ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica

Lista de Exercícios/Problemas 1

Notação: O símbolo $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas reais; $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) := \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Por $\mathrm{Im}(A)$ e $\ker(A)$, entende-se, respectivamente, os conjuntos imagem e kernel de A.

Exercícios

Determinar, quando existir, a inversa das seguintes matrizes.

001) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 002) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 003) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 004) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 005) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

006) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ 007) $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$ 008) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 009) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ 010) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

011) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 012) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ 013) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 014) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 015) $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

016) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 017) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ 018) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 019) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ 020) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

021) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 022) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 023) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 024) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

025) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 026) $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ -7 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 027) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 028) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 0 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

029) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 030) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 031) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 032) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

033) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 034) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 035) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 036) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

037) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 038) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 039) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$

040) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 041) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

Os sistemas abaixo podem ser representados na forma matricial, e seja A a matriz dos coeficientes das variáveis. Determinar $\ker(A)$, $\mathrm{Im}(A)$ e a solução completa.

042) $\begin{cases} x & = 0 \\ y & = 1 \\ x + y & = 1 \end{cases}$ 043) $\begin{cases} x + z + w & = 0 \\ 2z + x & = 1 \\ w - x & = 2 \end{cases}$ 044) $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ y + x + w & = 1 \\ w - x + y & = 2 \end{cases}$ 045) $\begin{cases} x + 2z & = 11 \\ 2x - z & = 2 \\ z - x & = 1 \end{cases}$

046) $\begin{cases} x + y + z + w & = 0 \\ y - 2x & = 1 \\ 3y + 2w + 2z & = 2 \end{cases}$ 047) $\begin{cases} x + z + w & = 0 \\ 2z + x & = 1 \\ w - x & = 2 \end{cases}$ 048) $\{ \; x + y + z + w = 1$

Para um sistema linear $Ax = b$, determinar $\ker(A)$, $\mathrm{Im}(A)$ e a solução completa.

049) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 050) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

051) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 052) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

053) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 054) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

055) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 056) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

057) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 058) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

059) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 060) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Estudar (existência e unicidade da solução) o sistema linear $Ax = b$ segundo a variável ξ.

061) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \xi \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ 062) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix}$ 063) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} \xi \\ 2\xi \end{pmatrix}$

064) $A = \begin{pmatrix} \xi & \xi \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 065) $A = \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 2\xi & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ 066) $A = \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 2\xi & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

067) $A = \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ \xi & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 068) $A = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} \xi \\ 2 \end{pmatrix}$ 069) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & \xi \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

070) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & \xi \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ 071) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 3 \\ \xi \end{pmatrix}$ 072) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 3 \\ \xi \end{pmatrix}$

073) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} \xi \\ 2\xi \end{pmatrix}$ 074) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$

Problemas

p1) (**Método de Newton-Raphson**) A fim de determinar a(s) raíz(es) de $f(x) = 0$, sendo f diferenciável, recorre-se a um método iterativo que segue a seguinte prescrição:

(i) Dado um ponto x_n (candidato à solução), calcula-se $f(x_n)$.
(ii) Determina-se a reta tangente r_n no ponto $(x_n, f(x_n))$.
(iii) O novo ponto candidato à solução passa a ser x_{n+1}, sendo $(x_{n+1}, 0)$ o ponto de intersecção entre a reta r_n e o eixo das abscissas.
(iv) Retorno a (i).

Nota 1: Identificar situações de sucesso deste método, bem como levantar casos onde a prescrição acima falha na determinação da raíz (com precisão arbitrária).

075) Mostrar que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, onde f' denota a derivada de f.

076) Recorrer ao método de Newton-Raphson para resolver a equação não-linear $\ln x = x^{-1}$; usar $x_0 = 1$ como condição inicial.

Nota 2: A relação recursiva acima pode ser escrita como $f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n)$ com a imposição $f(x_{n+1}) = 0$ (identificar o propósito desta condição).

077) Sejam $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ um sistema (não necessariamente linear) com duas incógnitas. A partir da "Nota 2", mostrar que a relação de recorrência do método de Newton-Raphson para este sistema pode ser expresso por

$$z_{n+1} = z_n - J_n^{-1} b_n \,,$$

onde

$$z_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} , \quad b_n := \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_n := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix} .$$

A matriz J_n é a matriz jacobiana e, para os propósitos do exercício, será considerada não-singular.

078) Recorrer ao método de Newton-Raphson para resolver o sistema não-linear $x^2 + y^3 = 3$ e $x^4 - 2y^2 = 2$; usar $(x_0, y_0) = (1, 1)$ como condição inicial. Comparar o resultado com a solução exata.

p2) Seja A uma matriz $m \times n$ e x_p uma solução particular de $Ax = b$.

079) O conjunto de soluções dessa equação é dada por $S := \{(x_p + x_k) \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) : x_k \in \ker(A)\}$. Mostrar que, mesmo encontrando uma solução particular $\tilde{x}_p$ diferente de x_p, o conjunto de soluções continua sendo S. Dar um exemplo (de A, b, x_p e $\tilde{x}_p$, assim como a relação entre as duas soluções particulares).

080) Se A for não-singular (*id est*, a inversa A^{-1} existe), mostrar que a solução completa coincide com a solução particular.