Aula 5

Limites laterais

Para cada x real, define-se o *valor absoluto* ou *módulo de* x como sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|+3| = +3$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$, $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ (pois $1 - \sqrt{2} < 0$).

Para apresentar o conceito de limites laterais, consideraremos a função

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|}$$

cujo campo de definição (domínio) é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

Se $x > 0$, $|x| = x$ e portanto $f(x) = x + 1$. Se $x < 0$, $|x| = -x$ e portanto $f(x) = x - 1$. O gráfico de f é esboçado na figura 5.1.

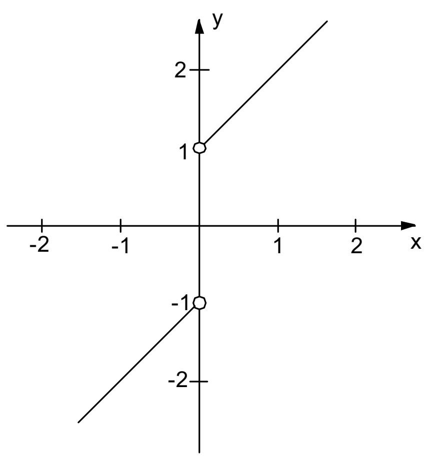

Figura 5.1. Esboço do gráfico de $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$.

Se x tende a 0, mantendo-se > 0, $f(x)$ tende a 1. Se tende a 0, mantendo-se < 0, $f(x)$ tende a -1.

Dizemos então que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela direita*, é igual a 1, e denotamos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Dizemos também que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela esquerda*, é igual a -1, e denotamos

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

De um modo geral, sendo $f(x)$ uma função, se x_0 está no interior ou é extremo inferior de um intervalo contido em $D(f)$,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \ \text{ significa } \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Se x_0 está no interior ou é extremo superior de um intervalo contido em $D(f)$,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \ \text{ significa } \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Exemplo 5.1

Consideremos agora a função $f(x) = 1/x$. Conforme já observado no exemplo 4.7, aula 4 (reveja-o), esta função não tem limite quando $x \to 0$.

Temos $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Assim, 0 é extremo superior do intervalo $]-\infty, 0[\subset D(f)$, e também é extremo inferior do intervalo $]0, +\infty[\subset D(f)$.

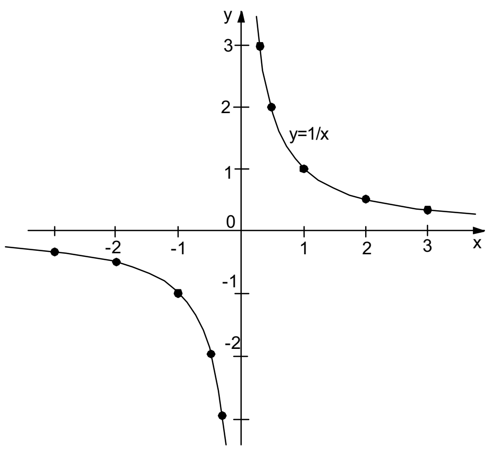

Figura 5.2. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

No esboço do gráfico de f, figura 5.2, ilustramos a ocorrência dos limites laterais

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

(Também ilustramos que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.)

Neste caso, é conveniente denotar, introduzindo novos símbolos em nossa álgebra de limites,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Observação 5.1 *Em geral, dizemos que*

$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ *se*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, *e*

(ii) $f(x)$ *mantém-se* > 0 *quando* $x \to x_0$, *ou seja,* $f(x) > 0$ *para todo* x *suficientemente próximo de* x_0.

Dizemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ *se*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, *e*

(ii) $f(x)$ *mantém-se* < 0 *quando* $x \to x_0$, *ou seja,* $f(x) < 0$ *para todo* x *suficientemente próximo de* x_0.

Escrevemos ainda $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0^+$ *para indicar que*
(i) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0$, *e (ii)* $f(x) > 0$ *quando* $x \to x_0$ *e* $x > x_0$.

Analogamente, podemos também conceituar os casos

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0^-$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = 0^-$, *e* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = 0^+$.

Nossa álgebra de limites passa a contar agora com os seguintes novos resultados:

$$\frac{c}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad \frac{c}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Também é fácil intuir que

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

Exemplo 5.2

$\lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0^+$, *portanto* $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-3}{x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5}{x-3} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$$

Exemplo 5.3 *Calcular* $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x+2}{|x+2|}$ *e* $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x+2}{|x+2|}$

Solução. Observe que $x+2>0$ se e somente se $x>-2$.

Assim sendo, se $x>-2$, temos $x+2>0$ e então $|x+2| = x+2$.

Por outro lado, se $x<-2$, temos $x+2<0$ e então $|x+2| = -(x+2)$.

Assim sendo, temos

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x\to -2} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x\to -2} -1 = -1$$

Observação 5.2 *A afirmação*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

é equivalente à afirmação, simultânea, de que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a \quad e \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = a$$

Se no entanto $f(x)$ é definida para $x>x_0$, mas não é definida para $x<x_0$, então $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ significa $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$

Por exemplo, $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, muito embora $\sqrt{x}$ não esteja definida para $x<0$. Neste caso, afirmar que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ significa que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, já que não se define o limite $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$

Observação 5.3 (O gráfico de uma função contínua em $[a,b]$)

No exemplo ao início da aula, vimos que a função $f(x) = x + x/|x|$ tem limites laterais diferentes no ponto $x_0 = 0$, sendo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Assim, conforme podemos vizualizar na figura 5.1, o gráfico de f apresenta um salto no ponto 0.

Também a função $f(x) = 1/x$ tem um salto no ponto 0. Agora porém o salto é infinito, sendo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

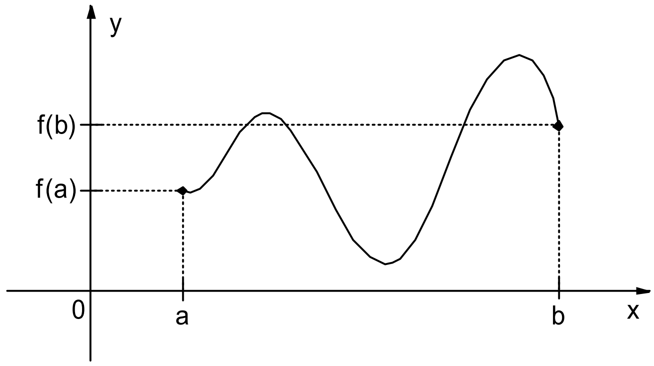

Figura 5.3. f é contínua e diferenciável no intervalo $[a, b]$.

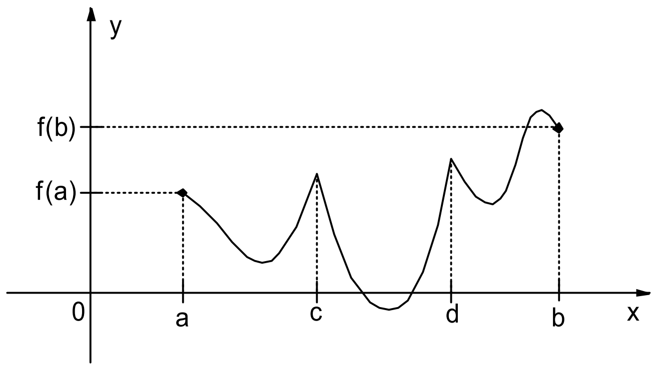

Figura 5.4. f é contínua no intervalo $[a, b]$, mas não tem derivadas nos pontos c e d.

Na aula 4, estivemos observando que a função $f(x) = 1/x^2$ tem limite infinito no ponto 0: $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Aqui, nas proximidades de 0, o gráfico "salta" para cima dos dois lados, apresentando uma quebra na curva do gráfico.

Quando uma função $f(x)$ é contínua nos pontos de um intervalo $[a, b]$, a curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gráfico de f no intervalo $[a, b]$, não apresenta quebras ou saltos.

Intuitivamente falando, podemos desenhar o gráfico ligando o ponto inicial $A = (a, f(a))$ ao ponto final $B = (b, f(b))$ sem tirarmos o lápis do papel, tal como na figura 5.3.

Observação 5.4 (Uma função contínua pode não ter derivada sempre) *Já na figura 5.4 temos uma ilustração de uma função contínua no intervalo $[a, b]$ que, no entanto, não tem derivada em dois pontos desse intervalo. Note que nos pontos correspondentes a c e d não é possível traçar retas tangentes ao gráfico de f.*

Observação 5.5 (Continuidade significa $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$) *Na observação 2.1, aula 2, vimos que, sendo $x_0 \in D(f)$, se existe $f'(x_0)$ então $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$. Na verdade, não é necessário termos f diferenciável x_0 para que tenhamos $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.*

A condição necessária e suficiente para que tenhamos $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ *é que* f *seja contínua no ponto* x_0.

Vejamos: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Fazendo $x = x_0 + \Delta x$, *temos* $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. *Temos que* $\Delta x \to 0$ *se e somente se* $x \to x_0$.

Se $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$, *então* $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, *logo* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)] = 0 + f(x_0) = f(x_0)$. *Assim,* f *é contínua em* x_0.

Se f *é contínua em* x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. *Logo,* $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, *e então* $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

Assim, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Quando existe $f'(x_0)$, *temos* $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ *e então* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *ou seja*

Se f tem derivada em x_0 então f é contínua em x_0.

No entanto, podemos ter f *contínua em* x_0, *sem ter derivada em* x_0. *Veja problemas 5 e 6 abaixo.*

5.1 Problemas

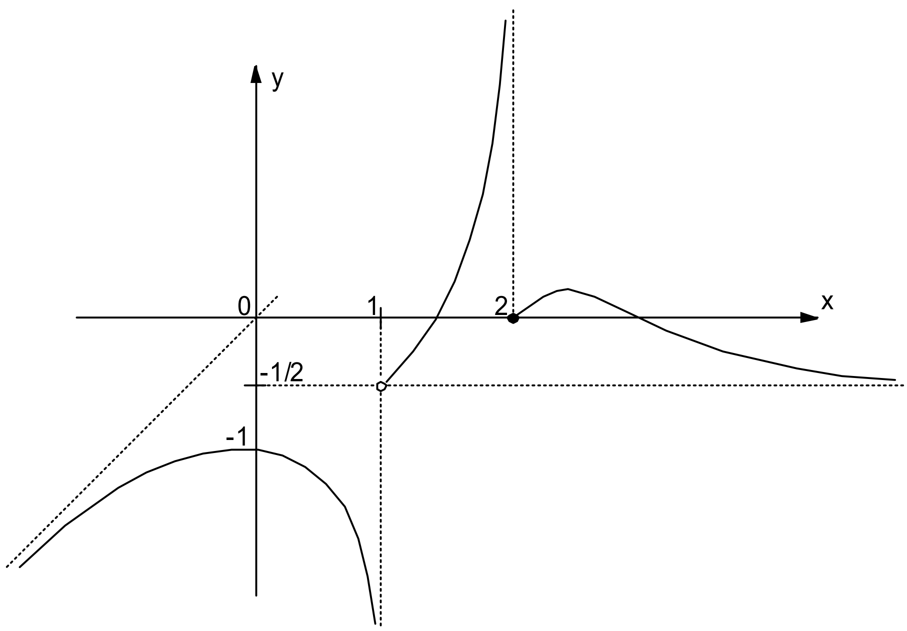

Figura 5.5.

1. Na figura 5.5 está esboçado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Complete as igualdades:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ (c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$
(d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ (e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$
(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$ (h) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

2. Em que pontos a função f do problema anterior é definida? Em quais pontos é contínua?

3. Calcule os limites laterais

(a) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{|\pi - x|}{x - \pi}$ (b) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{|\pi - x|}{x - \pi}$ (c) $\lim\limits_{x\to 8^-} \dfrac{1}{x - 8}$
(d) $\lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{1}{x - 8}$ (e) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{2 - x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x - 2}$

4. Calcule os limites $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ e diga se existe o limite $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$. Diga também se f é contínua no ponto -3.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - 3x} & \text{se } x < -3 \\ \sqrt[3]{x + 2} & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{x^2} & \text{se } x \leq -3 \\ \sqrt[3]{4 + x} & \text{se } x > -3 \end{cases}$

5. Verifique que a função $f(x) = |x|$ é contínua em $x_0 = 0$, mas não existe $f'(0)$ (mostre que não existe o limite $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$). Mostre que existem os limites laterais $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ e $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$, chamados respectivamente de *derivada direita de f no ponto* 0 $(f'(0^+))$ e *derivada esquerda de f no ponto* 0 $(f'(0^-))$. Esboce o gráfico de f e interprete geometricamente os fatos deduzidos acima.

6. Verifique que a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua em $x_0 = 0$, mas $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = +\infty$. Neste caso, por abuso de linguagem, dizemos que $f'(0) = +\infty$. Esboce o gráfico de f, traçando-o cuidadosamente através dos pontos de abcissas 0, $\pm 1/8$, ± 1, ± 8, e interprete geometricamente o fato de que $f'(0) = +\infty$.

5.1.1 Respostas e sugestões

1. (a) $-\infty$ (b) $-1/2$ (c) $+\infty$ (d) 0 (e) -1 (f) -1 (g) $-1/2$ (h) $-\infty$
2. A função f é definida em $\mathbb{R} - \{1\}$. É contínua em $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.
3. (a) -1 (b) 1 (c) $-\infty$ (d) $+\infty$ (e) $+\infty$ (f) 0

4.

(a) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 1/11$. Não se define (não existe) o limite $\lim_{x\to -3} f(x)$. $f(-3) = -1$, mas como não existe $\lim_{x\to -3} f(x)$, f não é contínua no ponto -3.

(b) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to -3} f(x) = 1$. f é contínua no ponto -3 pois $\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)$.

5. Ao esboçar o gráfico de f, notamos que $f(x) = x$, se $x \geq 0$, e $f(x) = x$, se $x \leq 0$. Assim, $f'(0^+) = 1$ indica a presença de uma reta tangente ao gráfico de f, "à direita do ponto $(0, 0)$", como sendo a reta tangente ao gráfico de $y = x$, $x \geq 0$, no ponto $(0, 0)$ (a reta tangente a uma reta é a própria reta). Analogamente, interpreta-se $f'(0^-) = -1$.

6. $f'(0) = +\infty$ significa que a reta tangente à curva $y = \sqrt[3]{x}$, no ponto $(0, 0)$, é vertical.