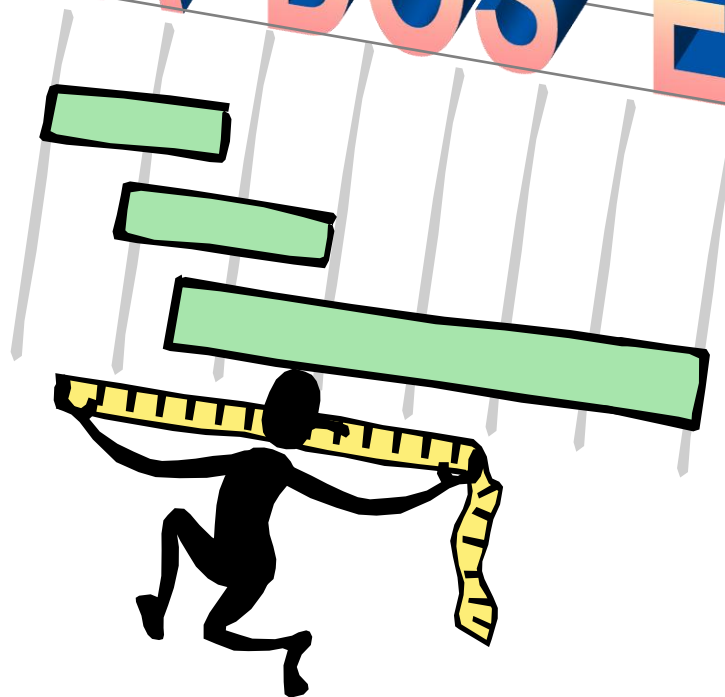


TEORIA DOS ERROS

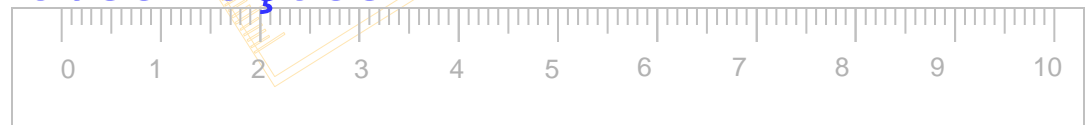


TEORIA DOS ERROS

Na Geomática (Geodesia e Topografia) se realizam medições de direções, distâncias, etc.

- **Medir** uma grandeza significa obter um número associado a uma unidade que represente o valor dessa grandeza.

Tudo o que se pode medir (observar) é denominado observável. Um conjunto de medições de uma grandeza constituem as **observações**.



TEORIA DOS ERROS

- **Erro:** é a diferença entre o valor verdadeiro da grandeza física (desconhecido) e o valor obtido na medida.



Topografia: medição de grandezas espaciais

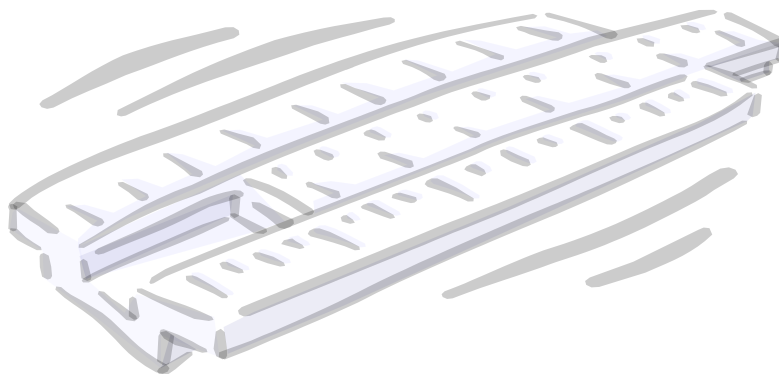
- A **Teoria dos Erros** preconiza que o valor verdadeiro de uma grandeza é desconhecido.

MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA

Uma grandeza é definida quando se conhece o seu **valor** e a sua **precisão**, considerando somente erros aleatórios.

$$\text{Ex.: } \boxed{3.278,456 \text{ m}} \pm \boxed{0,001 \text{ m}}$$

VALOR PRECISÃO



MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA

As observações podem ser:

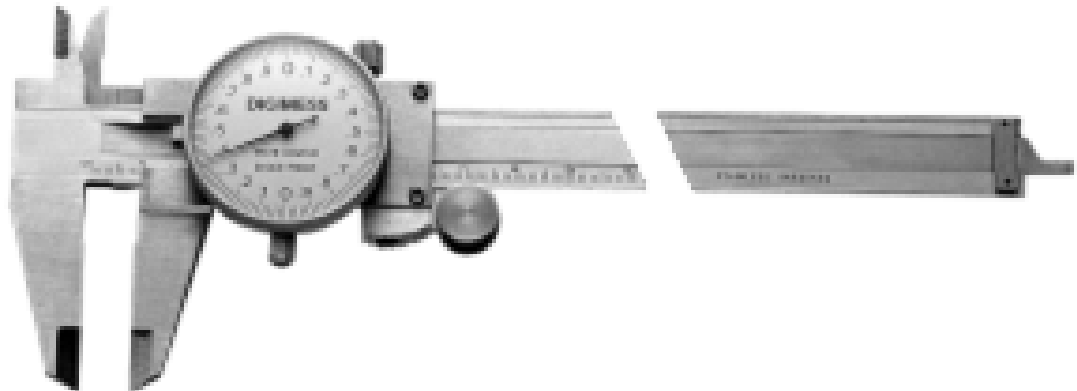
- **Diretas:** A própria grandeza a medir é observada. (Ex.: Ângulos de um triângulo)
- **Indiretas:** Observa-se uma certa grandeza que se relaciona com aquela que se quer obter através de um modelo matemático. (Ex.: Mede-se a distância e o ângulo para se obter as coordenadas).



MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA

Fatores que Influenciam uma Observação

- **Operador:** Limitações pessoais
- **Custo da Operação:** Tempo e cuidado exigidos
- **Método de Medição:** Instrumentos, metodologias
- **Dificuldades Técnicas e Operacionais**



PRECISÃO

Controle do erro máximo, associado ao **Instrumento de Medida.**

Por exemplo: teodolito com *precisão de 10"*

- **Precisão Nominal:** menor divisão da graduação do instrumento.
- **Precisão efetiva:** *erro médio quadrático*, resultante de uma série de observações, em condições bem caracterizadas.

PRECISÃO DE UMA MEDIDA

Expressa o grau de aderência das observações umas às outras e à média.

Vincula-se a efeitos aleatórios

Mede a dispersão das observações em torno da média

É estabelecida pelo Desvio Padrão

EXATIDÃO OU ACURÁCIA



Expressa o grau de aderência do melhor valor para as observações em relação ao **VALOR VERDADEIRO.**

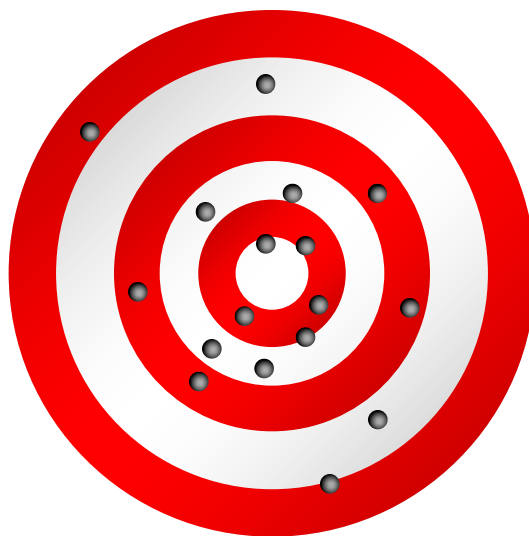
(na prática: compara-se com um valor mais preciso de referência)

Vincula-se a efeitos aleatórios e efeitos sistemáticos.

PRECISÃO E ACURÁCIA



**Com precisão e
sem acurácia**



**Sem acurácia e
sem precisão**

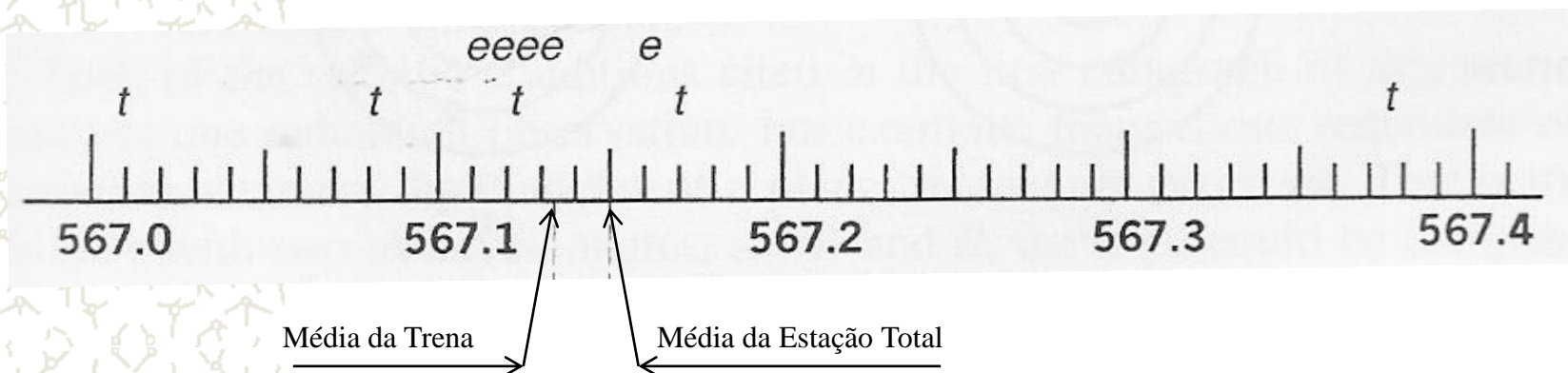


**Com acurácia e
com precisão**


PRECISÃO: Cálculo da Média e do Desvio Padrão

Observação	Passo (p)	Trena (t)	Estação Total (e)
1	571	567,17	567,133
2	563	567,08	567,124
3	566	567,12	567,129
4	588	567,38	567,165
5	557	567,01	567,114

Média	569	567,152	567,133
Desvio Padrão	11,8	0,140	0,0192



MÉDIA ARITMÉTICA


$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

(*Estimador imparcial*)

Desvio padrão de uma amostra (σ)

(= erro médio quadrático (e_q))

$$\sigma_x = e_q = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$$

$$v_i = x_i - m$$

MÉDIA PONDERADA

As medições são realizadas com diferentes graus de confiança.

O valor mais provável é:

$$m_p = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$



Erro da média ponderada = e_q

$$e_q = \sqrt{\frac{\sum p_i v_i^2}{(n-1) \sum p_i}}$$

ERRO DA MÉDIA (desvio padrão da média com n valores):

$$e_m = \frac{e_q}{\sqrt{n}}$$

ERRO RELATIVO

$$e_r = \frac{e_m}{m}$$

m = média

ERROS GROSSEIROS

Resultam de:

- Descuidos do operador
(inversão ou omissão de dígitos)
- Falha instrumental grave
- Imperícia

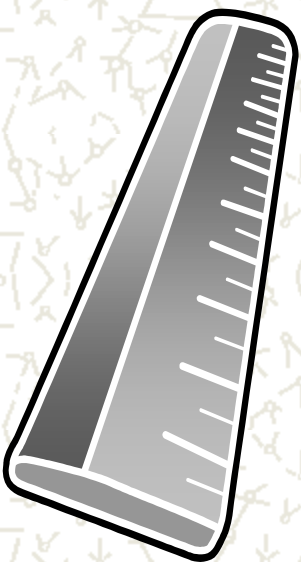


ERROS SISTEMÁTICOS



- Constantes ou variáveis;
- Causados de forma ***permanente*** e ***conhecida***, por:
 - percepções do operador
 - calibragem dos instrumentos
 - fatores naturais
 - precisão do método
- ❖ **Tendem a se acumular**

ERROS ACIDENTAIS OU ALEATÓRIOS

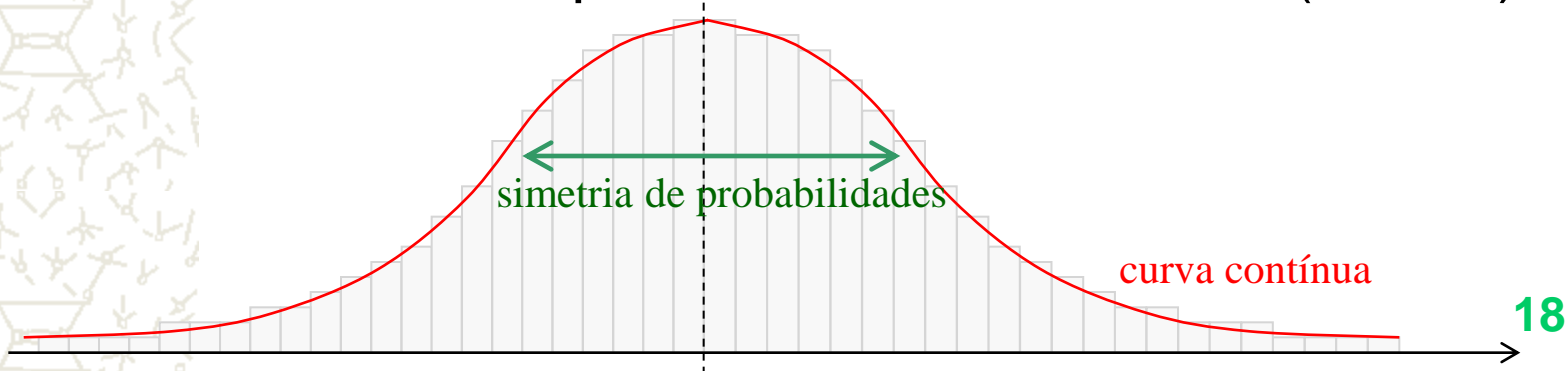


- Causas desconhecidas de ocorrência aleatória e probabilística;
- **Tendem a se acumular;**
- Precedido de duplo sinal algébrico ($\pm e_a$);
- Princípios da estatística são usados para determinar o valor mais provável do parâmetro e sua precisão:
- Quando o número de observações cresce, os erros aleatórios revelam certa regularidade.

ERROS ACIDENTAIS OU ALEATÓRIOS

Postulados da teoria da distribuição dos erros acidentais (**Gauss**):

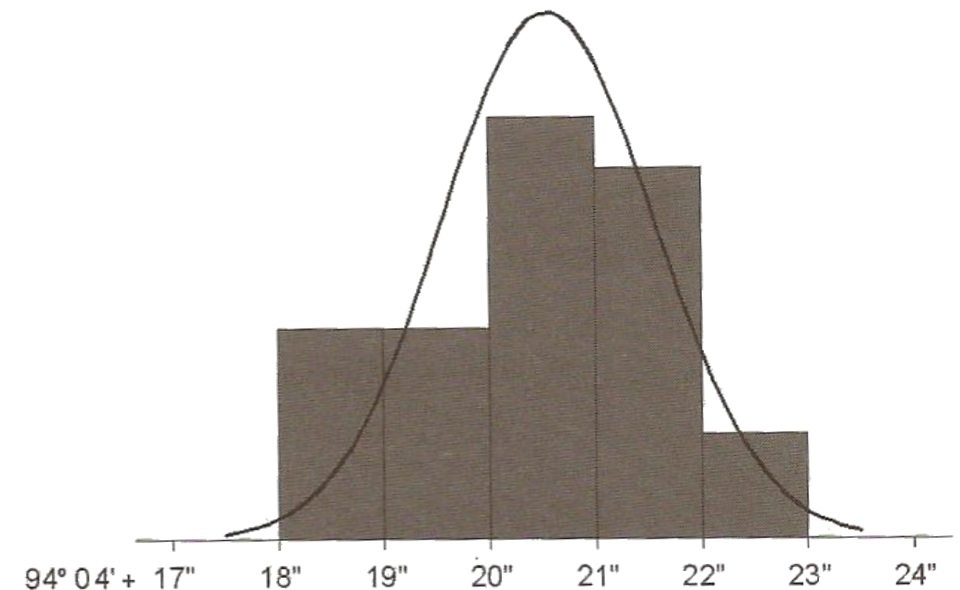
- Medidas se agrupam em torno de um valor
- Probabilidade de ocorrência máxima é próximo do valor médio
- Existência de simetria nas probabilidades de ocorrência dos resíduos
- Curva das probabilidade é contínua (Gauss)



ERROS ACIDENTAIS OU ALEATÓRIOS

Valores medidos

94° 4' 19,00"	94° 4' 19,50"
94° 4' 21,75"	94° 4' 19,75"
94° 4' 22,50"	94° 4' 20,50"
94° 4' 21,25"	94° 4' 18,75"
94° 4' 20,25"	94° 4' 18,75"
94° 4' 21,50"	94° 4' 21,00"
94° 4' 20,00"	94° 4' 20,50"
94° 4' 20,00"	94° 4' 20,50"
94° 4' 21,25"	94° 4' 20,50"
94° 4' 21,25"	94° 4' 20,25"
94° 4' 22,00"	94° 4' 20,50"
94° 4' 21,50"	94° 4' 19,00"
94° 4' 22,25"	



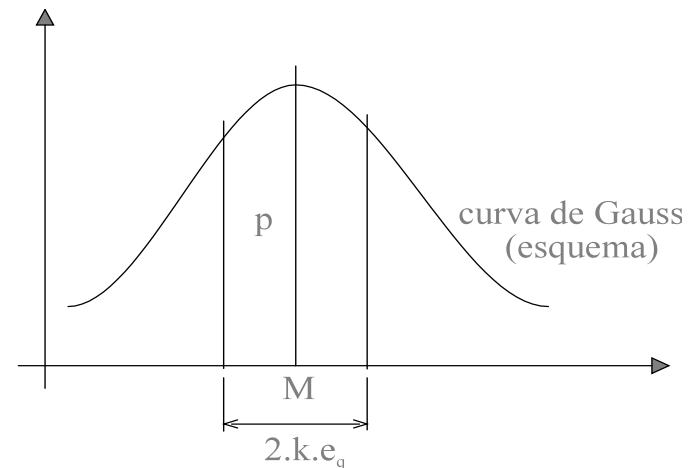
Interpretação da Curva de Gauss

Probabilidade de o erro estar no intervalo:

$$m \pm k.\sigma$$

Pontos de inflexão em $-\sigma$ e $+\sigma$, entre esses dois valores concentra-se 68% das probabilidades

P%	k.σ
50,0	0,67
68,3	1,00
90,0	1,65
95,0	1,96
99,0	2,58
99,7	3,00
99,9	3,29



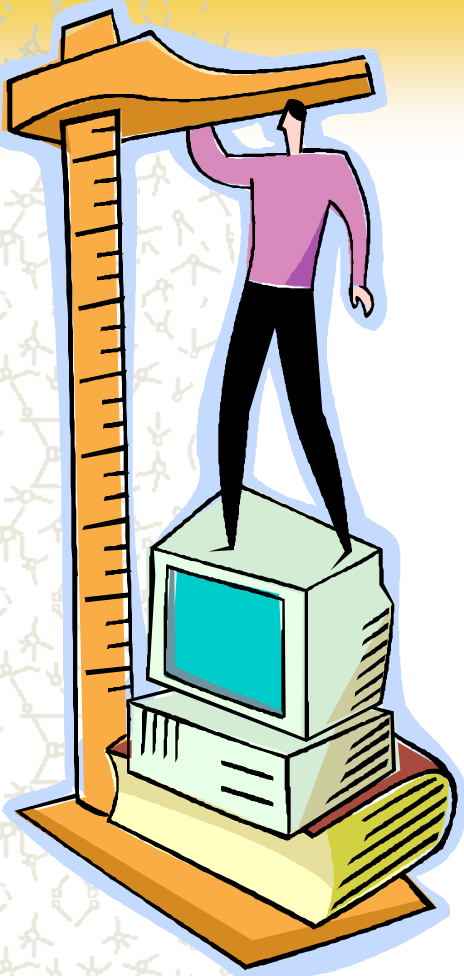
ERRO VERDADEIRO

$$E_v = L_b - L_v$$

E_v : Erro verdadeiro

L_v : Valor verdadeiro
(desconhecido)

L_b : Valor observado



ERRO APARENTE (RESÍDUO)

$$E_A = L_b - L_v$$

L_b : Valor observado

L_v : Estimador do valor verdadeiro

E_A : Erro aparente

RESÍDUO (v_i) é o erro aparente com o sinal trocado.

ERRO MÁXIMO OU TOLERÂNCIA



O objetivo é:

Desprezar todas as medidas que ultrapassem o valor estipulado, por serem consideradas mal efetuadas.

*** Intervalo: $m \pm 3\sigma$

EXPRESSÕES EMPÍRICAS DE TOLERÂNCIA

$$e_m = 4 \times 0,65\sigma \quad 6 \text{ em } 100.000$$

$$e_m = 3 \times 0,65\sigma \quad 2 \text{ em } 1.000$$

$$e_m = 2,5 \sigma \text{ (normalmente usada)}$$

probabilidade de ser excedido: 1 %

$$e_m = 3 \sigma$$

probabilidade de ser excedido: 0,1 %

Exemplo:

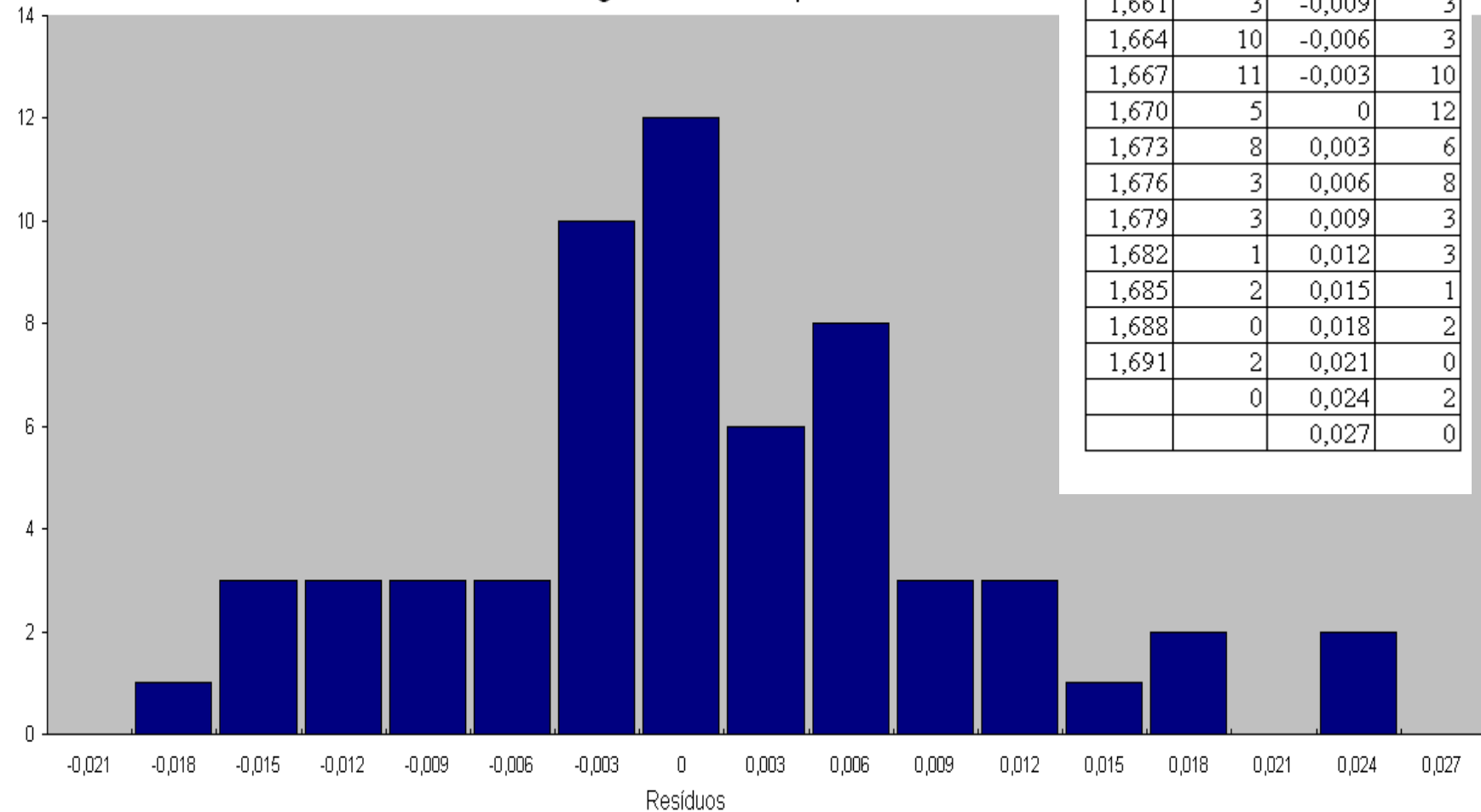
Medição de áreas com planímetro

N	AREA	Vi	Vi^2	N	AREA	Vi	Vi^2	N	AREA	Vi	Vi^2	
1	1,677	0,00993	0,000099	21	1,665	(0,00207)	0,000004	41	1,658	(0,00907)	0,000082	
2	1,676	0,00893	0,000080	22	1,677	0,00993	0,000099	42	1,657	(0,01007)	0,000101	
3	1,657	(0,01007)	0,000101	23	1,662	(0,00507)	0,000026	43	1,690	0,02293	0,000526	
4	1,667	(0,00007)	0,000000	24	1,660	(0,00707)	0,000050	44	1,666	(0,00107)	0,000001	
5	1,673	0,00593	0,000035	25	1,667	(0,00007)	0,000000	45	1,671	0,00393	0,000015	
6	1,671	0,00393	0,000015	26	1,660	(0,00707)	0,000050	46	1,664	(0,00307)	0,000009	
7	1,673	0,00593	0,000035	27	1,660	(0,00707)	0,000050	47	1,685	0,01793	0,000322	
8	1,670	0,00293	0,000009	28	1,667	(0,00007)	0,000000	48	1,667	(0,00007)	0,000000	
9	1,675	0,00793	0,000063	29	1,667	(0,00007)	0,000000	49	1,655	(0,01207)	0,000146	
10	1,664	(0,00307)	0,000009	30	1,652	(0,01507)	0,000227	50	1,679	0,01193	0,000142	
11	1,664	(0,00307)	0,000009	31	1,664	(0,00307)	0,000009	51	1,682	0,01493	0,000223	
12	1,668	0,00093	0,000001	32	1,690	0,02293	0,000526	52	1,663	(0,00407)	0,000017	
13	1,671	0,00393	0,000015	33	1,649	(0,01807)	0,000326	53	1,662	(0,00507)	0,000026	
14	1,664	(0,00307)	0,000009	34	1,671	0,00393	0,000015	54	1,672	0,00493	0,000024	
15	1,651	(0,01607)	0,000258	35	1,675	0,00793	0,000063	55	1,667	(0,00007)	0,000000	
16	1,663	(0,00407)	0,000017	36	1,653	(0,01407)	0,000198	56	1,667	(0,00007)	0,000000	
17	1,665	(0,00207)	0,000004	37	1,654	(0,01307)	0,000171	57	1,663	(0,00407)	0,000017	
18	1,670	0,00293	0,000009	38	1,665	(0,00207)	0,000004	58	1,670	0,00293	0,000009	
19	1,671	0,00393	0,000015	39	1,683	0,01593	0,000254	59	1,667	(0,00007)	0,000000	
20	1,651	(0,01607)	0,000258	40	1,668	0,00093	0,000001	60	1,669	0,00193	0,000004	
									Σ	100,024	(0,00000)	0,004780
									μ	1,667	σ	0,009

AREAS MEDIDAS COM PLANIMETRO

Histograma de frequências

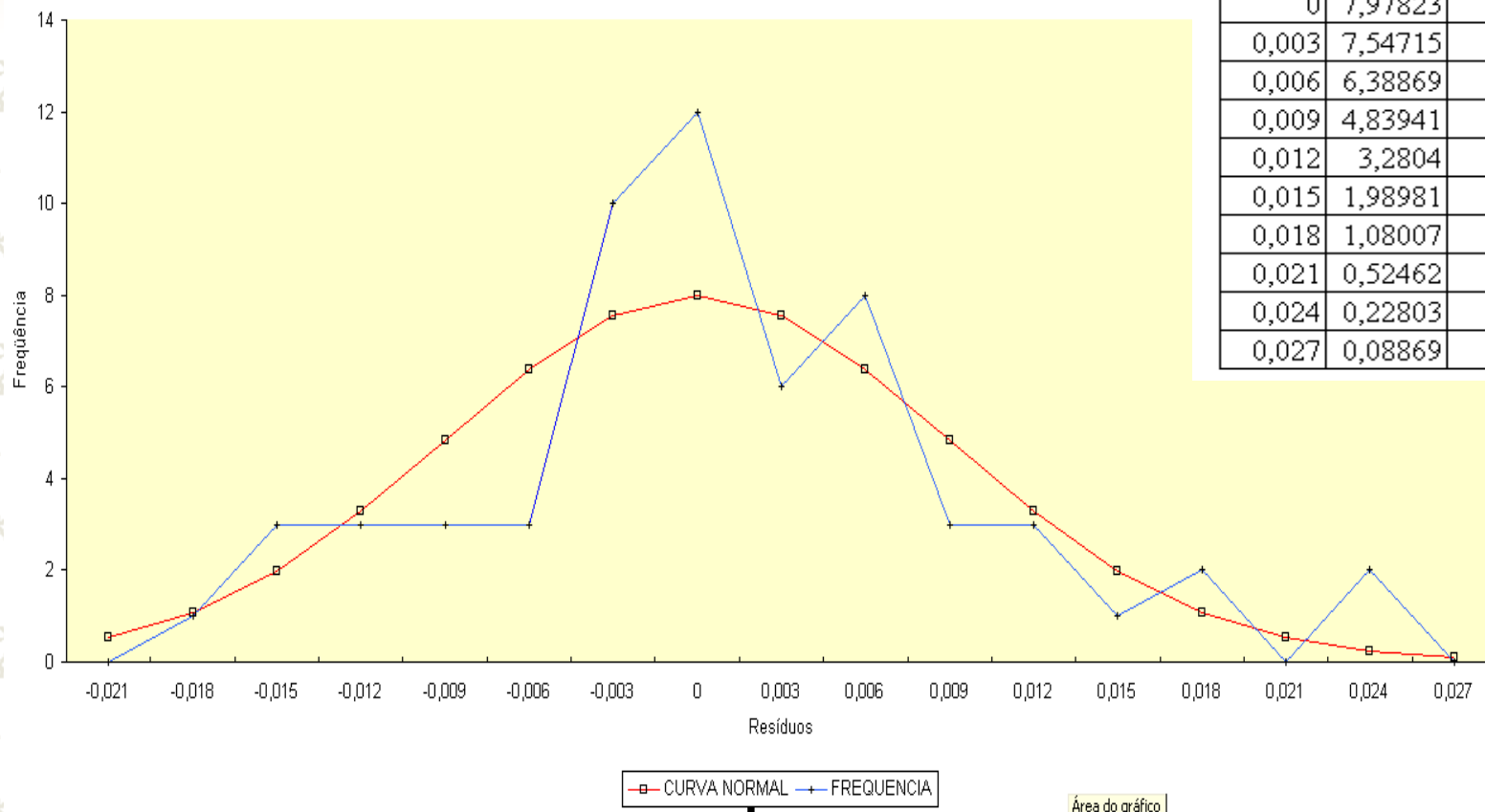
Faixas	Freq.	x	Freq
1,649	1	-0,021	0
1,652	3	-0,018	1
1,655	3	-0,015	3
1,658	3	-0,012	3
1,661	3	-0,009	3
1,664	10	-0,006	3
1,667	11	-0,003	10
1,670	5	0	12
1,673	8	0,003	6
1,676	3	0,006	8
1,679	3	0,009	3
1,682	1	0,012	3
1,685	2	0,015	1
1,688	0	0,018	2
1,691	2	0,021	0
	0	0,024	2
		0,027	0



CURVA NORMAL

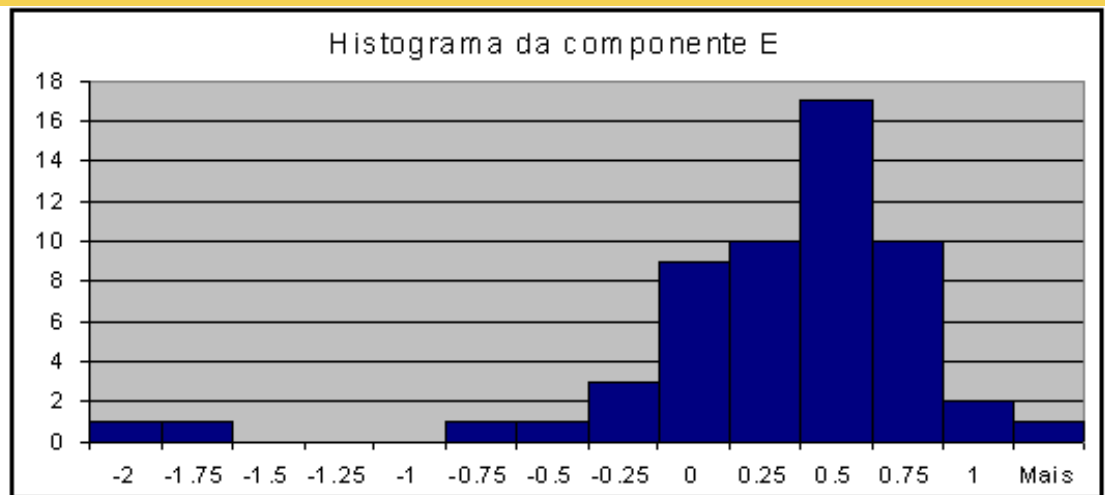
Parâmetro =		7,978
-0,021	0,52462	0
-0,018	1,08007	1
-0,015	1,98981	3
-0,012	3,2804	3
-0,009	4,83941	3
-0,006	6,38869	3
-0,003	7,54715	10
0	7,97823	12
0,003	7,54715	6
0,006	6,38869	8
0,009	4,83941	3
0,012	3,2804	3
0,015	1,98981	1
0,018	1,08007	2
0,021	0,52462	0
0,024	0,22803	2
0,027	0,08869	0

AREAS MEDIDAS COM PLANIMETRO
Frequências x Curva normal

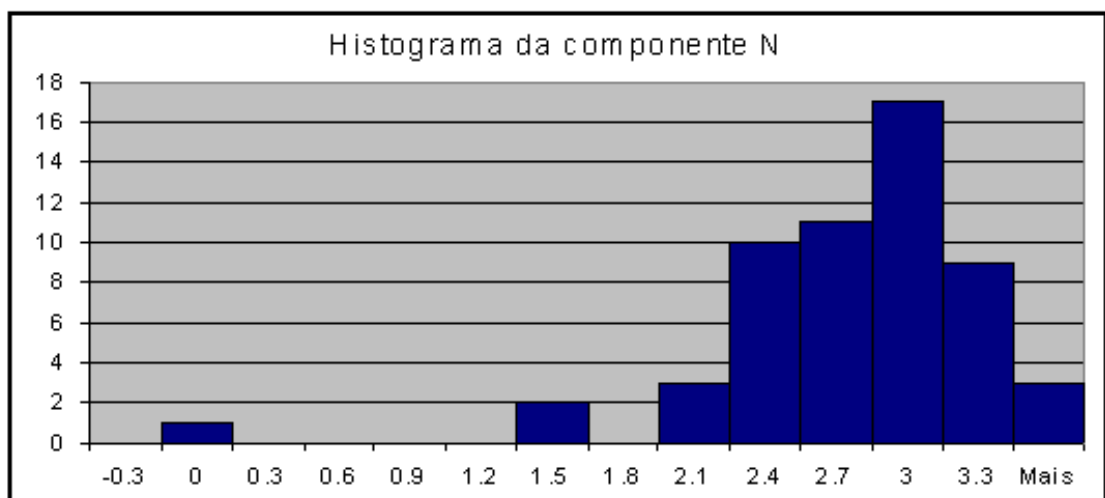


Exemplos de erros grosseiros

Estatística descritiva E	
Média	0.147
Erro padrão	0.073
Mediana	0.280
Modo	0.352
Desvio padrão	0.549
Variância da amostra	0.301
Curtose	7.236
Assimetria	-2.232
Intervalo	3.248
Mínimo	-2.166
Máximo	1.082
Soma	8.225
Contagem	56.000

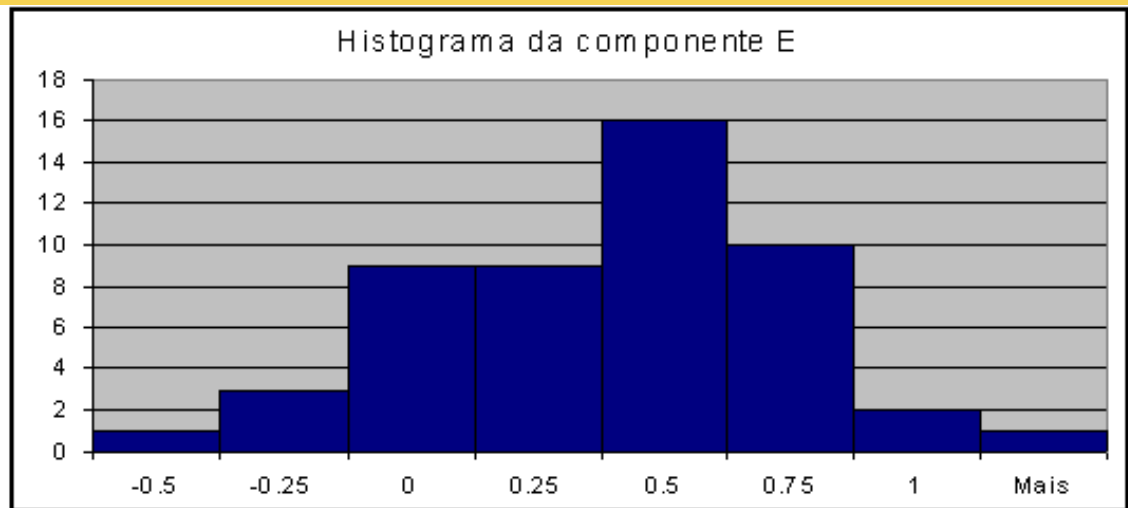


Estatística descritiva N	
Média	2.606
Erro padrão	0.077
Mediana	2.734
Modo	#N/D
Desvio padrão	0.577
Variância da amostra	0.333
Curtose	10.445
Assimetria	-2.481
Intervalo	3.651
Mínimo	-0.267
Máximo	3.384
Soma	145.941
Contagem	56.000



Após eliminar os erros grosseiros

Estatística descritiva E	
Média	0.250
Erro padrão	0.047
Mediana	0.291
Modo	0.352
Desvio padrão	0.336
Variância da amostra	0.113
Curtose	-0.037
Assimetria	-0.146
Intervalo	1.627
Mínimo	-0.545
Máximo	1.082
Soma	12.755
Contagem	51.000



Estatística descritiva N	
Média	2.701
Erro padrão	0.049
Mediana	2.740
Modo	#N/D
Desvio padrão	0.347
Variância da amostra	0.120
Curtose	-0.672
Assimetria	-0.155
Intervalo	1.352
Mínimo	1.999
Máximo	3.351
Soma	137.738
Contagem	51.000

