LES 201
Matemática Aplicada à Economia

Aulas 8 e 9

Estática Comparativa

Márcia Azanha Ferraz Dias de Moraes

Análise Estática Comparativa

Comparação de diferentes estados de equilíbrio

– diferentes conjuntos de valores dos parâmetros e variáveis exógenas

Equilíbrio Inicial	VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS e/ou DAS VARIÁVEIS EXÓGENAS	Equilíbrio Final
P_0, Q_0	------------------→	P_1, Q_1
ou		
Y_0, C_0	------------------→	Y_1, C_1

Como o novo equilíbrio se compara com o antigo?

Análise Estática Comparativa

Estática comparativa:

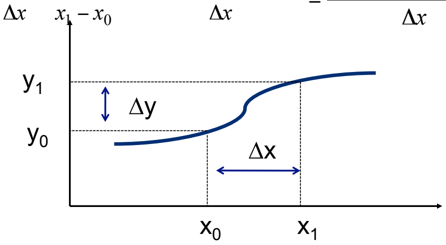
- Não se considera o *processo* de ajustamento
- Compara-se o *valor inicial* com o *valor final*

$$\textbf{\textit{Análise}}\begin{cases}\textbf{\textit{qualitativa}}: \text{direção mudança}\\[2ex] \textbf{\textit{quantitativa}}: \text{grandeza da mudança}\end{cases}$$

Taxa de Variação e Derivada

Uma função *y* tem sua variação *Δy* calculada para um dado intervalo Δx da seguinte forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Taxa Média de Variação ou Quociente Diferencial

Ex: $y = 3x^2 - 4$

Taxa Média de Variação (ou quociente diferencial)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_o) =$$

$$f(x_o + \Delta x) =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x)}{\Delta x} =$$

A Derivada de uma função

Quando se está interessado na taxa de variação de *y* quando *Δx* é muito pequeno, o quociente diferencial é chamado de *derivada*

- A derivada $\frac{dy}{dx}$ é definida como o limite do quociente diferencial $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero (Δx → 0)

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \boldsymbol{f'(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

A Derivada de uma função

Para o exemplo anterior:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6x_0 + 3\Delta x) = 6x_0 = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$f'(x)$ *é a FUNÇÃO DERIVADA de* $f(x)$

$f(x)$ *é a FUNÇÃO PRIMITIVA de* $f'(x)$

Dada a função primitiva $f(x)$ *sua derivada é denotada por:*

$$f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interpretação Geométrica da 1ª. derivada

- A primeira derivada de uma função num ponto é a declividade da função neste ponto
- A declividade *m* de uma reta é definida como a tangente do seu ângulo de inclinação, ou como a taxa de variação da distância vertical Δy relativamente à variação da distância horizontal Δx à medida que se move ao longo da reta

$$m = \tan\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interpretação Geométrica

Seja $y=x^2$

a) Calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Interpretação Geométrica

Seja $y=x^2$

Calcule $f'(x) =$

Interpretação Geométrica

c) Obtenha a equação da reta tangente à função $y=x^2$ para $x_0=2$

c.1) Coeficiente angular da reta

c.2) reta passa por $x=2$

Para $x=2$, $y=x^2= 4$. Portanto, o ponto (2,4) pertence à reta

Interpretação geométrica

- A 1a. Derivada em relação a *x* geralmente é outra função de *x*, que deve ser estimada para valores particulares

→ As curvas não têm as mesmas declividades em diferentes pontos (com exceção para as retas)

Ex: $y=x^2$, calcule a reta tangente ao ponto $x = 3$

Aplicações da 1a. Derivada em Economia

Funções Marginais: estudo das taxas de variações das variáveis econômicas

- O economista está preocupado :
  - Com o valor do Produto Interno Bruto (PIB), e
  - Com as taxas de Variação do PIB
- O produtor não está preocupado somente com o Custo Total correspondente a certo nível de produção, mas quer saber sua taxa de variação quando variar a quantidade produzida

⇒ Análise Marginal

Aplicações da 1a. Derivada em Economia

Dada a função primitiva:

y = f(x), que representa a função total

y´= f´(x) = a função derivada é sua função marginal

→ Ambas podem ser representadas graficamente como funções de x

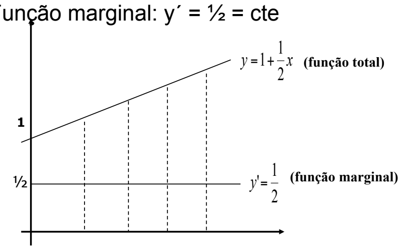
→ Para cada valor de x, a *função marginal* deve mostrar a *inclinação da curva função total para o valor de x*

(dada a correspondência entre a derivada da função e a inclinação de sua curva)

Representação Gráfica
Função primitiva Linear

Função total: y = f(x) = 1 + ½ x

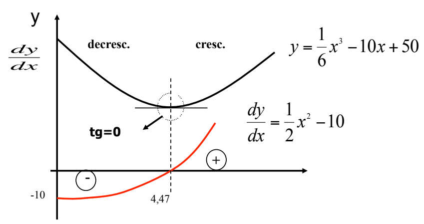
Função marginal: y´ = ½ = cte



Representação Gráfica - Função Primitiva Cúbica

Função total: y = f(x) = 1/6 x^3 – 10x + 50

Função marginal: y´(x) = ½ x^2 - 10



Representação Gráfica
Função Primitiva Não Linear

Função primitiva não linear:

→ *negativamente inclinada*

gera função marginal que se situa *abaixo* do eixo horizontal

→ *positivamente inclinada*

gera função marginal que se situa *acima* do eixo horizontal

Função Custo Marginal

Seja a função Custo Total de uma mercadoria, que representa o custo para se produzir x unidades da mercadoria:

C = C(x)

Função *Custo Marginal*: é o custo adicional da produção de *uma unidade adicional* do bem x, para dado nível de produção.

→ O custo marginal é *a taxa de variação da função custo total em determinado ponto*

Função Custo Marginal

A função *Custo Marginal C´(x)* é a *derivada* da função *Custo Total* correspondente.

$$Cmg = \frac{dCT(x)}{dx} = C'(x)$$

Função Custo e CMg - Exemplos

Uma empresa produz calculadoras, sendo que o custo para produzí-las é:

$$C = C(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}08x^2 + 40x + 5000$$

a) Qual a função custo marginal?

b) Qual o custo marginal quando x = 200; x = 300; x = 400 e x = 600 unidades?

C´(200) =
C´(300) =
C´(400) =
C´(600) =

Função Custo e CMg - Exemplos

c) Interpretação dos resultados

O custo adicional para se produzir:

- a 201 calculadora = R$ 20
- a 301 calculadora é = R$19
- a 401 calculadora é = R$24
- a 601 calculadora é = R$52

Custo adicional + elevado:

- Custo horas extras
- Custos manutenção (stress equipamentos, etc)

Função Custo Médio

Seja C(x) o custo total envolvido na produção de x unidades de certo bem.

- O *Custo Médio* para se produzir x unidades do bem é obtido dividindo-se o Custo Total de Produção pelo número de unidades produzidas.

$$\bar{C}(x) = CMe(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Qual a taxa de variação do Custo Médio?

$$CMeMa = \frac{dCme}{dx}$$

Função Custo Médio

Qual a taxa de variação do Custo Médio?

A derivada CMe´(x) da função Custo Médio, chamada *Função Custo Médio Marginal*, mede a taxa de variação da função custo médio com relação ao número de unidades produzidas

Ex:

a) Qual a fç custo médio do exemplo anterior?

CT = $0{,}0001x^3 – 0{,}08x^2 + 40x + 5000$

CMe =

Função Custo Médio

b) Qual a função Custo Médio Marginal?

c) Qual seu valor para x = 500?

A derivada e a inclinação da curva

Dada uma função Custo Total

C = f(Q) ,   onde *C* = Custo total e *Q* = Produção

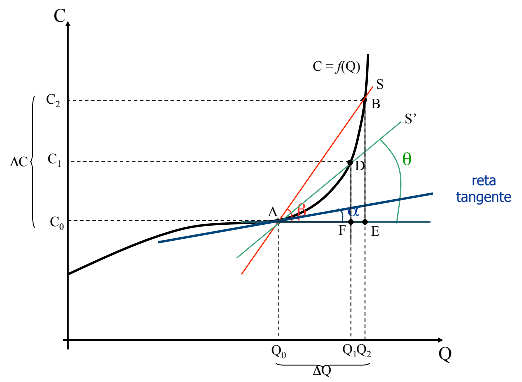
- O *Custo Marginal* é definido como a variação no Custo Total resultante da produção de uma unidade adicional:

$$Cmg = \frac{\Delta C}{\Delta Q}$$

Para produtos que admitem:

- somente variáveis discretas, uma variação de 1 unidade é a menor possível
- Variáveis contínuas, ΔQ refere-se a uma variação infinitesimal

$$CMg = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q}$$



Regras de Derivação/Diferenciação

Problema central da Estática Comparativa:

– determinação de uma taxa de variação:
  – Achar a derivada da função *y = f(x)*, para uma variação muito pequena em x

Ainda que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Não é necessário passar pelo cálculo do limite quando buscamos a derivada de uma função
- Existem regras de diferenciação que permitem obter as derivadas diretamente

Regras de Derivação/Diferenciação

Regras de derivadas de funções polinomiais

1. Função constante

$$y = f(x) = k$$

$$f'(x) = 0$$

- A derivada de uma função constante é igual a zero
  – Faz sentido: se a derivada indica a taxa de variação de uma função, e a função constante não varia ... sua derivada tem que ser zero!
  – Geometricamente, a derivada de uma função constante é uma linha horizontal (inclinação igual a zero) em toda a extensão da função

Regras de Derivação/Diferenciação

Regras de derivadas de funções polinomiais

2. Função polinomial de graus superiores

$$y = f(x) = c.x^{n}$$

$$f'(x) = c.n.x^{n-1}$$

Exemplos:

a) $y = x^7$

b) $y = 8x^6$

c) $y = x^{-4}$

Regras de Derivação/Diferenciação

2. Função polinomial de graus superiores

Note que, para cada valor de x, o valor de f´(x) é diferente. Exemplo:

$y = x^9$

$y' = 9x^8$

$$\begin{cases} x = 1 & \text{a derivada no ponto é } 9(1^8) = 9 \\ x = 2 & \text{a derivada no ponto é } 9(2^8) = 2304 \end{cases}$$

Regras de Derivação/Diferenciação

2. Função polinomial de graus superiores

De forma mais geral:

$y = [f(x)]^n$

$y' = n\,[f(x)]^{n-1} f'(x)$

Exemplo: $y = (3x^2 + 2x + 5)^3$

Regras de Derivação/Diferenciação

2. Função polinomial de graus superiores

$y = (3x^2 + 2x + 5)^3$

$Chamando: z = 3x^2 + 2x + 5y \quad \rightarrow \quad y = z^3$

$Usar\ Regra\ da\ Cadeia: \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$

$y = z^3 \rightarrow \frac{dy}{dz} = 3z^2 \quad Substitui\ o\ valor\ de\ z \quad \rightarrow 3(3x^2 + 2x + 5)^2$

$z = 3x^2 + 2x + 5 \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = (6x + 2)$

$Resposta: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 3(3x^2 + 2x + 5)^2(6x + 2)$

Regras de Derivação/Diferenciação

3. Função logarítmica

3.1 Função logarítmica de base e (neperiana)

$y = \ln x = \log_e x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

3.2 Fç logarítmica genérica

$y = \log_b x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \,.\, \ln b}$$

Regras de Derivação/Diferenciação

3. Função logarítmica

3.3 Função logarítmica geral

$y = \log_b f(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x) \,.\, \ln b}$$

Regras de Derivação/Diferenciação

4. Função Exponencial

4.1 – Função exponencial base e

$y = e^x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^x$$

4.2 – Função exponencial base genérica

$y = b^x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = b^x \ln b$$

Regras de Derivação/Diferenciação

4.3 – Função exponencial genérica

$y = b^{f(x)}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = b^{f(x)} \ln b\, f'(x)$$

Exercícios

Achar as derivadas das seguintes funções:

1) $y = e^{rt}$

2) y = ln (at)

3) $y = \log_{10} t^c$

Propriedades derivadas

1. Soma/Diferença: a derivada de uma soma (diferença) é a soma (diferença) das derivadas

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Exemplos

a) $y = 5x^4 + 22x^3 + 91x + 10$

$y' = 20x^3 + 66x^2 + 91$

b) $y = 5x^3 - 10x^{-1} + 50$

$y' = 15x^2 - (-10)x^{-2} = 15x^2 + 10x^{-2}$

Propriedades derivadas

2. Produto: a derivada do produto *NÃO* é o produto das derivadas:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\ .\ g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]\ .\ g(x) + f(x)\ .\ \frac{d}{dx}[g(x)] = f'(x)\ .\ g(x) + f(x)\ .\ g'(x)$$

Ex: $y = (8x + 10)(3x^2)$

Propriedades derivadas

Ex: $y = t^3 \ln t^2$

Propriedades derivadas

3. Quociente: a derivada do quociente *NÃO* é o quociente das derivadas:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$$

Exemplo: $y = \frac{10x}{x^3 + 1}$