PSI-2432 Projeto e Implementação de filtros digitais: Método da sobreposição e soma

Magno T. M Silva

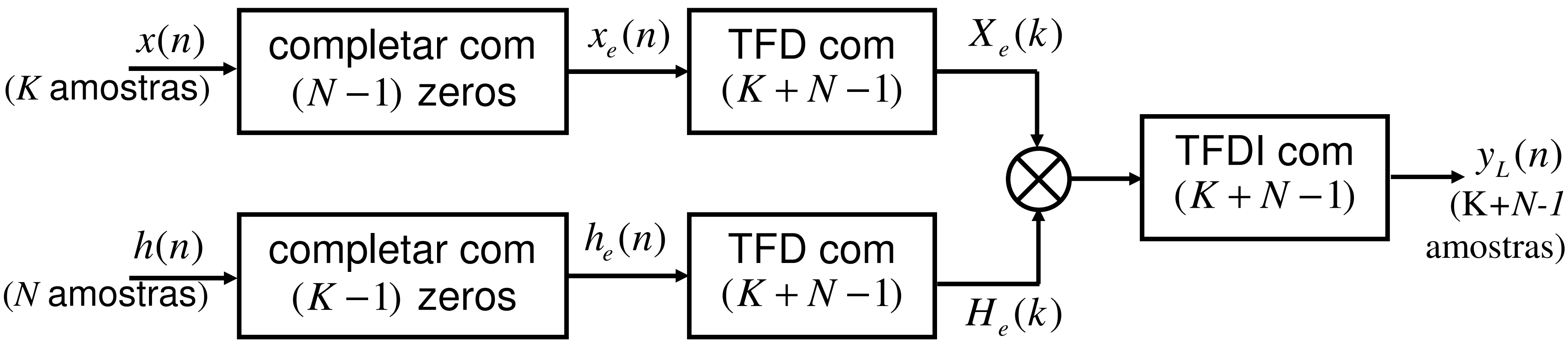
São Paulo, abril de 2014

Convolução linear com a TFD

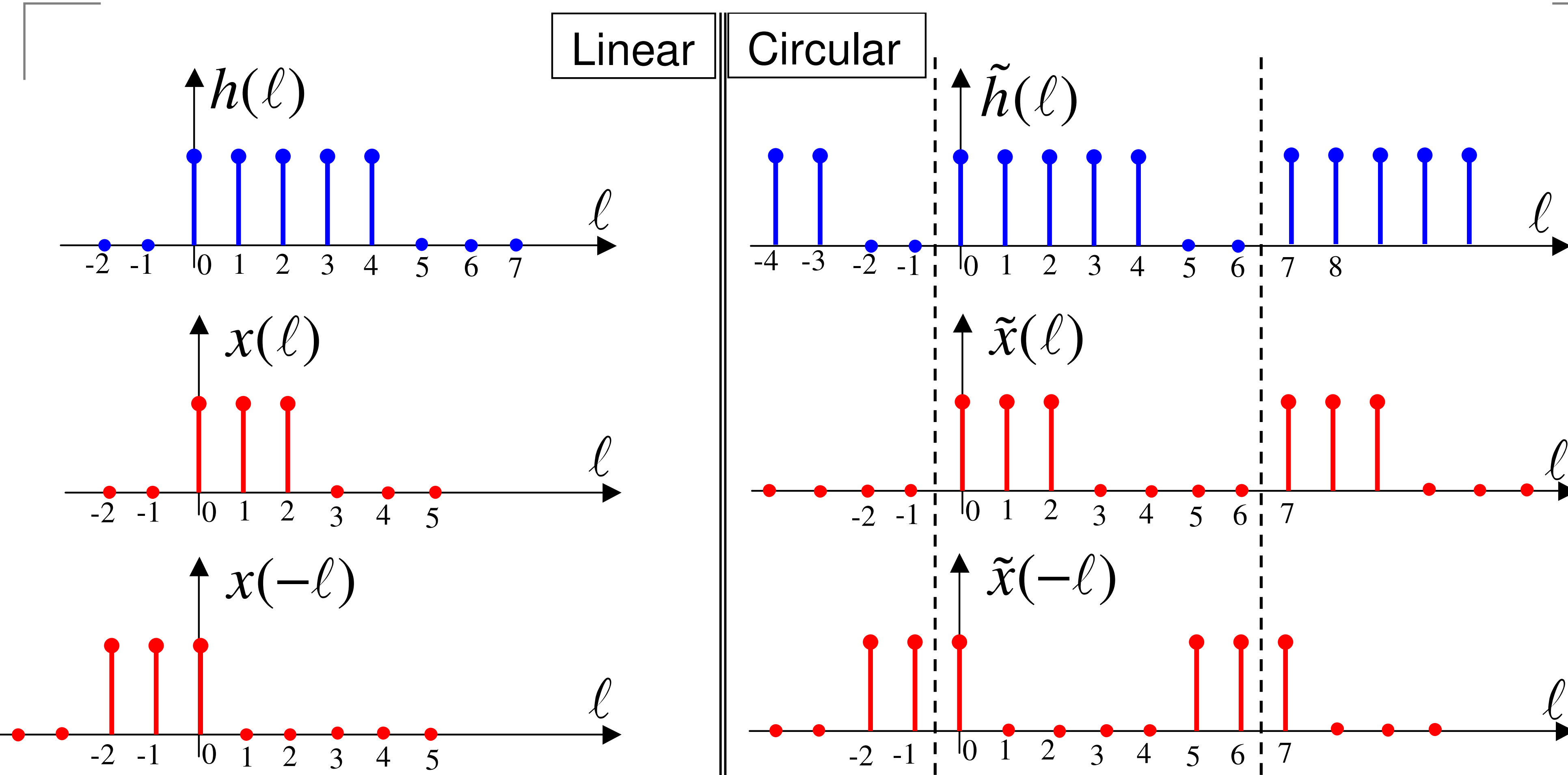
Sejam $x(n)$ e $h(n)$ duas seqüências de comprimento K e N. Completando essas sequências com zeros até $L = K + N - 1$, ou seja,

$$x_e(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq K-1 \\ 0, & K \leq n \leq L-1 \end{cases} \qquad h_e(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq L-1 \end{cases}$$

então, $y_L(n) = x(n) * h(n) = y_C(n) = x_e(n) \circledcirc h_e(n)$



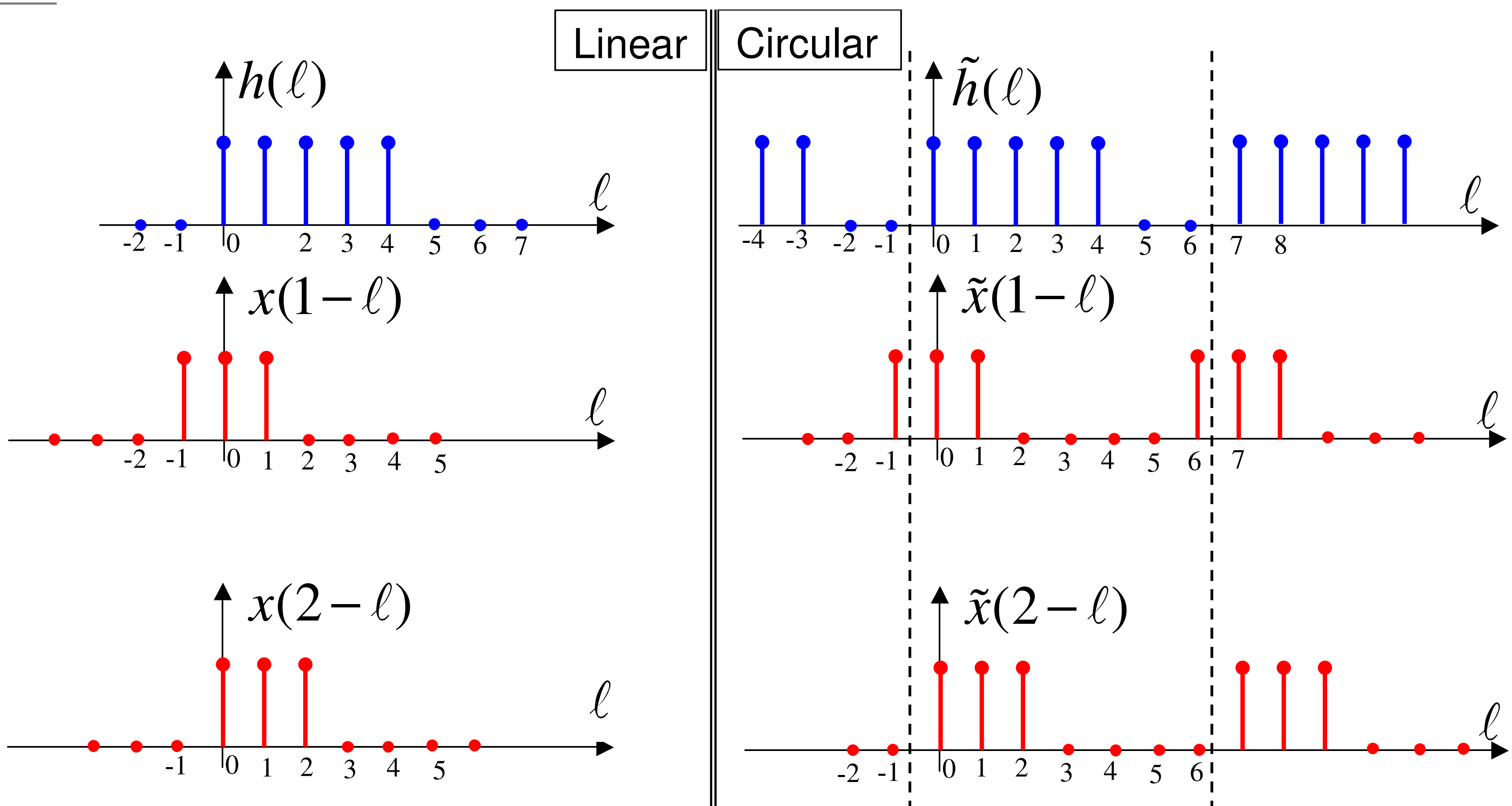
Exemplo - convolução linear com a TFD 1/4



$$\boxed{y_L(0) = 1}$$

$$\boxed{y_C(0) = 1}$$

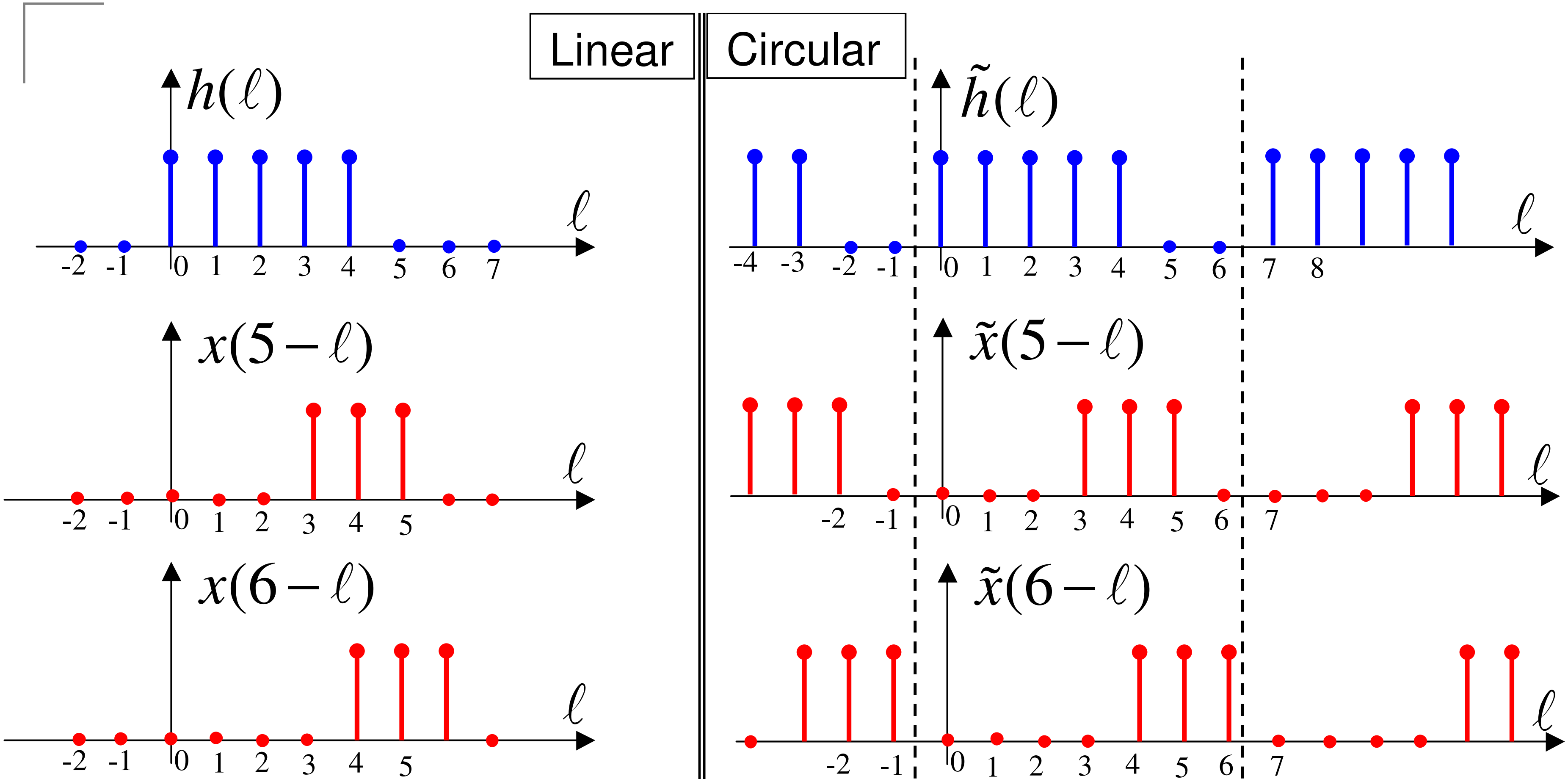
Exemplo - convolução linear com a TFD 2/4



$$y_L(1) = y_C(1) = 2$$

$$y_L(2) = y_C(2) = 3$$

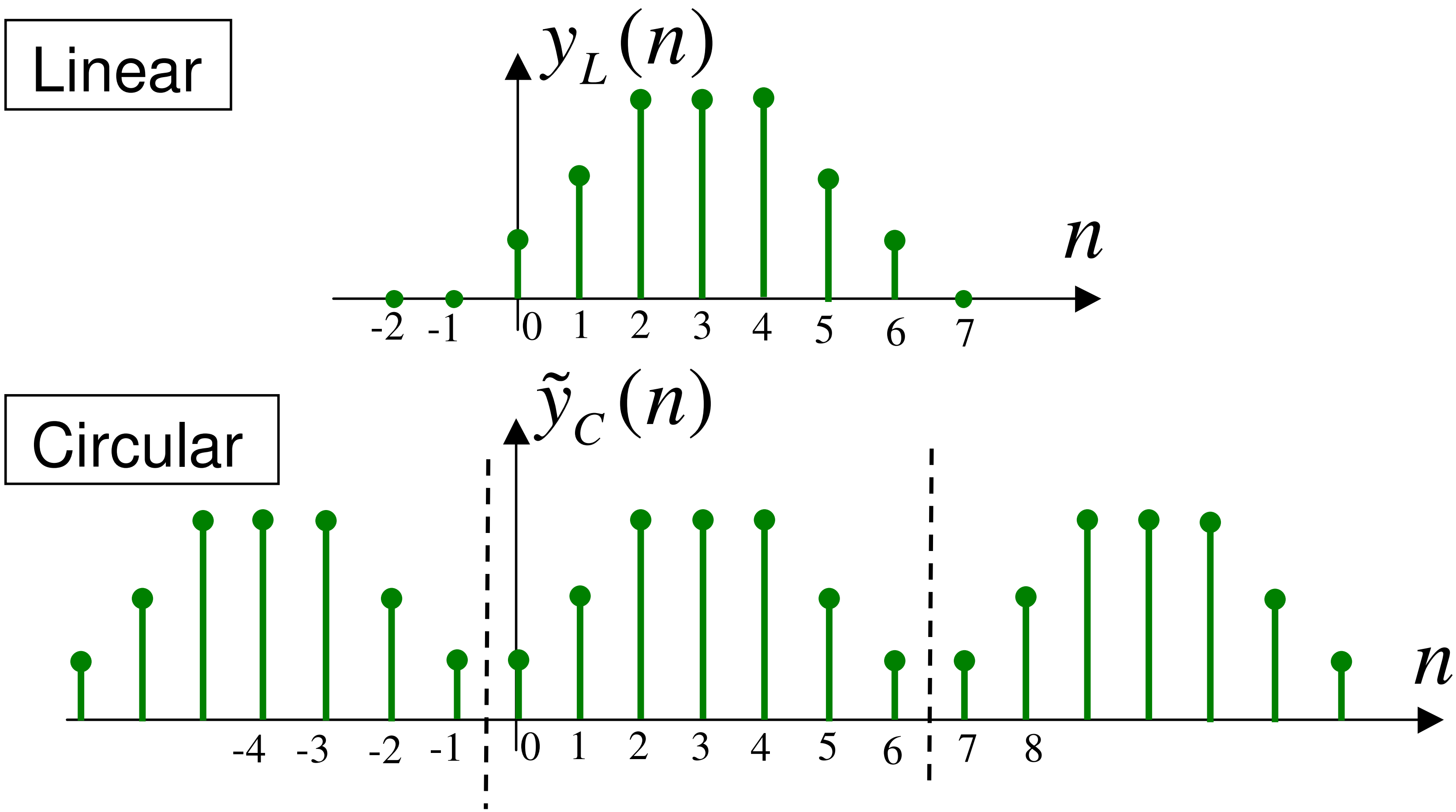
Exemplo - convolução linear com a TFD 3/4



$$y_L(5) = y_C(5) = 2$$

$$y_L(6) = y_C(6) = 1$$

Exemplo - convolução linear com a TFD 4/4



Filtragem de seqüências longas com a TFD

Há aplicações em que é necessário calcular a convolução linear de uma sequência de comprimento finito com outra de comprimento infinito ou de comprimento muito maior do que o da primeira sequência. Neste caso há dois métodos

- Método da sobreposição e soma
- Método da sobreposição e armazenamento

A seguir, vamos ver o método da sobreposição e soma com detalhe.

Método da sobreposição e soma 1/7

A sequência $x(n)$ pode ser decomposta em blocos de comprimento L:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_r(n)$$

sendo

$$x_r(n) = \begin{cases} x(n+rL), & \text{para } 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Método da sobreposição e soma 2/7

A convolução linear de $x(n)$ com $h(n)$ de comprimento N pode ser escrita como

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} h(\ell) \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_r(n-\ell) \right)$$
$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} h(\ell) x_r(n-\ell) \right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_r(n),$$

em que $y_r(n) = h(n) * x_r(n)$, tendo comprimento $M = L + N - 1$. Assim, $y_r(n)$ pode ser obtido usando a TFD e a TFDI.

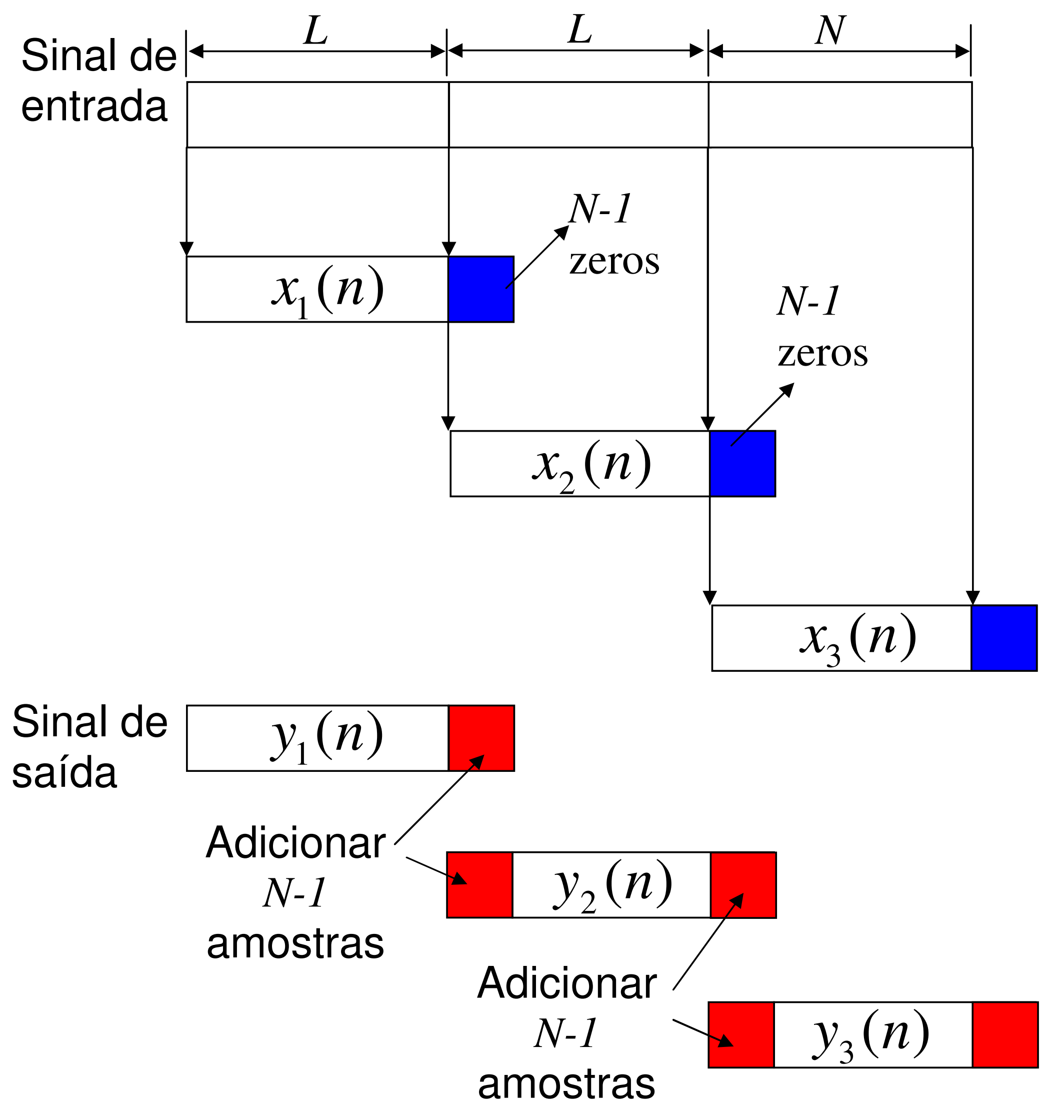
Método da sobreposição e soma 3/7

De $y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_r(n)$ é possível observar que

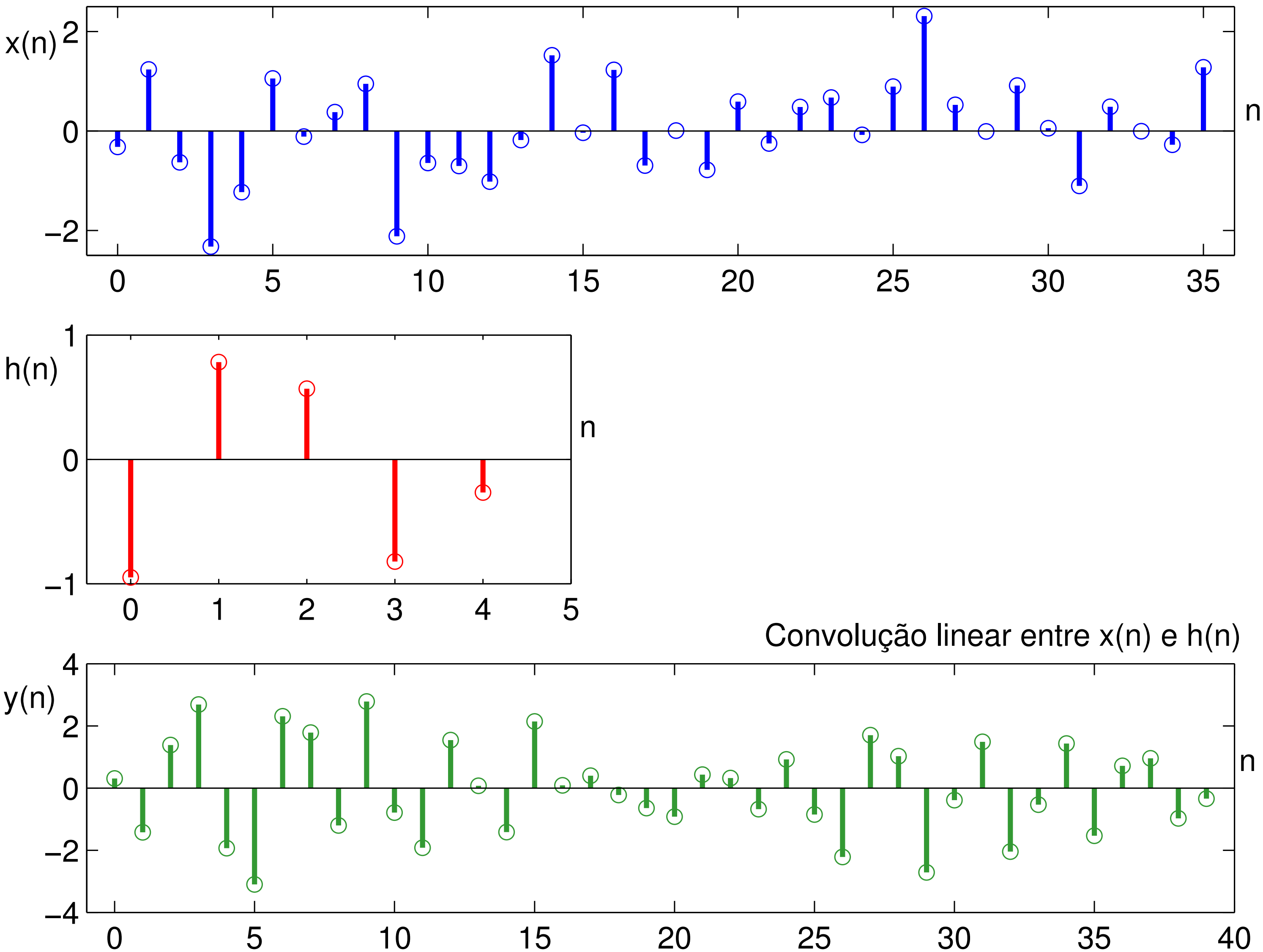
- $h(n) * x_0(n)$ tem comprimento $M = L + N - 1$ e é definido para $0 \leq n \leq L + N - 2$
- $h(n) * x_1(n)$ também tem comprimento $M = L + N - 1$, sendo definido no intervalo $L \leq n \leq 2L + N - 2$

Há uma sobreposição de $N - 1$ amostras entre duas convoluções adjacentes!

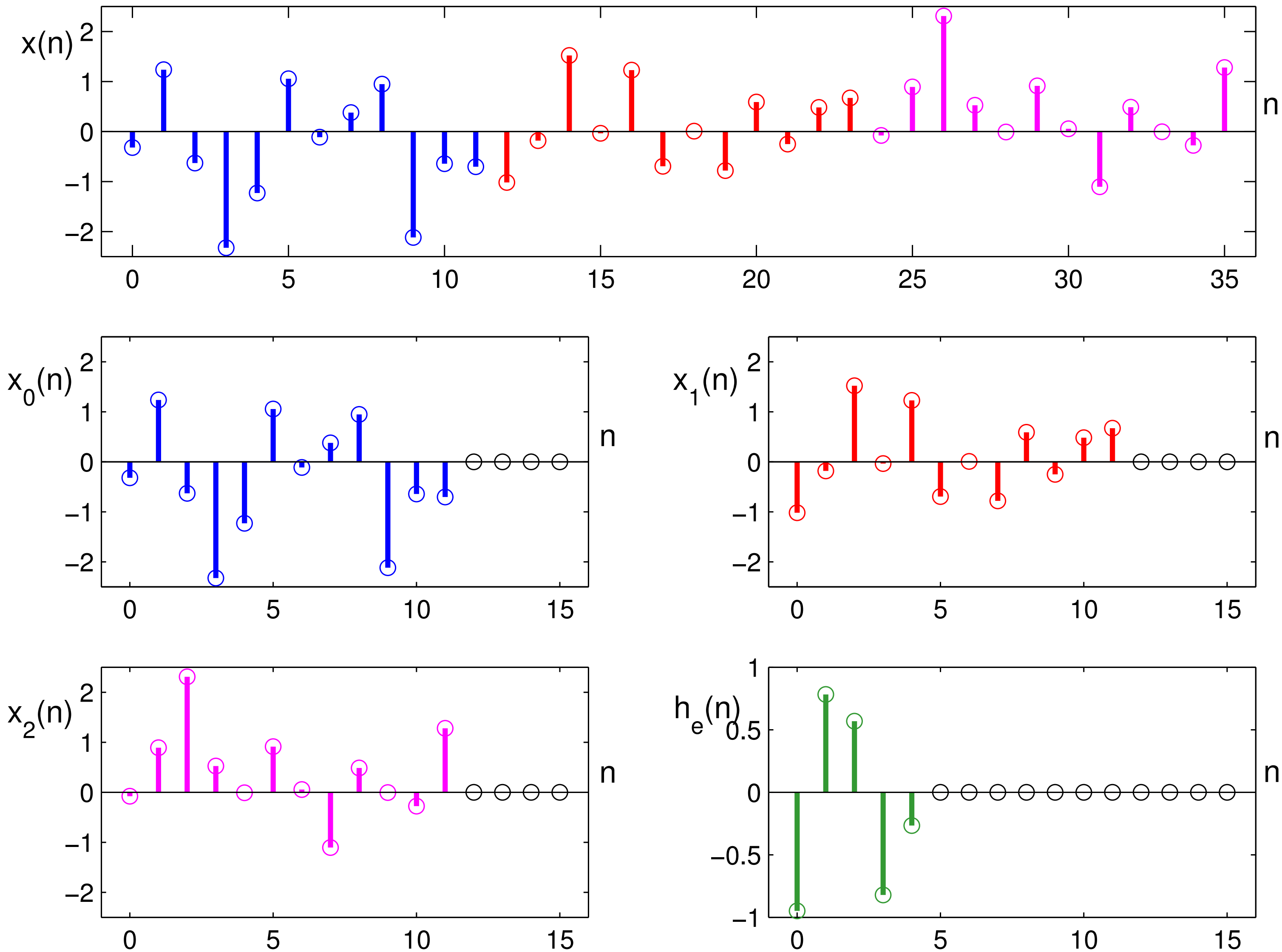
Método da sobreposição e soma 4/7



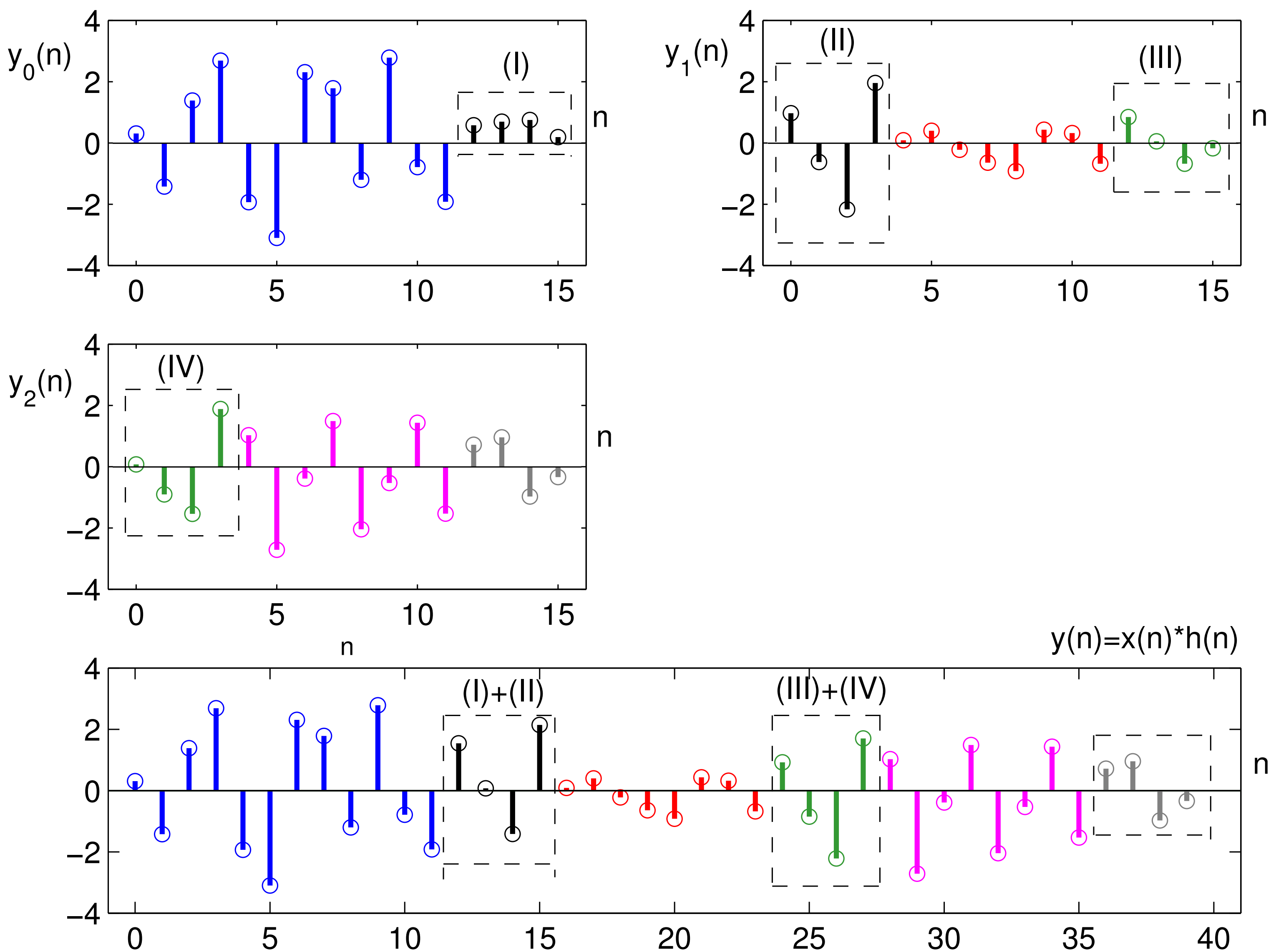
Método da sobreposição e soma 5/7



Método da sobreposição e soma 6/7



Método da sobreposição e soma 7/7



Referências

- A. V. Oppenheim, R. W. Shafer, J.R. Buck, *Discrete-time signal processing*. 2a. edição, Prentice Hall, 1999.
- S. K. Mitra, *Digital signal processing - a computer based approach*. 3a. edição, McGraw-Hill, 2006.
- J. G. Proakis, D. G. Manolakis, *Digital signal processing : principles, algorithms, and applications*, 4a. edição, Prentice Hall, 2006.