Campos elétricos em materiais dielétricos

Instituto de Física da USP
Prof. Manfredo H. Tabacniks

Resumo simplificado do texto: Fagundes, Fantini e Bindilatti. *Notas de Aula 1. Dielétricos*, IFUSP 2009. Leitores que desejarem aprofundar o tema devem buscar o texto referênciado.

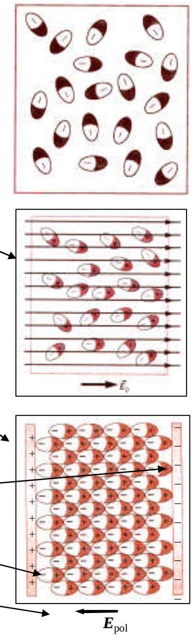
Campos elétricos em materiais

Evidência experimental: Quando um dielétrico (plástico, borracha, vidro, óleo) é introduzido num capacitor, **a capacitância aumenta de um fator κ**, *a constante dielétrica*

Dielétricos são usados em:

- capacitores
- isolação elétrica
- instrumentos ópticos (lentes, prismas, etc.)

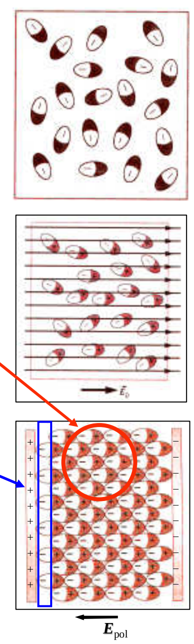
Modelo molecular de carga induzida



- A estrutura eletrônica do material é modificada pelo campo elétrico externo, que induz o alinhamento de dipolos elétricos existentes no material.
- O campo elétrico externo pode também induzir a criação de dipolos elétricos em materiais originalmente não polarizados.
- O alinhamento dos dipolos induzidos não é perfeito devido à agitação térmica.
- O resultado líquido equivale a uma densidade superficial de cargas cujo campo elétrico de polarização é oposto ao campo externo.

Modelo molecular de carga induzida

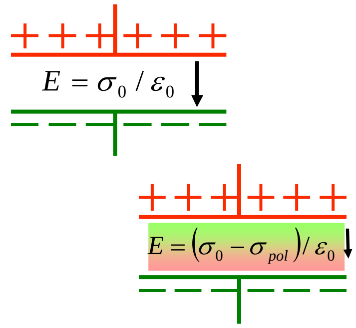
Apesar da carga líquida num volume fechado ser nula, na superfíce, junto a cada uma das “fontes do campo elétrico” se observa uma carga líquida resultante do alinhamento dos dipolos elétricos oposta à carga que originou o campo elétrico inicial



Polarização

O campo elétrico entre as placas de um capacitor no vácuo é dado por:

$$E_0 = \sigma_0 / \varepsilon_0$$



Na presença de um dielétrico, ocorre a polarização das *moléculas* do dielétrico, que geram uma carga aparente de polarização

$$\sigma_{pol}$$

contrária à carga real, que atenua o campo elétrico externo.

$$\varepsilon_0 E = \sigma_0 - \sigma_{pol}$$

Temos duas alternativas:

1) $\varepsilon_0 E = (\sigma_0 - \sigma_{pol})$ ou

2) $E = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon}$ com $\varepsilon > \varepsilon_0$

Vetor Polarização

- É resultado da <u>soma dos *dipolos elétricos*</u> (permanentes ou induzidos) de um material, quando colocado num campo elétrico externo.
- <u>**P** é proporcional ao campo elétrico **E** no material</u>, dado pela soma do campo original $\mathbf{E_0}$ e o campo devido à polarização, $\mathbf{E} = \mathbf{E_0} + \mathbf{E_p}$

$$\vec{P}(r) = \sum_{dV} q\vec{d}$$

OBS1: Em materiais em que a polarização não é colinear com o campo aplicado, χ é um tensor de 2ª ordem.

OBS2: χ em geral é função do campo externo e da frequência.

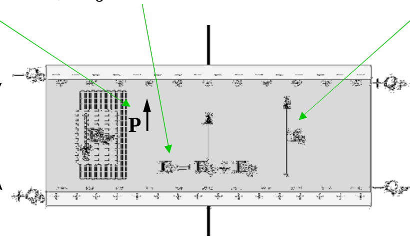
susceptibilidade elétrica do meio

Em materiais lineares, a **polarização** é proporcional ao campo elétrico no meio.

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{z}$$

$\mathbf{E_0}$ é o campo elétrico criado pelas cargas Q_0



$\mathbf{E_p}$ é o campo elétrico criado pelas cargas de polarização

Vetor Polarização

O campo elétrico, com sentido contrário ao vetor polarização é dado por:

$$\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

O campo elétrico no dielétrico é a soma campo original e o campo elétrico de polarização

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

usando $\vec{P} = \chi\,\varepsilon_0\vec{E}$

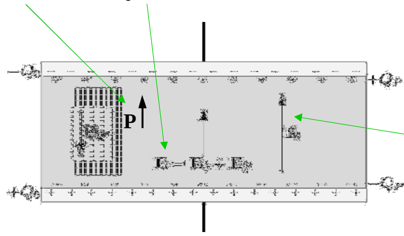
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 - \chi\,\vec{E}$$

O campo elétrico no dielétrico é igual ao campo original atenuado de um fator κ

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1+\chi} = \frac{\vec{E}_0}{\kappa} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}\hat{z}$$

lembrando que $\kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi\,\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})$$



$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{z}$$

E_0 é o campo elétrico criado pelas cargas Q_0 e $-Q_0$

Temos dois modelos:

note que o vetor P tem unidades de densidade de carga

$$\varepsilon_0 E = \sigma_0 - \sigma_{pol}$$
$$\varepsilon_0 E = \sigma_0 - P$$

Modelo microscópico: O campo no meio material é descrito pela polarização, $P = \sigma_{pol}$ Tudo se passa como se houvessem 2 densidades de carga (σ_0 e σ_{pol}) em vácuo.

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$$

Modelo macroscópico: O meio material é descrito por um **coeficiente de permissividade dielétrica ε** e se consideram apenas as **cargas livres.**

Os modelos são bastante diferentes entre si:

No modelo microscópico tudo acontece em vácuo (ε_0) e devemos incluir o efeito da polarização e as cargas induzidas.
No modelo macroscópico define-se a permissividade do meio ε e não se consideram os detalhes microscópicos da matéria.
Entretando, queremos combinar os modelos e buscar relações entre ε e as cargas de polarização.

Temos dois modelos:

$$\varepsilon_0 E = \sigma_0 - \sigma_{pol}$$
$$\varepsilon_0 E = \sigma_0 - P$$

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$$

Para combinar o modelo microscópico (depende de ε_0) e o modelo macroscópico, definimos o vetor ***D* (Campo de Deslocamento Elétrico)** que depende apenas das cargas livres $\boldsymbol{\sigma_0}$

$$\boxed{\sigma_0 = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}}$$

A polarização foi convenientemente definida proporcional ao campo elétrico no meio:

$$\vec{P} = \chi \, \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad = \quad \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \, \varepsilon_0 \vec{E} \quad = \quad (1+\chi)\varepsilon_0 \vec{E} \quad = \quad \varepsilon \vec{E}$$

4320292 – IFUSP 2014 - MHT

9

A Lei de Gauss:

A Lei de Gauss aplicada ao campo ***E*** calcula a soma das cargas: livres e de polarização

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \, d\vec{s} = q_0 - q_{polarização}$$
$$\frac{1}{S} \oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \, d\vec{s} = \sigma_0 - \sigma_{polarização}$$
$$\frac{1}{S} \left(\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \, d\vec{s} + \oint_S \vec{P} \, d\vec{s} \right) = \sigma_0$$
$$\frac{1}{S} \oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) d\vec{s} = \sigma_0$$
$$\frac{1}{S} \oint_S \vec{D} d\vec{s} = \sigma_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} - \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$
$$\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

tem unidades de densidade de carga

D não depende de permissividade elétrica;
D depende APENAs das cargas livres σ_0. Útil quando não se conhecem as cargas de polarização.

σ_0 representa as cargas livres

4320292 – IFUSP 2014 - MHT

10

A Lei de Gauss:

cargas

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{q_0 - q_{polarização}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{s} = q_0$$

$$\oint_S \vec{E}_p\,d\vec{s} = -\frac{q_{polarização}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{P}\,d\vec{s} = q_{polarização}$$

densidade de cargas

$$\frac{1}{S}\oint_S \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{\sigma - \sigma_{polarização}}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{S}\oint_S \vec{D}d\vec{s} = \sigma$$

$$\frac{1}{S}\oint_S \vec{E}_p d\vec{s} = \frac{-\sigma_{polarização}}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{S}\oint_S \vec{P}d\vec{s} = \sigma_{polarização}$$

Várias formas de escrever ***D***

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\,\vec{E} \\ \vec{P} = \chi\left(\varepsilon_0\vec{E}\right)\end{array}}$$

D independe da permissividade elétrica do meio
D depende APENAs das cargas livres

susceptibilidade elétrica

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\,\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0(\kappa)\vec{E}$$

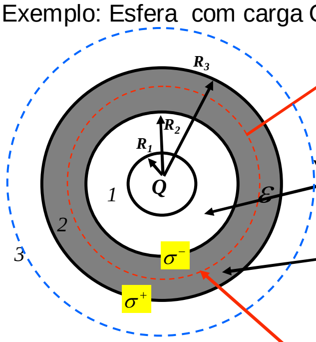
constante dielétrica ou permissividade relativa

$$\vec{D} = \varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$$

Permissividade elétrica.
NB. ε e χ são tensores...

Exemplo: Esfera com carga Q envolta por uma armadura dielétrica esférica com ε



$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{s} = q_{livre}$$

$\vec{D} = Q\hat{r}$ para qualquer $r > R_1$

fora do dielétrico $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\hat{r}$

no interior do dielétrico $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon} = \dfrac{Q}{\varepsilon}\hat{r}$

$$\vec{P} = \chi\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \chi\left(\varepsilon_0 \frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) = \frac{\kappa-1}{\kappa}\vec{D}$$

$$Q + Q^-_{polarização} + Q^+_{polarização} = Q$$
$$Q^-_{polarização} = Q^+_{polarização}$$
$$4\pi R_1^2 \sigma^- = 4\pi R_2^2 \sigma^+$$
$$R_1^2 \sigma^- = R_2^2 \sigma^+$$

Ao usar a lei de Gauss só interessam as cargas internas à superfície de gauss

$$\frac{1}{S}\oint_S \vec{P}\, d\vec{s} = \sigma^-_{polarização}$$

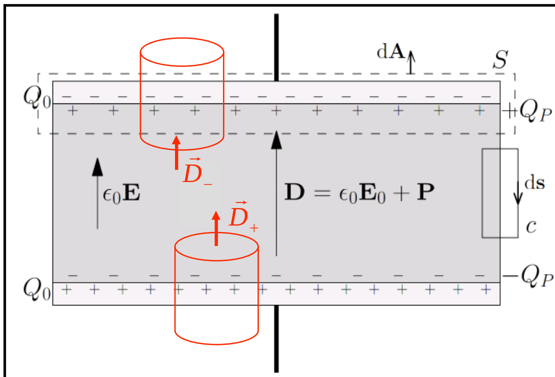
$$\vec{P} = \frac{\kappa-1}{\kappa} Q\hat{r}$$

$$\frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right) Q = \sigma^-_{polarização}$$

$$Q^-_{polarização} = \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right) Q$$

$$\sigma^+ = \frac{R_1^2}{R_2^2}\sigma^-$$

O sinal negativo de σ pode ser obtido explícitamente aplicando a lei de gauss no campo de polarização $E_p = -P/\varepsilon_0$



$$\frac{1}{S}\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \sigma_0$$
$$D_- . A = -\sigma_0 A/2$$
$$\vec{D}_- = -\sigma_0(-\hat{z})/2$$
$$\vec{D}_+ = \sigma_0(\hat{z})/2$$
$$\vec{D} = \sigma_0 \hat{z}$$

Superfície de Gauss $\vec{P} = \sigma_p$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\sigma_0 = \varepsilon \frac{(\sigma_0 - \sigma_p)}{\varepsilon_0} = \kappa(\sigma_0 - \sigma_p)$$

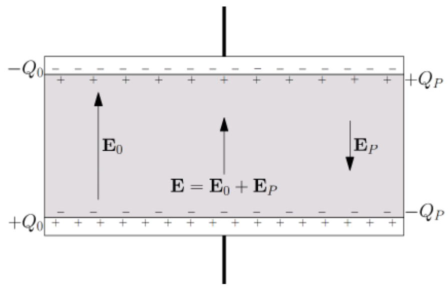
$$\sigma_p = \frac{\kappa-1}{\kappa}\sigma_0$$

$$\boxed{\sigma_p = \frac{\kappa-1}{\kappa}\sigma_0}$$

$$\boxed{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \kappa = (1+\chi)}$$

definições

Capacitor plano com dielétrico



aplicando a lei de Gauss...

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\vec{E}_p = -\frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}\hat{z} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = -\frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\varepsilon_0}\hat{z} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

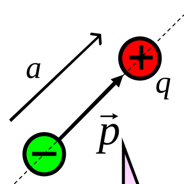
$$\frac{1}{S}\oint_S \vec{D}d\vec{s} = \sigma_0$$

$$\vec{P} = \chi\,\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \chi\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1+\chi} = \frac{\vec{E}_0}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{z} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}\hat{z}}$$

Dipolos elétricos (revisão)



Momento de dipolo elétrico: $\vec{p} = q.\vec{a}$

$\vec{p}$ vai da carga **negativa** para a **positiva**

Muitas moléculas têm momento de dipolo elétrico permanente (são moléculas polares):

HCl	$3{,}43.10^{-30}$ (mC)
H_2O	$6{,}2\ .10^{-30}$ (mC)
NH_3	$5{,}0.10^{-30}$ (mC)
CO	$0{,}40.10^{-30}$ (mC)
C_2H_5OH (etanol)	$3{,}7.10^{-30}$ (mC)

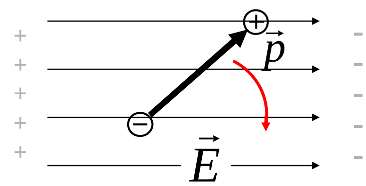
Existem moléculas que são susceptíveis ao campo elétrico, isto é, podem ser polarizadas.

Dipolo elétrico num campo elétrico

Cria um torque

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

que procura alinhar $\vec{p}$ com $\boldsymbol{E}$

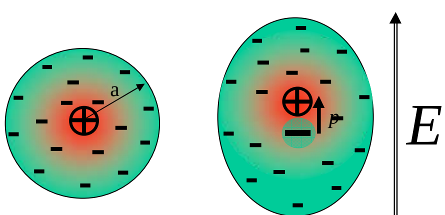


Qual a energia para rodar 180°um momento de dipolo e létrico?

$$dU = -dW = -\left(\vec{\tau} \times d\vec{\theta}\right) = -p\,E\sin\theta\; d\theta$$

$$\Delta U_{\pi} = -pE\int_0^{\pi} \sin\theta\; d\theta = 2\,pE$$

Um modelo microscópico: Um átomo pode ser polarizado por um campo elétrico externo



$p = 0$ $\qquad$ $p = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E$

em termos macroscópicos

$$\boxed{\vec{P} = \chi\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right)}$$

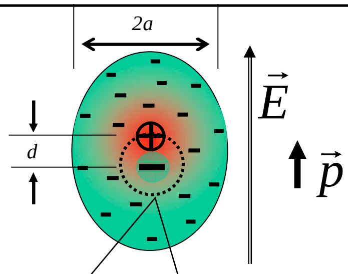
χ é a susceptibilidade elétrica do meio

Susceptibilidade elétrica (CNPT)

material	χ
H	5×10^{-4}
He	$0,6 \times 10^{-4}$
ar	$5,4 \times 10^{-4}$
mica	5
vidro	8
óleo	1,1
água	78

$$\chi = \kappa - 1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1$$

Alonso-Finn, Physics, 1972, pg.434



$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\int_V \rho\, dV}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi d^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\right)\frac{4}{3}\pi d^3$$

$$E_{ext} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

Num modêlo simples de átomo supomos uma carga positiva pontual no centro de uma nuvem esférica com carga negativa (nuvem de elétrons) com raio *a*.
Num campo elétrico externo, e supondo que a densidade de carga negativa não seja muito alterada, os dois centros de carga se afastam da distância *d*.
No equilíbrio, a força do campo elétrico externo é igual e oposta à força de atração das cargas atômicas. Mas, a carga negativa, que atua no núcleo positivo, é devida apenas à carga contida numa esfera de raio *d* (Lei de Gauss)

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{d} = \left(4\pi a^3\right)\varepsilon_0 \vec{E}_{ext}}$$

O momento de dipolo de um átomo é proporcional ao campo elétrico externo

Berkeley, V2, pg289

Referências

- **Halliday, Resnick & Krane. Física 3. 4ª Ed. LTC Editora. Rio de Janeiro, RJ. - 2004.**
- **Serway. Física 3. Ed. LTC. Rio de Janeiro, RJ. -1996.**
- **Alonso e Finn, Physics. 2nd Ed. Addison-Wesley, 1972.**
- **Purcell. Curso de Física de Berkeley. Volume 2. Edgard-Blücher, Brasil. 1970.**