Professor: Jefferson Bertolai
Monitor:
Outubro de 2016

Microeconomia II
Programa de Pós-Graduação em Economia
FEARP - USP

Seção 23.F - Optimal Bayesian Mechanisms

Exercise 1 (**MWG 23.F.2**).

Exercise 2 (**MWG 23.F.6**).

Exercise 3 (**MWG 23.F.7**).

Exercise 4 (**MWG 23.F.9**).

Exercise 5 (A Camping Trip Economy). Considere um grupo de N pessoas em sua última noite de acampamento. Cada membro do grupo possui e unidades de comida[1] e o grupo planeja 2 refeições antes de voltar para casa na manhã do dia seguinte:

- (i) um lanche na madrugada e (ii) um café da manhã.

Denote x o bem no primeiro período (comida consumida na madrugada) e y o bem no segundo período (comida consumida na manhã). Existe um depósito (máquina de lanches) no qual a comida pode ser armazenada à noite (e somente à noite).

- Cada unidade de comida no depósito se transforma em $R > 1$ unidades do bem y (se armazenada até de manhã) e 1 unidade do bem x (se retirada do depósito na madrugada).[2]

Cada pessoa sabe que acordará em algum momento da madrugada. Mas não tem certeza se quando acordar estará com muita ou com pouca fome. Sabe, no entanto, que terá muita fome com probabilidade $p \in [0, 1]$ e terá pouca fome com probabilidade $(1 - p)$. A utilidade de cada pessoa será

$$\begin{cases} v(x) & \text{se ela acorda com muita fome} \\ v(x+y) & \text{se ela acorda com pouca fome} \end{cases}$$

em que $v(c) = \frac{1}{1-\delta}c^{1-\delta}$, para $\delta > 1$. Dessa forma, pode-se definir o tipo do indivíduo i por $\theta_i \in \{0, 1\}$, de forma que a utilidade de pessoa i (usando a notação do capítulo 23) é

$$u_i(x, y, \theta_i) = v(x + \theta_i y).$$

[1] Suponha que existe somente um tipo de comida e que ela seja perfeitamente divisível.

[2] Cada unidade de comida retirada do depósito de madrugada, bem x, se transforma em 1 unidade de comida de manhã, bem y.

A probabilidade de 2 indivíduos acordarem no mesmo momento é nula. Logo, a sequência em que vão acordar formará uma fila de pessoas (de tamanho N) para acessar o depósito. Chamaremos de i o indivíduo que acordar na i-ésima posição da referida fila, x_i o consumo de i na madrugada e y_i o consumo de i pela manhã. A probabilidade de acordar na n-ésima posição da fila é $1/N$ para todo $n \in \{1, \ldots, N\}$. Portanto, se $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_N)$ denota o vetor de tipos e $\Theta = \{0,1\}^N$ é o espaço de tipos, então a utilidade esperada *ex ante* do indivíduo é

$$U(\bar{x}, \bar{y}) := \sum_{\theta \in \Theta} \Pr(\theta) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v(x_n(\theta) + \theta_n y_n(\theta)) \right)$$

em que $\Pr(\theta) = p^{N-|\theta|}(1-p)^{|\theta|}$, para $|\theta| = \sum_i \theta_i$, e

$$\begin{aligned} \bar{x} &: \Theta \mapsto \mathbb{R}^N, \ \text{com } \bar{x}(\theta) = (x_1(\theta), \cdots, x_N(\theta)), \\ \bar{y} &: \Theta \mapsto \mathbb{R}^N, \ \text{com } \bar{y}(\theta) = (y_1(\theta), \cdots, y_N(\theta)). \end{aligned}$$

O tipo θ_i do indivíduo i (pouca ou muita fome) é informação privada: somente i conhece θ_i. O indivíduo i pode usar a tecnologia de armazenagem (depósito) de forma autárquica:

- guarda sua dotação e com seu nome anotado,
- terá à disposição e unidades de bens na madrugada e Re unidades de bens pela manhã.
- se retirar $x_i \leqslant e$ unidades do depósito na madrugada, terá somente $R(e - x_i)$ unidades pela manhã.

(a) Demonstre que, em autarquia (uso do depósito de forma autárquica), o indivíduo i escolhe sacar nada na madrugada ($x_i = 0$) se acordar com pouca fome e sacar toda sua dotação na madrugada ($x_i = e$) se acordar com muita fome. Dessa forma, sua utilidade esperada *ex ante* será

$$U_a := pv(e) + (1-p)v(Re)$$

Os indivíduos podem usar a tecnologia de armazenagem (depósito) de forma conjunta:

- guardam a dotação agregada Ne sem nome anotado,
- terão à disposição Ne unidades de bens na madrugada e RNe unidades de bens pela manhã.
- se retirar $\sum_i x_i \leqslant Ne$ unidades do depósito na madrugada, terão somente $R(Ne - \sum_i x_i)$ unidades pela manhã.

Os indivíduos precisam escolher como a comida será dividida, ou seja, precisam escolher uma Função de Escolha Social $f(\cdot) = (\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot))$ tal que $f : \Theta \mapsto \mathbb{X}$.

- Como os indivíduos são *ex ante* idênticos, a FES $f(\cdot)$ será escolhida para maximizar seu bem estar *ex ante* dos indivíduos, $U(\bar{x}, \bar{y})$.

- Para factibilidade, a FES $f(\cdot) = (\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot))$ precisa satisfazer para todo $\theta \in \Theta$

$$(x_i(\theta), y_i(\theta)) \geqslant 0, \ \forall i, \quad \sum_i x_i(\theta) \leqslant Ne \text{ e } \sum_i y_i(\theta) \leqslant R(Ne - \sum_i x_i(\theta)). \tag{FE}$$

- Adicionalmente, denotando a história de tipos até a i-ésima posição por $\theta^i = (\theta_1, \cdots, \theta_i)$, factibilidade requer que a FES $f(\cdot)$ respeite a ***restrição de serviço sequencial***:

$$x_i(\theta^i, \theta'_{i+1}, \cdots, \theta'_N) = x_i(\theta^i, \theta''_{i+1}, \cdots, \theta''_N) =: \mathtt{x}_i(\theta^i) \tag{SS}$$

  para todo par $(\theta'_{i+1}, \cdots, \theta'_N)$ e $(\theta''_{i+1}, \cdots, \theta''_N)$. Ou seja, o pagamento na i-ésima posição não pode depender do tipo do indivíduo na posição $n > i$.

(b) Demonstre que $(\bar{x}, \bar{y})$ maximiza $U(\bar{x}, \bar{y})$ sujeito à (FE) e (SS) somente se para todo i e todo $\theta \in \Theta$

$$\mathtt{x}_i(\theta^{i-1}, 1) = 0, \quad y_i(0, \theta_{-i}) = 0, \quad \mathtt{x}_i(\theta^{i-1}, 0) > 0 \quad \text{e} \quad y_i(1, \theta_{-i}) = \mathtt{y}(1, \theta_{-i}) \geqslant 0.$$

para algum $\mathtt{y}(\theta) > 0$. Ou seja, indivíduos com pouca fome (tipo 1) não consomem na madrugada, indivíduos com muita fome (tipo 0) não consomem pela manhã. Todos aqueles com tipo 1 consomem a mesma quantidade pela manhã e todos consomem algo em algum período.

O uso conjunto da tecnologia de armazenagem, representado por $f(\cdot) = (\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot))$, é individualmente racional *ex ante* (satisfaz restrição de participação *ex ante*) se

$$U(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant U_a \tag{IR}$$

(c) Demonstre que se $(\bar{x}, \bar{y})$ maximiza $U(\bar{x}, \bar{y})$ sujeito à (FE) e (SS), então $(\bar{x}, \bar{y})$ satisfaz (IR).

Note que, sob informação privada, o uso conjunto da tecnologia de armazenagem é implementável em BNE somente se for desenhado de forma que convence as pessoas a revelar (direta ou indiretamente) seu tipo para todo possível $\theta \in \Theta$. O mecanismo direto $\Gamma = (\Theta_1, \cdots, \Theta_N, f(\cdot))$ precisa induzir o indivíduo i a revelar a verdade.

- i revela a verdade sob Γ quando sabe sua posição na fila sse

$$\pi_i(\theta_i | \theta_i, f) \geqslant \pi_i(\hat{\theta}_i | \theta_i, f), \qquad \forall \hat{\theta}_i \in \{0, 1\} \tag{IC$_{GL}$}$$

- i revela a verdade sob Γ quando **não** sabe sua posição na fila sse

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \pi_i(\theta_i | \theta_i, f) \geqslant \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \pi_i(\hat{\theta}_i | \theta_i, f), \qquad \forall \hat{\theta}_i \in \{0, 1\} \tag{IC$_{PS}$}$$

  em que $\pi_i(\hat{\theta}_i | \theta_i, f) := E_{\theta_{-i}} \left(v \left[x_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) + \theta_i y_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) \right] | \theta_i \right)$.

(d) Demonstre que se (IC_{GL}) é satisfeita sob Γ, então (IC_{PS}) é satisfeita sob Γ.

(e) Calcule o contrato ótimo $(\bar{x}, \bar{y})$ que maximiza $U(\bar{x}, \bar{y})$ sujeito à (FE) e (SS) quando $N = 2$ e $\delta = 2$.

(f) Verifique se o contrato calculado no item **(e)** satisfaz as restrições (IC_{GL}) e (IC_{PS})? Sua resposta depende do valor de e ou de p?

Considere um indivíduo que acorda na madrugada com pouca fome (descobre ser do tipo 1) e não sabe sua posição na fila (posição i). Se ele acredita que todos os demais indivíduos estão comendo (tirando a comida do depósito) na madrugada, independentemente de estarem ou não com muita fome, ele pode ficar preocupado se haverá comida o suficiente para ele pela manhã.

- Se ele achar que sobrará pouca comida pela manhã, ele certamente preferirá comer (tirar do depósito) sua comida já na madrugada.
- se todos os demais indivíduos estão anunciando $\hat{\theta}_j = 0$, independentemente de θ_j, haverá $R(Ne - \sum_{j \neq i} x_j(1, \mathbf{0}_{-i}))$ unidades de comida no depósito pela manhã à disposição de i.[3]
- Logo, i prefere consumir já na madrugada se

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v[x_n(\mathbf{0}^{n-1}, 0))] \geqslant \sum_{n=1}^{N} v\left[R\left(Ne - \sum_{j \neq n} x_j(1, \mathbf{0}_{-n})\right)\right] \tag{RUN}$$

(g) Verifique se o contrato calculado no item **(e)** satisfaz a condição (RUN). Sua resposta depende do valor de e ou de p?

Quando a FES $f(\cdot) = (\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot))$ é BIC, ela possui um BNE no qual no qual os indivíduos revelam a verdade:

- aqueles com pouca fome esperam para consumir até de manhã
- aqueles com muita fome consomem somente na madrugada.

Se $f(\cdot)$ é BIC e satisfaz a condição (RUN) para todo indivíduo do tipo 1, então ela possui um outro BNE (além do BNE com revelação da verdade), no qual todos os indivíduos consomem na madrugada: tanto aqueles com muita fome, quanto aqueles com pouca fome.

[3] O vetor de tipos $\theta = \mathbf{0}$ é tal que $\theta_j = 0$ para todo j.