PEF2602
Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Resistência, Estabilidade, Segurança, Verificação, Dimensionamento

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti & Leila Meneghetti Valverdes
2º Semestre 2016

Problemas Básicos do Projeto e da Análise das Estruturas

1) DIMENSIONAMENTO (Problema Direto):
   Determinar os materiais e as dimensões para atender a critérios de projeto;

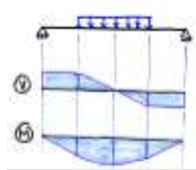
2) VERIFICAÇÃO (Problema Inverso):
   Verificar se uma dada estrutura atende aos critérios de projeto.

O Processo de Análise Estrutural

Estrutura
("Real" / "Concreto")

Modelo Estrutural:
Carregamentos
+
Equações de Equilíbrio
+
Equações de Compatibilidade

Esforços Solicitantes



Tensões ⟷ **Deformações**

Segurança x Desempenho

∴

Economia; Durabilidade; Funcionalidade

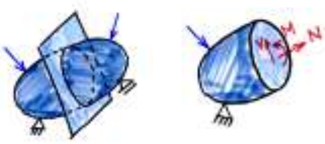
Métodos de Cálculo

Natureza dos Modelos / Métodos
- Determinísticos: valores fixos para carregamentos e propriedades dos materiais
- Probablilísticos: valores estatísticos para carregamentos e propriedades dos materiais

Critérios
- Tensões Limites (Método Clássico)
- Estados Limites (Método Moderno)

- **Atualmente, as normas foverecem a combinação de critérios baseados em estados limites e métodos probabilísticos;**
- **Para uma primeira exposição simplificada do assunto, em PEF2602 adotam-se critérios clássicos e métodos determinísticos;**
- **PEF2604 aprofunda o assunto!**

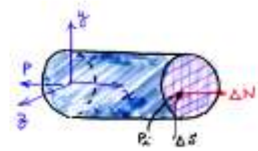
Esforços Solicitantes (vistos em PEF2601):



Problema:

Conhecidos os Esforços Solicitantes {N, V, M} , ao longo da estrutura, como determinar sua segurança?

Tensão Normal



Área da Seção Transversal:

$$A = \int_S ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

Força Normal:

$$N = \int_S dN = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta N_i$$

Define-se a Tensão Normal no ponto P_i: $\sigma_x = \lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\Delta N_i}{\Delta S_i} = \frac{dN}{dS}$

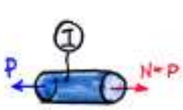
$$\therefore \quad dN = \sigma_x dS \quad \therefore \quad N = \int_S \sigma_x dS$$

Tração / Compressão

Consideramos inicialmente o caso da barra tracionada, para o qual existe apenas força normal N

$$\{N \neq 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad M = 0\}$$

O equilíbrio da parte I da barra fornece:



$$\boxed{N = P}$$

$$\begin{cases} N > 0 & \therefore \text{ Tração} \\ N < 0 & \therefore \text{ Compressão} \end{cases}$$

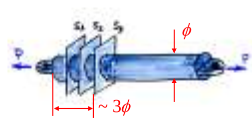
Tensão Normal

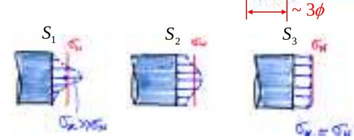
Admitindo uma distribuição uniforme de tensões: $\sigma_x = \sigma_N$

$$N = \int_S \sigma_x dS = \int_S \sigma_N dS = \sigma_N \int_S dS = \sigma_N A$$

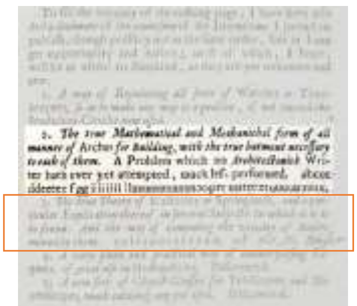
Onde se define a tensão normal média $\boxed{\sigma_N = \frac{N}{A}}$

A tensão normal média aproxima bem as tensões normais, exceto nas extremidades da barra:





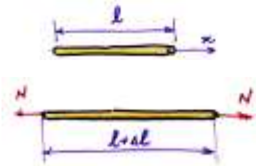
'Ut tensio, sic vis' ('como a deformação, assim a força')



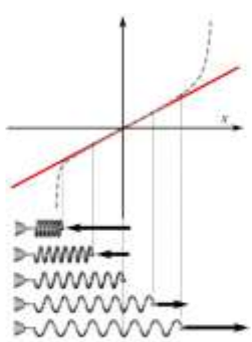
2. The true Mathematical and Mechanichal form of all manner of Arches for Building, with the true butment necessary to each of them. A Problem which no Architectonick Writer hath ever yet attempted, much less performed.

Robert Hooke (1635-1703), *Lectiones Cutlerianæ, or A collection of lectures: physical, mechanical, geographical, & astronomical.* London: Printed for John Martyn, 1679.

Deformação:



Deformação Longitudinal $\varepsilon_x = \frac{\Delta\ell}{\ell}$ (adimensional!)



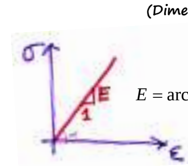
By Svjo - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=25795521

Lei de Hooke

Para cada material, existe uma proporcionalidade entre a deformação longitudinal ε_x e a tensão normal σ_x :

$$\boxed{\sigma_x = E\varepsilon_x}$$

E : Módulo de Elasticidade do Material
(Dimensão: N/m²)



$E = \arctan\alpha$

Módulo de Elasticidade

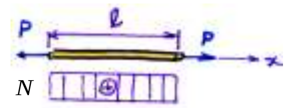
Material	E (GPa)	ν
Aço	210	0,3
Alumínio	70	0,25
Concreto	25	0,15
Madeira	10	?
Nylon	~2	0,42

ν : *coeficiente de Poison*

(relaciona a deformação longitudinal com a deformação transversal)

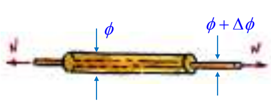
Barra prismática sujeita à tração / compressão simples:

Conhecidos o material e as dimensões de uma barra prismática, é possível prever o seu alongamento (ou encurtamento) quando submetida a uma tração uniforme :



$$\left.\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} & \text{(experimental)} \\ \varepsilon_x = \dfrac{\Delta\ell}{\ell} & \text{(definição)} \\ \sigma_x = \dfrac{N}{A} & \text{(definição)} \end{cases}\right\} \quad \left.\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\sigma_x}{E}\right\} \quad \boxed{\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA}}$$

Deformação Transversal

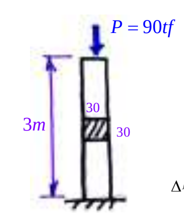


$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_t = \frac{\Delta\phi}{\phi}}$$

$$\Delta\phi < 0 \quad \therefore \quad \varepsilon_t < 0$$

Verifica-se experimentalmente que $\boxed{\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_x}$

<u>Exemplo</u>: calcular o encurtamento do pilar de concreto:



$$N = -P = -90tf = -90\times10^4 N$$

$$A = 0,3\times0,3 = 9\times10^{-2} m^2$$

$$E = 25GPa = 25\times10^9 \frac{N}{m^2}$$

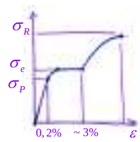
$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA} = \frac{\left(-90\times10^4 N\right)\times 3m}{25\times10^9 \dfrac{N}{m^2}\times 9\times10^{-2} m^2} = -1,2\times10^{-3} m$$

$$\boxed{\Delta\ell = -1,2\ mm}$$

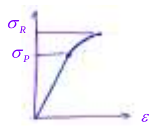
Ensaios de tração

A Lei de hooke tem validade restrita a deformações relativamente pequenas:

Material Dútil:
(por exemplo, aço)

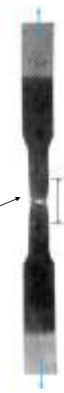


Material Frágil:
(por exemplo, concreto)



Ensaios de tração

Exemplo de um ensaio de tração – aço estrutural.

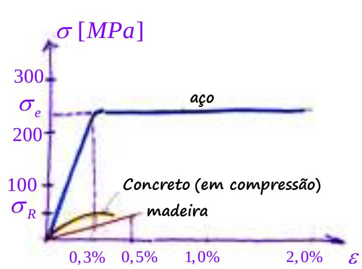


Região de ruptura

Região de estricção
C a E do diagrama

Ensaios de tração

Comparação aço – concreto – madeira:



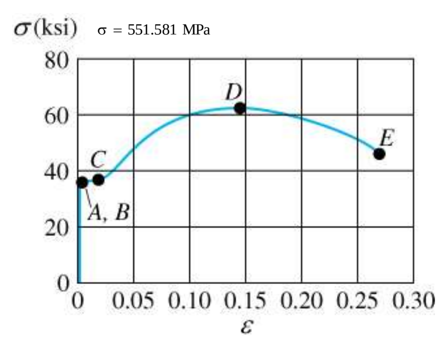


Diagrama tensão-deformação típico de aço estrutural em tração, desenhado em escala

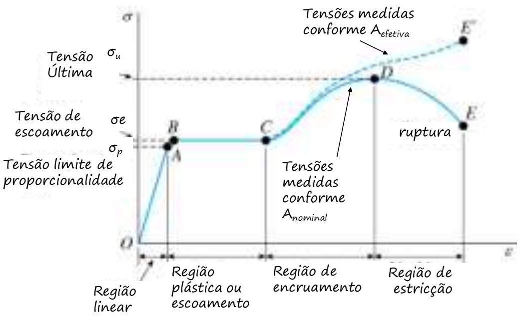
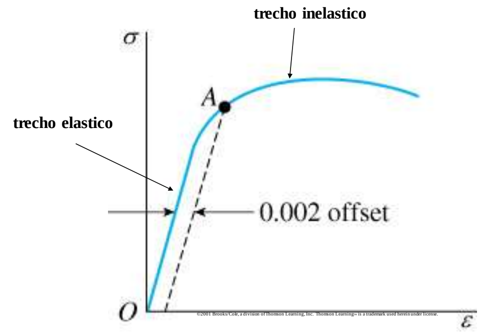


Diagrama tensão-deformação típico do aço estrutural de baixo carbono (ASTM 36) determinado a tração (fora de escala).



Determinação da tensão de escoamento σ_y nominal

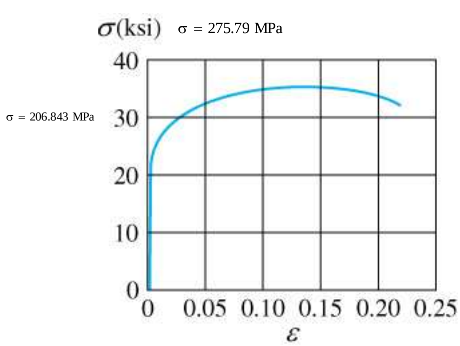
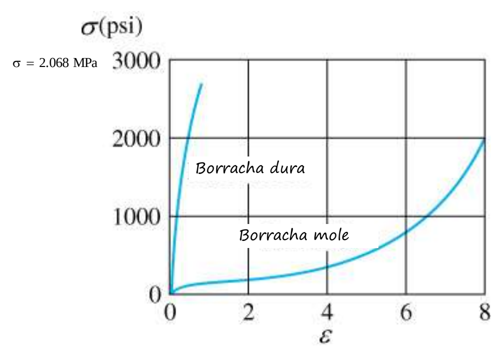


Diagrama tensão-deformação típico para uma liga de alumínio



Diagramas tensão-deformação a tração para dois tipos de borracha

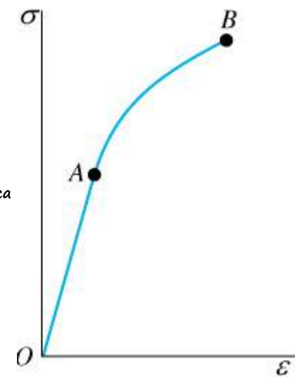


Diagrama tensão-deformação para material frágil, com limite de proporcionalidade elástica em A e ruptura em B (com baixa ductilidade)

Encruamento

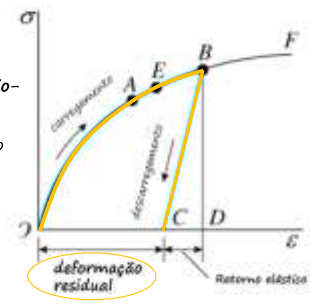


Diagrama tensão-deformação ilustrando um comportamento elastoplástico

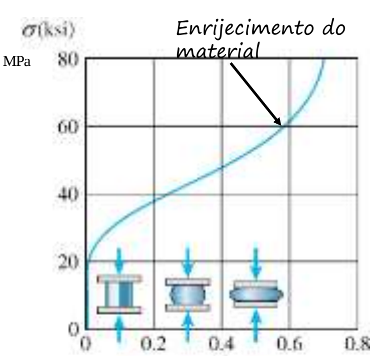


Diagrama tensão-deformação à compressão para o cobre.

Encruamento

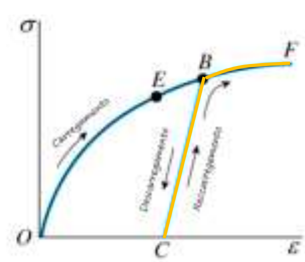


Diagrama tensão-deformação com recarregamento do material para elevação do limite elástico (tensão de escoamento)

Tensão Limite

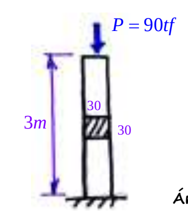
A máxima tensão suportada por um material frágil é σ_R ('tensão de ruptura')

Para materiais dúteis, admite-se que a resistência se esgote ao se atingir a tensão de escoamento σ_e

Para considerar estes dois tipos de comportamento com um único critério, define-se a tensão limite

$$\sigma_{\lim} = \begin{cases} \sigma_e & \text{(materiais dúteis)} \\ \sigma_R & \text{(materiais frágeis)} \end{cases}$$

Exemplo: Verificar o pilar para s=2, sendo $\sigma_R = 15MPa$
Redimensionar, se necessário!



$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_R}{s} = \frac{15}{2} = 7,5MPa$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = -\frac{90\times10^4}{9\times10^{-2}} = -10\times10^6 \frac{N}{m^2} = -10MPa$$

$|\sigma_x| < \sigma_R \quad \therefore$ não rompe!

$|\sigma_x| > \bar{\sigma} \quad \therefore$ "não passa"!

Área mínima: $|\sigma_x| = \frac{|N|}{A} \le \bar{\sigma} \quad \therefore \quad \frac{|N|}{A_{\min}} = \bar{\sigma}$

$$A_{\min} = \frac{|N|}{\bar{\sigma}} = \frac{90\times10^4}{7,5\times10^6} = 12\times10^{-2} m^2$$

Lado mínimo: $a_{\min} = \sqrt{A_{\min}} = \sqrt{12\times10^{-2}} = 0,346m$ $\quad \boxed{a = 35\ cm}$

Segurança

Ao se projetar uma estrutura, deve-se prover uma reserva de segurança, isto é, as tensões sobre a estrutura devem ser minoradas, em relação à $\sigma_{\lim}$, considerando um fator de segurança $s > 1$

Define-se a tensão admissível $\bar{\sigma} = \dfrac{\sigma_{\lim}}{s}$

Valores típicos $\begin{cases} s = 1,5 & \text{(aço)} \\ s = 2,0 & \text{(concreto)} \end{cases}$

Deve-se verificar que $\sigma_{\max} \le \bar{\sigma}$, em toda estrutura

Nota: na prática de projeto o assunto é mais elaborado, sendo os coeficientes de segurança divididos entre coeficientes de majoração das cargas e coeficientes de minoração das resistências, e recebem um tratamento probabilístico, como será visto em PEF2604.

Estabilidade do Equilíbrio

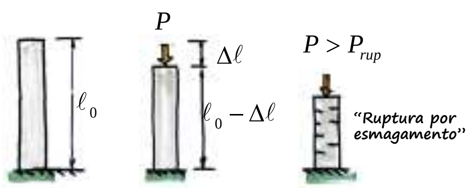
Equilíbrio Estável

Equilíbrio Instável

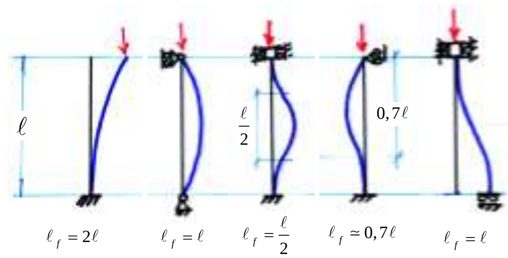
Equilíbrio Indiferente

Instabilidade Elástica (Flambagem)

Pilar Curto:

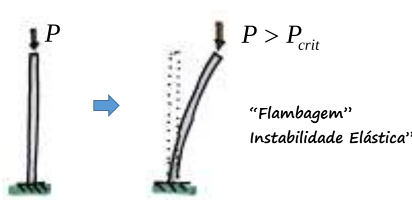


ℓ_f depende da vinculação:



Instabilidade Elástica (Flambagem)

Pilar Esbelto

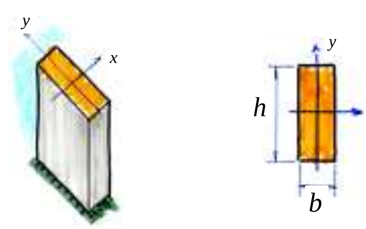


$$\boxed{P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{\ell_f^2}}$$

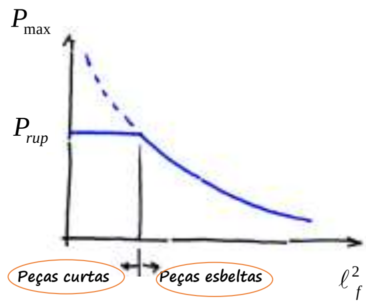
"Fórmula de Euler"

ℓ_f: comprimento de flambagem

P_{crit} depende do menor momento de inércia da seção transversal (I_{min})



$$I_{max} = I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{min} = I_y = \frac{hb^3}{12}$$



Tensão de Flambagem (ou de Euler):

$$\sigma_{fl} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{A\ell_f^2}$$

Raio de giração $\quad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$

Índice de esbeltez da barra $\quad \lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}}$

$$\boxed{\sigma_{fl} = \frac{\pi E}{\lambda^2}}$$

Verificação da segurança de barras comprimidas

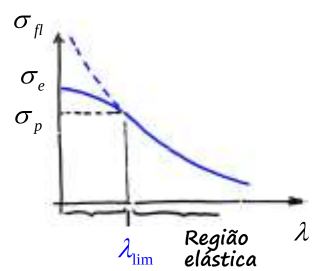
Duas situações devem ser verificadas:

(1) Ruptura à compressão ("esmagamento"):

$$\sigma_{max} < \bar{\sigma} \quad \therefore \quad \sigma_{max} = \frac{P}{A} \le \frac{\sigma^c_{lim}}{s}$$

(2) Instabilidade ("flambagem"):

$$P \le \frac{P_{crit}}{s} = \frac{1}{s}\frac{\pi^2 E I_{min}}{\ell_f^2}$$



λ_{lim} separa a região em que a flambagem se dá no regime elastico da região onde a flambagem ocorre no regime elastoplástico

$$\boxed{\lambda_{lim} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}}$$

Por exemplo, para um aço com :

$$\sigma_e = 240MPa \,; \quad E = 210GPa$$

$$\lambda_{\lim} = \pi\sqrt{\frac{210\times10^9}{240\times10^6}} = 92,93$$

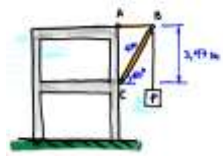
É importante garantir que a esbeltez das peças não seja excessiva, de modo que seja possível aproveitar toda a capacidade resistente dos materiais

Por esta razão, as normas de projeto estabelecem valores máximos de esbeltez.

Por exemplo, para as estruturas metálicas (NBR8800)

$$\lambda \leq 200$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo P=12kN.



Dimensionamento:

(1) Cabo AB

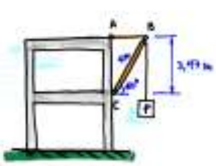
$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{cabo}} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{s}$$

$$\frac{N_{AB}}{\left(\frac{\pi\phi^2}{4}\right)} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{s}$$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4sN_{AB}}{\pi\sigma_R^t}} = \sqrt{\frac{4\times2\times6,9\times10^3}{\pi\times40\times10^6}} = 0,021m$$

$$\boxed{\phi \geq 2,1cm}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo P=12kN.



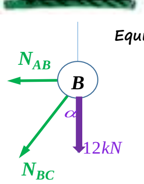
Cabo AB de Seção circular, diâmetro ϕ

Barra BC seção quadrada de lado a

Material: $\sigma_R^t = 40MPa \,; \quad \sigma_R^c = 40MPa$

$E = 20GPa$

Coeficiente de segurança: s=2



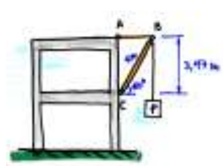
Equilíbrio do nó B: $\sum_i F_X^i = -N_{AB} - N_{BC}\sin 30^o = 0$

$$\sum_i F_Y^i = -N_{BC}\cos 30^o - 12 = 0$$

$$\boxed{N_{BC} = -\frac{12}{0,866} = -13,8kN \text{ (compressão!)}}$$

$$\boxed{N_{AB} = -(-13,8\times0,5) = +6,9kN \text{ (tração!)}}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo P=12kN.



Dimensionamento:

(2) Barra BC $\quad A = a^2 \quad ; \quad I = \frac{a^4}{12}$

(2.1) Esmagamento

$$\sigma = \frac{|N_{BC}|}{a^2} \leq \frac{\sigma_R^c}{s}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{s|N_{BC}|}{\sigma_R^c}} = \sqrt{\frac{2\times13,8\times10^3}{40\times10^6}} = 0,026m$$

(2.2) Flambagem

$$|N_{AB}| \leq \frac{P_{crit}}{s} = \frac{1}{s}\frac{\pi^2 EI}{\ell_f^2} = \frac{1}{s}\frac{\pi^2 E}{\ell^2}\frac{a^4}{12}$$

$$a \geq \sqrt[4]{\frac{12s\ell^2|N_{BC}|}{\pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{12\times2\times4^2\times13,8\times10^3}{\pi^2\times20\times10^9}} = 0,071m \quad \boxed{a \geq 7,1cm}$$