}{d} = \phi_1 \Rightarrow d\phi_1 = \lambda$$

Finalmente...

- A equação de primeira ordem de um objeto difrator é

$$d\phi_1 = \lambda$$

Lembrar da equação:

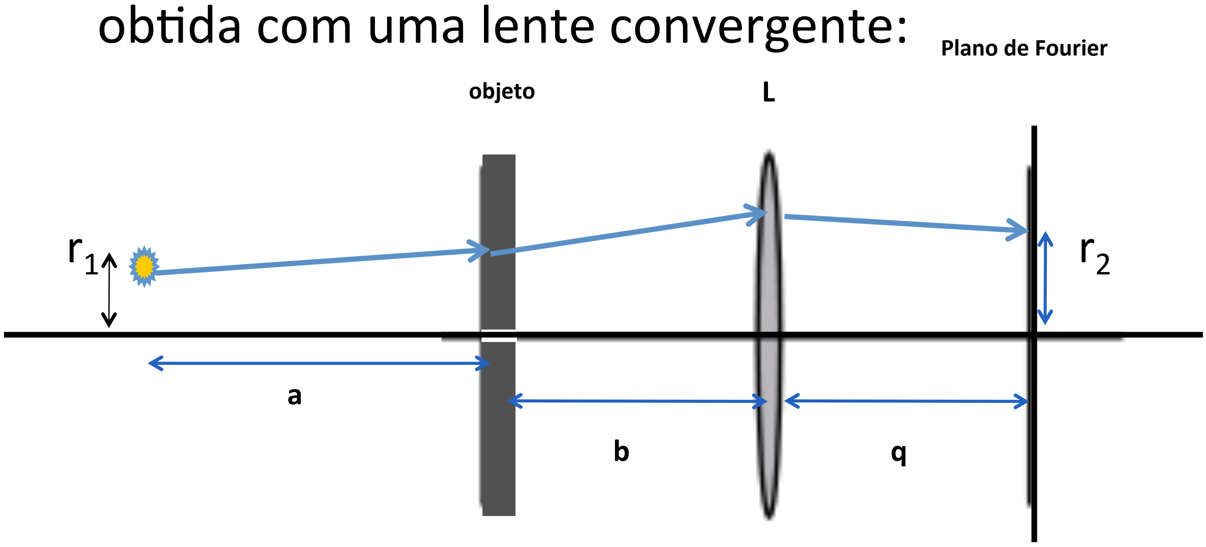
$$d sen\theta = m\lambda$$

onde **d** é uma dimensão característica do objeto difrator

- Como o padrão de difração corresponde à transformada de Fourier (no campo elétrico), <u>a lente funciona como um elemento que permite obter essa TF</u>.

Generalizando...

- Iluminando o objeto com uma fonte pontual qualquer vamos calcular onde se situa TF obtida com uma lente convergente:

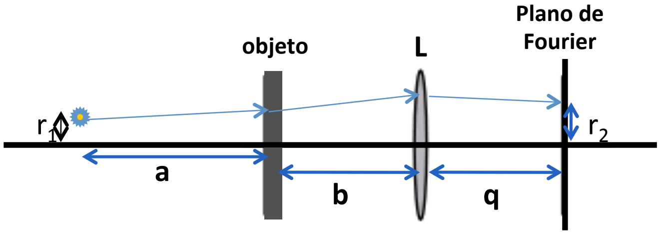


Generalizando…

- Iluminando o objeto com uma fonte pontual qualquer
- A matriz de transformação é:

$$r_2 = \left(1-\frac{q}{f}\right)r_1 + \left(a+b-\frac{aq}{f}-\frac{bq}{f}+q\right)\varphi_1 + \left(b+q-\frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} + \left(-\frac{a}{f}-\frac{b}{f}+1\right)\varphi_1 + \left(1-\frac{b}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$



Generalizando…

- **r_2** deve ser independente de φ_1

$$a+b-(a+b)\frac{q}{f}+q=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f}=\frac{1}{q}+\frac{1}{a+b}$$

- Se a **fonte está no infinito**, ou seja, o objeto está **iluminado por uma onda plana**:

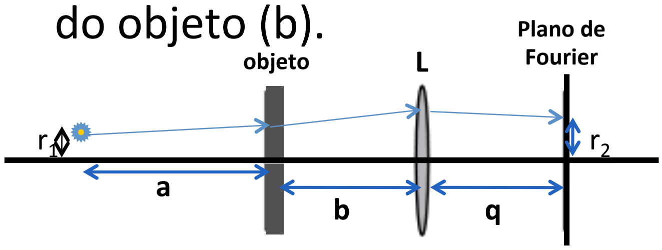
$$a\to\infty \Rightarrow \frac{1}{f}=\frac{1}{q}+\frac{1}{a+b} \Rightarrow q=f$$

Posição do plano de fourier

- A posição do plano de Fourier de uma lente depende tanto da posição da fonte (**a**) quanto do objeto em relação a lente (**b**).

$$\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a+b}}$$

- Caso a fonte esteja no infinito (ou seja, atingem o objeto **Raios Paralelos**), o plano de Fourier encontra-se na distância focal da lente e **INDEPENDE** da posição do objeto (b).



$$\boxed{q = f}$$

"Tamanho" da transformada

- Se a fonte está no eixo óptico, a posição de convergência dos raios é:

$$r_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

- Substituindo a expressão para a distância focal, temos:

$$r_2 = \left(\frac{qa}{a+b}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

- Se o objeto esta na distância focal, **b=f**, e:

$$r_2 = f\frac{m\lambda}{d}$$

O Que iremos fazer?

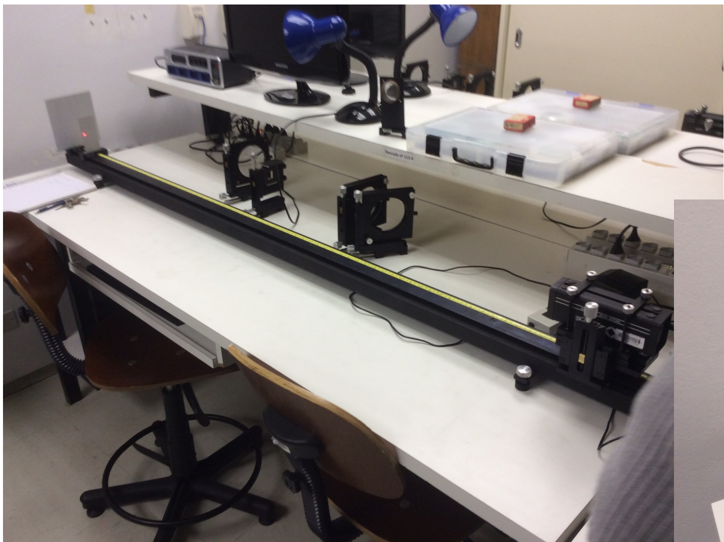
Estudar uma lente convergente realizando uma tranformada de Fourier
Medir a distância entre as linhas de uma rede de difração

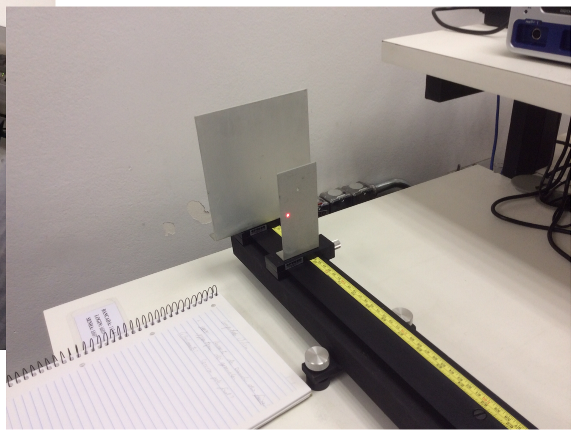
Arranjo experimental

- Laser e orifícios para alinhamento
- Lentes (para mudar o diâmetro do laser) e fazer a transformada
- Objeto (grades quadriculadas) e anteparos

Arranjo experimental - Alinhamento

- Antes de começarmos o experimento em si, devemos alinhar **TODO** o sistema ótico.
    - Atençao esse processo pode ser longo!!

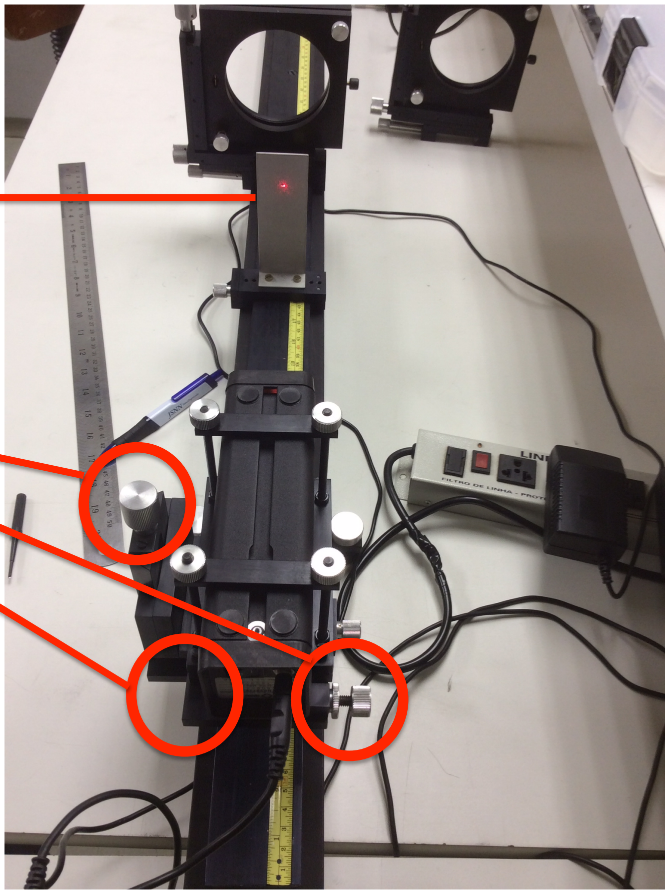




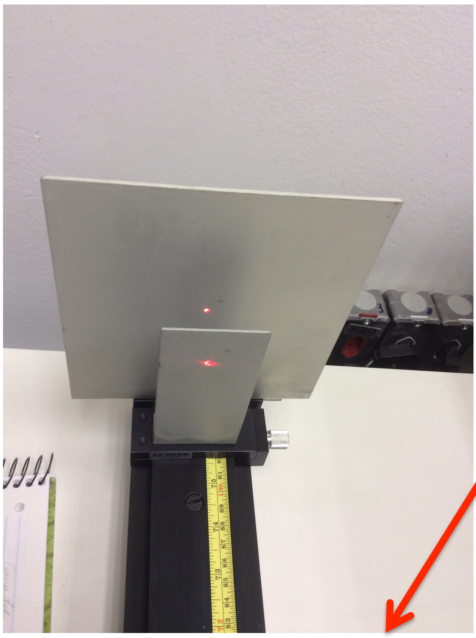
Arranjo experimental

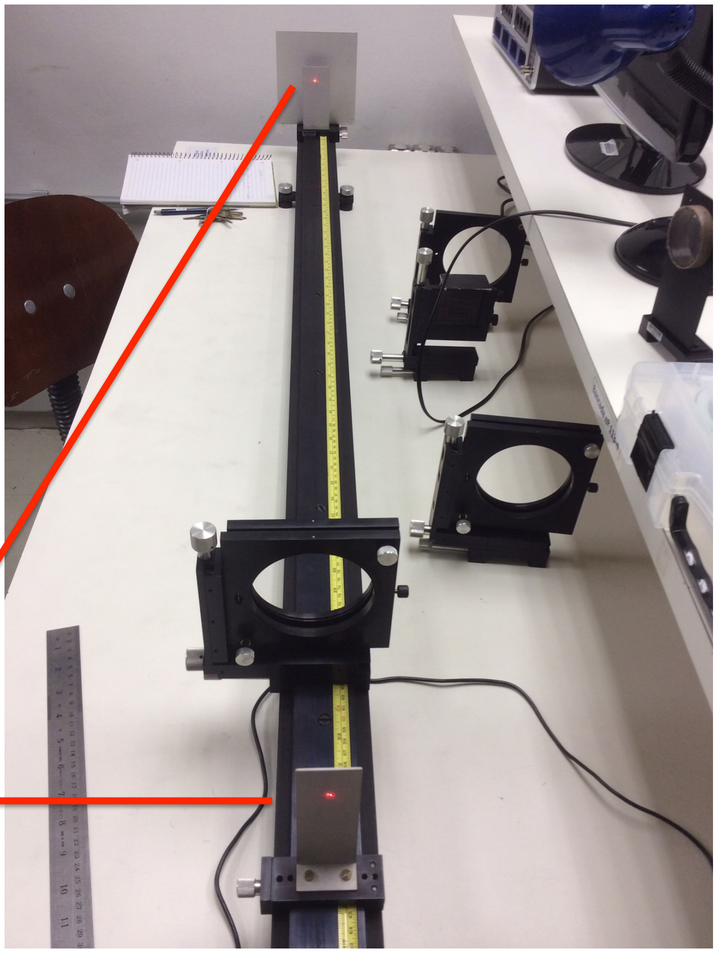
Anteparo com orifício para auxiliar no alinhamento

Parafusos que controlam a base onde o Laser está fixado



Arranjo experimental



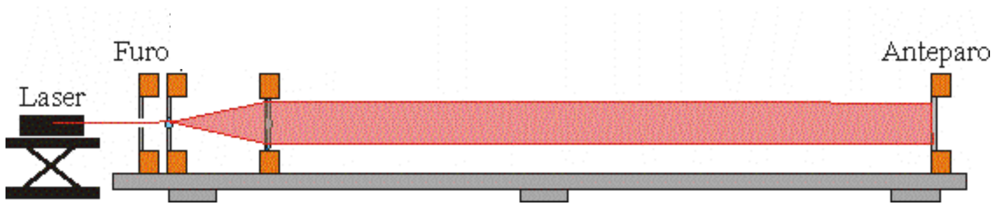


O Feixe passa por esses dois orifícios: O sistema está alinhado!!

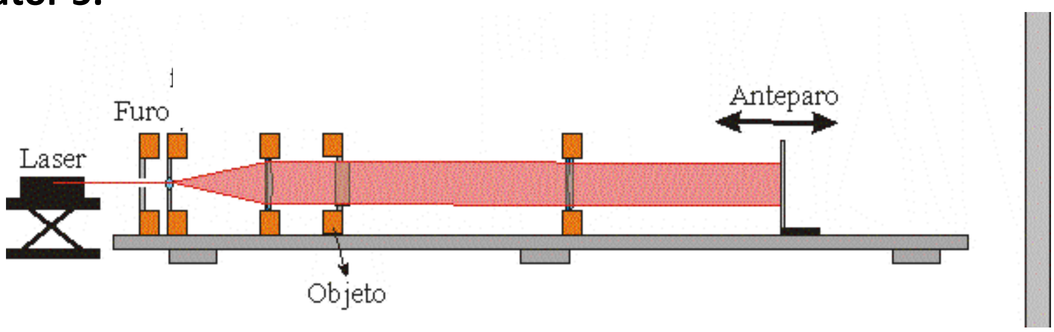
Arranjo experimental –
Como aumentar o diâmetro do feixe?

O Que deve compor esse "Sistema Ótico", de modo que o feixe do laser seja Ampliado por um fator 5 e paralelo?
DICA: Use o Método Matricial

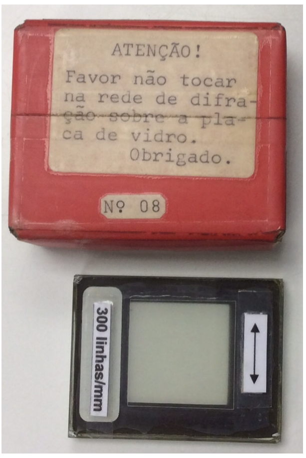
Arranjo experimental –
Iluminando a Rede de Difração

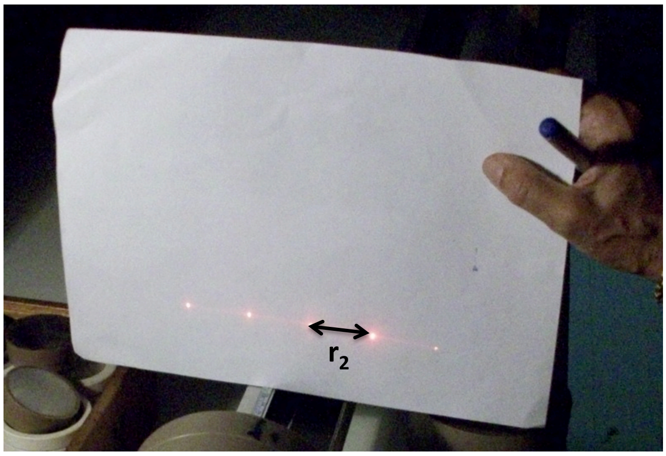


Atenção: Você deve aumentar o diâmetro do feixo por um fator 5.



Arranjo experimental – Iluminando a Rede de Difração





Questões do Experimento IV

1. **Discuta as peculiaridades do arranjo experimental utilizado neste experimento, em especial os cuidados tomados no aumento do diâmetro do laser e sua divergência, antes e após o aumento do seu diâmetro.**
2. Que argumentos podem ser utilizados para mostrar que uma lente convergente realiza uma transformada de Fourier do objeto?
3. **Em óptica geométrica vimos que a imagem está conjugada ao objeto por meio da equação de Gauss. A que está conjugado o plano de Fourier? O que nele se observa? Tais observações estão de acordo com o previsto pelo formalismo matricial?**
4. O que se observa se o anteparo é deslocado um pouco além ou aquém do Plano de Fourier?
5. **Faça uma comparação entre o que estudamos em análise de Fourier aplicada a circuitos e o que estamos estudando agora na filtragem espacial. Associe esses elementos às noções básicas de processamento de imagens.**

Arranjo experimental – Iluminando a Rede de Difração

- Ilumine o objeto, com o feixe paralelo (fonte no ∞):
  - Use a rede de difração de 300 linhas/mm como objeto
- Identifique o plano de Fourier q=f
- Verifique que a posição do plano de Fourier não depende da posição do objeto em relação à lente
  - Faça pelo menos 3 medidas
- A partir das medidas das posições dos máximos (r_2 obtido com papel milimetrado), da transformada de Fourier, determine as dimensões da grade e compare com o valor nominal de 300 l/mm. Use esses valores nas suas respostas.