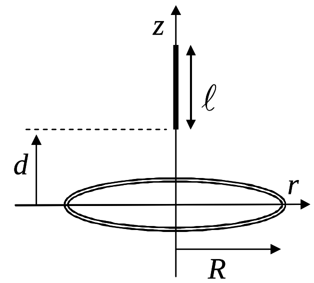
P1, 2014,

Q1A. Considere um anel de raio R e uma barra de comprimento ℓ ao longo de seu eixo, e a uma distância d do plano do anel, como mostra a figura. Em todas as situações seguintes, suponha R = ℓ = d. Suponha que tanto o anel como a barra sejam condutores e se coloquem quatro elétrons no anel e apenas um na barra. Considerando que estas cargas se localizarão em posições de melhor equilíbrio.



(a.1) (0,5) Calcule a densidade linear <u>média</u> de carga no anel, supondo R = 10cm;
(a.2) (0,5) Calcule a expressão da força total que o anel vai exercer sobre a barra para um raio genérico R.

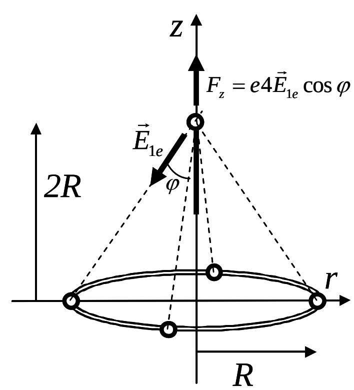
Q1B. Suponha agora que tanto o anel como a barra sejam isolantes e no anel seja colocada uma densidade linear e uniforme de carga α_1 e na barra outra α_2, também uniforme. Nessas condições

(b.1) (0,5) Determine a expressão para o <u>potencial elétrico</u> criado pelo anel ao longo de seu eixo, em função da coordenada z;
(b.2) (1,0) Usando o resultado do ítem (b1), calcule a força total que o anel exerce sobre a barra.

Soluçao+++

a1) $\lambda = \dfrac{q}{2\pi R} = \dfrac{4\times(-1{,}6\times10^{-19})}{2\pi\left(10\times10^{-2}\right)} = -1{,}0\times10^{-18}\ \text{C/m}$

a2) Cargas iguais se repelem e buscam posições o mais longe possível uma da outra conforme a figura.



$$E_{1e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{(2R)^2+R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{5R^2}$$

$$F_z = eE_z = e4E_{1e}\cos\varphi = 4e\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{5R^2}\frac{2R}{\sqrt{5}R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8e^2}{5\sqrt{5}R^2}\ \text{N}$$

b1) $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\alpha_1(2\pi R)}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}$

b2) $E_z = \left(-\nabla V\right)_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = -\dfrac{\alpha_1(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{-1}{2}\right)\dfrac{2z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} = \dfrac{\alpha_1(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$

b2) $dF = E(z)dq = E(z)\alpha_2 dz$

$$F_z = \frac{\alpha_1\alpha_2(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{2R}\frac{zdz}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{\alpha_1\alpha_2(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]_R^{2R} = \frac{\alpha_1\alpha_2(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}R}+\frac{1}{\sqrt{2}R}\right)$$

$$F_z = \frac{\alpha_1\alpha_2(2\pi)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)$$

Q2. Considere uma carga pontual, Q, localizada na origem do sistema de coordenadas conforme a Figura 1.

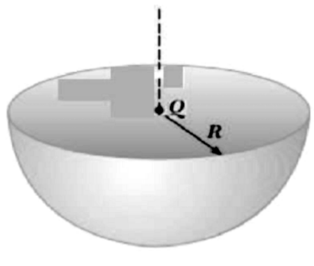


Figura 1

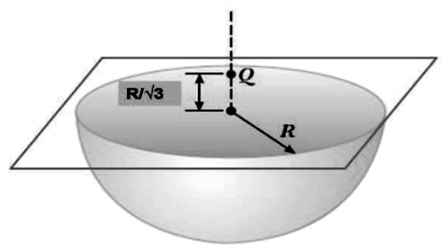


Figura 2

(a) (0,5) Calcule o fluxo do campo elétrico produzido pela carga Q através da metade inferior da superfície esférica de raio R centrada na carga, como mostra a figura 1.

Suponha agora que a carga seja deslocada verticalmente para a posição $z = R/\sqrt{3}$, como indicado na figura 2.

(b) (0,5) Indique a expressão do campo elétrico E na borda equatorial da superfície esférica anterior, ou seja, em $r = R$ e $z = 0$.

(c) (1,0) Calcule o novo fluxo do campo elétrico através da mesma metade inferior da superfície esférica, com a carga em sua nova posição.

(d) (0,5) Determine o fluxo do campo elétrico através da tampa circular da metade inferior da superfície esférica

Solução===

Solução:

a) Como a carga está no centro da esfera podemos calcular o fluxo do campo elétrico através de uma esfera completa e depois dividir por 2.

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\,d\vec{A} = E\oint dA = E2\pi R^2 = \frac{2\pi R^2 Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}$$

b) Campo elétrico

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+R^2/3\right)} = \frac{3Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}$$

c) Usando a resposta do item (d), o fluxo através da tampa é o mesmo que o através da superfície semi-esférica inferior. Uma vez que só a componente z do campo importa, isto é

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R/\sqrt{3}}{\left(r^2+\frac{R^2}{3}\right)^{3/2}}$$

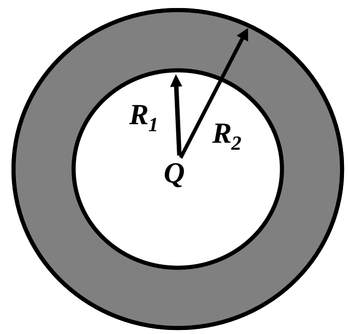
O fluxo será dado por

$$\phi = 2\pi\int_0^R E_z r dr = 2\pi\frac{Q\, R/\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\left(r^2+\frac{R^2}{3}\right)^{3/2}} *$$

$\phi = Q/4\varepsilon_0$

===

Q3. Considere duas esferas metálicas condutoras concêntricas, com raios R_1 e R_2. Entre as esferas há um meio dielétrico condutor com constante dielétrica κ e resistividade ρ. Uma fonte externa aplica uma diferença de potencial V constante entre as esferas.



(a) (0,5) Mostre que a expressão para o vetor $\vec{D}$ entre as esferas deve ser da forma $\vec{D} = \sigma\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)$, onde σ é uma constante.

(b) (0,5) Usando o resultado do ítem (a) e dado que o potencial $V = -\int \vec{E}.d\vec{r}$ é mantido por uma fonte externa obtenha uma expressão para σ em função de R_1, R_2 e V

(c) (0,5) Determine a expressão para o vetor polarização $\vec{P}$.

(d) (0,5) Determine a expressão para a densidade de corrente $\vec{j}$ através do meio entre as esferas metálicas.

(e) (0,5) Determine a resistência equivalente desta configuração.

================

Solução

(a) O fluxo do campo $\vec{D}$ só depende da carga total acumulada no condutor esférico interno. Portanto, levando em conta a simetria esférica, temos

$$\int \vec{D}\cdot d\vec{S} = q \Rightarrow 4\pi r^2 D = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Como a carga interna vai estar sobre uma esfera condutora, ela se localizará como uma densidade de carga superficial, isto é, $q = 4\pi R_1^2$. Então

$$D = \sigma \frac{R_1^2}{r^2}$$

(b) $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{D}{\epsilon_0 k} dr = \frac{\sigma R_1^2}{\epsilon_0 k} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma R_1^2}{\epsilon_0 k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \therefore \sigma = \frac{\epsilon_0 k R_2 V}{R_1 (R_2 - R_1)}$

(c) $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E} = k\epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (k-1)\epsilon_0 \vec{E} = \frac{(k-1)}{k} \vec{D} \Rightarrow P = \frac{(k-1)}{k} \sigma \frac{R_1^2}{r^2}$

(d) $\vec{E} = \rho \vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{k\epsilon_0 \rho} \sigma \frac{R_1^2}{r^2} \hat{e}_r$

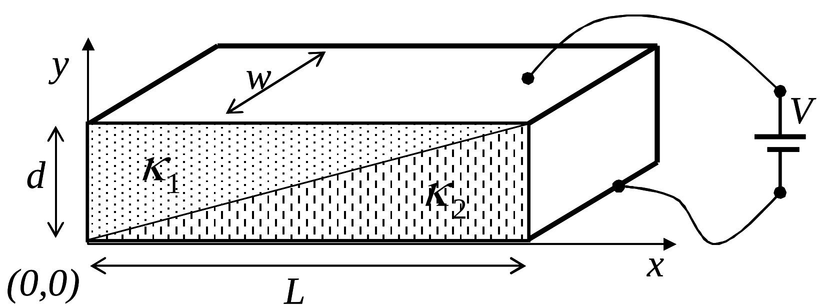
(e)

$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{s} = \frac{R_1^2 \sigma}{k\epsilon_0 \rho} \frac{1}{r^2} \times 4\pi r^2 =$

$\frac{4\pi R_1^2}{k\rho} \frac{k R_2 V}{R_1 (R_2 - R_1)} \Rightarrow V = \rho \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2} I \therefore R_{equiv} = \rho \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2}$

================

Q4. Considere o capacitor de placas condutoras planas e paralelas mostrado na figura. Entre suas placas estão duas cunhas de materiais dielétricos distintos, com constantes dielétricas κ_1 e κ_2 . A interface entre essas cunhas é plana. Suponha que d<<L e d<<w, de modo que efeitos de borda do capacitor podem ser desprezados.



a) (0,5) Sabendo que em cada placa condutora, o potencial tem que ser constante, argumente porque as cargas de polarização, nos dielétricos entre as placas, fazem com que a densidade de carga superficial de cargas livres, σ, não seja uniforme, variando com a coordenada *x*.

(b) (0,5) Supondo válida a aproximação de placas paralelas e considerando que em cada extremidade há um único dielétrico, o campo elétrico em x=0 e em x=L, pode ser escrito como $E = V/d$. Calcule as densidades de carga livre nas extremidades, σ(x=0) e σ(x=L) (Lembre-se que, no capacitor, D= σ).

(c) (0,5) Considerando os resultados acima, determine as expressões para os coeficientes *a* e *b* da seguinte expressão para a densidade superficial de carga na placa positiva do capacitor, σ(x) = a + bx.

(0,5) d) Determine a expressão para a capacitância do arranjo, C = V/Q em função das dimensões geométricas e das constantes dielétricas.

(0,5) e) Determine a expressão para a energia U armazenada no capacitor.

==

Solução:

a) As cargas de polarização vão aparecer nas superfícies dos dielétricos e as que estão próximas às placas do capacitor atrairão as cargas livres. Como as cargas de polarização são diferentes nos dois dielétricos, seus efeitos também serão diferentes. Como a proximidade delas das placas varia linearmente com a coordenada x, esperamos que também as cargas livres nas placas varie linearmente.

b) $x = 0$: nesta posição só há o meio dielétrico com constante dielétrica k_1; portanto,

$$\sigma(x=0) = D(x=0) = k_1\epsilon_0\frac{V}{d}$$

Da mesma forma, em $x = L$ só há o meio com constante dielétrica k_2 e

$$\sigma(x=L) = D(x=L) = k_2\epsilon_0\frac{V}{d}$$

c) $$\sigma(x) = a + bx \Rightarrow a = k_1\epsilon_0\frac{V}{d}; a + bL = k_2\epsilon_0\frac{V}{d} \therefore b = (k_2 - k_1)\epsilon_0\frac{V}{dL}$$

d) $$Q = w\int\sigma dx = w\frac{V}{\epsilon_0 d}\left[\int_0^L [k_1 + (k_2 - k_1)\frac{x}{L}\right] dx =$$

$$= w\frac{\epsilon_0 V}{d}\left(k_1 L + (k_2 - k_1)\frac{L}{2}\right) = \frac{\epsilon_0 w L}{d}\frac{k_1 + k_2}{2}V$$

Portanto $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 w L}{d}\frac{k_1 + k_2}{2}$

e) U = $\frac{1}{2}CV^2$

===