Aula 4

Limites. Uma introdução intuitiva

Nos capítulos anteriores, fizemos uso de um limite especial para calcular derivadas: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Neste capítulo veremos os limites como ferramentas de estudo do comportamento de funções reais, provendo informações importantes sobre seus gráficos.

A definição formal de *limite* é matematicamente sofisticada, requerendo muitas horas de estudo para ser entendida. O leitor interessado poderá encontrá-la em bons livros-textos de cálculo. Ocorre porém que a definição de limite tem pouca ou nenhuma serventia quando queremos calcular limites. Faremos uma exploração intuitiva do conceito de limite e de suas propriedades, através de exemplos e interpretações gráficas.

Exemplo 4.1 *Considere a função $f(x) = 2x + 3$. Quando x assume uma infinidade de valores aproximando-se mais e mais de 0, o número $2x + 3$ assume uma infinidade de valores aproximando-se de $2 \cdot 0 + 3 = 3$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0, é igual a 3, e escrevemos*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$$

Suponhamos que $f(x)$ é uma função real definida em uma reunião de intervalos, e que x_0 é um ponto no interior ou no extremo de um desses intervalos. Os matemáticos dizem que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ($L \in \mathbb{R}$) quando podemos fazer $f(x)$ *arbitrariamente próximo de* L, tomando x *suficientemente próximo de* x_0, mantendo $x \neq x_0$. No exemplo acima, podemos fazer $f(x)$ próximo de 3 o quanto quisermos, bastando tomar x bem próximo de 0.

Exemplo 4.2 *Aqui temos uma lista de exemplos intuitivos.*

1. $\lim_{x\to a} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$

2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n \quad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})$

3. *Sendo* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $(a_n, \ldots, a_0$ *todos reais),*
$\lim_{x\to x_0} p(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0)$

4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-3}{x^2+1} = \dfrac{\lim_{x\to 2}(x^3-3)}{\lim_{x\to 2}(x^2+1)} = \dfrac{8-3}{4+1} = 1$

Definição 4.1 *Nos exemplos acima, de limites com x tendendo a x_0, tivemos sempre x_0 no domínio de f e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Quando isto ocorre, dizemos que f é* contínua no ponto x_0.

No próximo exemplo, temos um limite em que $x \to x_0$, mas x_0 não está no domínio de f.

Exemplo 4.3 *Calcular* $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Solução. Note que, sendo $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$, temos que $2 \notin D(f)$. Quando x se aproxima de 2, x^3 se aproxima de 8. Um cálculo direto nos dá então

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{0}{0}$$

Este resultado, $0/0$, é muito comum no cálculo de limites, e não tem significado como valor de um limite. A expressão $0/0$ é um *símbolo de indeterminação* ocorrendo em uma tentativa de cálculo de um limite. A ocorrência desta expressão significa que o limite ainda não foi calculado.

Para evitar o símbolo de indeterminação $0/0$, neste exemplo fazemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) \qquad \text{(pois } x-2 \neq 0\text{)} \\
&= 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 12
\end{aligned}$$

Exemplo 4.4 (Cálculo de um limite com mudança de variável)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = ?$$

Um cálculo direto nos dá $0/0$, uma *indeterminação*.

Fazendo $y = \sqrt[3]{x+1}$, temos $y^3 = x + 1$, e portanto $x = y^3 - 1$.

Quando x tende a 0, y tende a 1 (em símbolos: se $x \to 0$, então $y \to 1$). E aí temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} &= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^3-1} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^2+y+1)} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

4.1 Limites infinitos. Limites no infinito

Consideremos agora a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Temos que o domínio de f é o conjunto dos números reais diferentes de 0: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Observe a tabela 4.1. Ali fizemos uso do fato de que f é uma função *par*: $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Na primeira coluna da tabela 4.1, temos valores de x cada vez mais próximos de 0. Na última coluna, vemos que os valores correspondentes de $f(x)$ tornam-se cada vez maiores. Neste exemplo, podemos fazer $f(x)$ ultrapassar qualquer número positivo, tomando x suficientemente próximo de 0. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0 é "+ *infinito*", e escrevemos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

ou seja,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}$$

A interpretação geométrica de $\lim\limits_{x\to 0}(1/x^2) = +\infty$ pode ser visualizada na figura 4.1, onde temos um esboço do gráfico da curva $y = 1/x^2$.

Agora observe a tabela 4.2. Notamos agora que, à medida que x cresce indefinidamente, assumindo valores positivos cada vez maiores, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ torna-se cada vez mais próximo de 0. Isto também é sugerido pela figura 4.1. Neste caso, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a "+ *infinito*", é igual a 0, e escrevemos

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$$

Tabela 4.1.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
± 1	1	1
$\pm 0,5$	$0,25$	$\frac{100}{25} = 4$
$\pm 0,2$	$0,04$	$\frac{100}{4} = 25$
$\pm 0,1$	$0,01$	100
$\pm 0,01$	$0,0001$	10000
$\pm 0,001$	$0,000001$	1000000

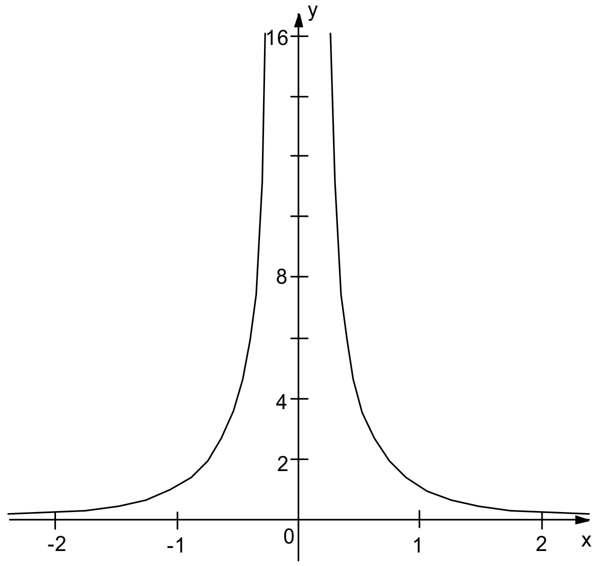

Figura 4.1. $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$, ou seja, à medida que x se aproxima de 0, $y = f(x)$ torna-se cada vez maior. Também $\lim_{x\to +\infty} 1/x^2 = 0$, ou seja, à medida em que x cresce, tomando valores cada vez maiores, $f(x)$ aproxima-se de 0. E ainda $\lim_{x\to -\infty} 1/x^2 = 0$.

Nas tabelas 4.1 e 4.2 também ilustramos:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty}$$

Também podemos facilmente inferir

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$$

Com estes exemplos simples damos início à nossa *álgebra de limites*:

Tabela 4.2.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1	1
2	4	$\frac{1}{4} = 0,25$
5	25	$\frac{1}{25} = 0,04$
10	100	$0,01$
100	10000	$0,0001$
10^3	10^6	10^{-6}

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $\quad$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(\pm\infty)^2 = +\infty$ $\quad$ $(+\infty)(-\infty) = -\infty$

$(+\infty)^3 = +\infty$ $\quad$ $(-\infty)^3 = -\infty$

$(-\infty)^{(\text{inteiro positivo par})} = +\infty$ $\quad$ $(-\infty)^{(\text{inteiro positivo ímpar})} = -\infty$

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0$$

$+\infty + c = +\infty$ (c constante) $\quad$ $-\infty + c = -\infty$ (c constante)

$$c \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad c \cdot (-\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0 \\ -\infty & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

$$\frac{+\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad \frac{-\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0 \\ -\infty & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

Mas atenção! Cautela com essa nova "aritmética"! Os "resultados"

$$\tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty)$$

são novos símbolos de indeterminação. Nada significam como valores de limites. Se chegarmos a algum deles no cálculo de um limite, temos que repensar o procedimento de cálculo.

Exemplo 4.5 *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$

Solução. Uma substituição direta nos dá

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} = \frac{+\infty - (+\infty) - 1}{+\infty + 4}$$

Para evitarmos símbolos de indeterminação, fazemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^3+4} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^3(1+\frac{4}{x^3})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{x(1+\frac{4}{x^3})} \\
&= \frac{3-\frac{2}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}}{+\infty(1+\frac{4}{+\infty})} \\
&= \frac{3-0}{+\infty\cdot(1+0)} = \frac{3}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Nos limites da forma $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios em x, prevalecem os termos de maior grau de ambos os polinômios, ou seja, se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

então $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Deixamos a dedução disto para o leitor, como um exercício.

Por exemplo, no exemplo que acabamos de estudar, bastaríamos fazer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^3+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Mas atenção. Isto só vale para limites de quocientes de polinômios, em que $x \to \pm\infty$.

Exemplo 4.6 *Calcular* $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5 - x^3)$

Temos

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5 - x^3) = (-\infty)^5 - (-\infty)^3 = (-\infty) - (-\infty) = (-\infty) + (+\infty)$, portanto chegamos a um símbolo de indeterminação.

Podemos no entanto fazer

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5 - x^3) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5(1 - \frac{1}{x^2}) = +\infty \cdot (1-0) = +\infty.$

Exemplo 4.7 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$.

Solução. Aqui podemos ser induzidos a dizer, tal como no exemplo do limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$, que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ é infinito. Ok, mas qual "infinito"? $+\infty$ ou $-\infty$? A resposta é, neste caso, nenhum dos dois!

Se x se aproxima de 0 por valores positivos, então $1/x$ tende a $+\infty$. Porém se x se aproxima de 0 assumindo somente valores negativos, então $1/x$ tende a $-\infty$ ($|1/x|$ fica cada vez maior, porém $1/x$ mantém-se sempre < 0).

Neste caso, dizemos que não existe o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

O comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, nas proximidades de $x = 0$, será melhor estudado na próxima aula, quando introduziremos o conceito de limites laterais.

4.2 Ilustrações geométricas da ocorrência de alguns limites

Na figura 4.2 temos o esboço de um gráfico de uma função definida no conjunto $\mathbb{R} - \{x_0\}$, para a qual $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ e $\lim_{x\to x_1} f(x) = b = f(x_1)$.

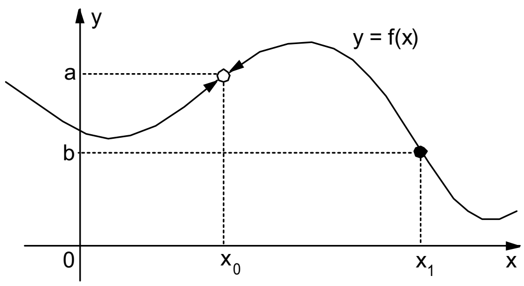

Figura 4.2. x_0 não está no domínio de f, $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, e $\lim_{x\to x_1} f(x) = b = f(x_1)$

Na figura 4.3 temos o esboço de um gráfico de uma função definida em todo o conjunto $\mathbb{R}$, para a qual $\lim_{x\to +\infty} f(x) = a$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$.

Na figura 4.4 temos o esboco de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Na figura 4.5 temos o esboco de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Na figura 4.6 ilustramos o esboco de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

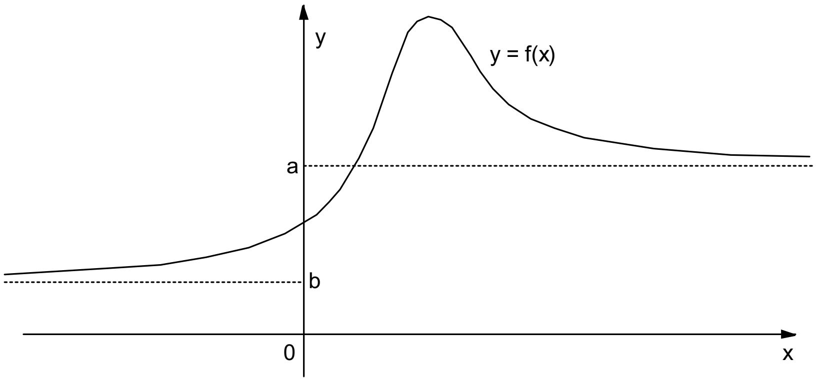

Figura 4.3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

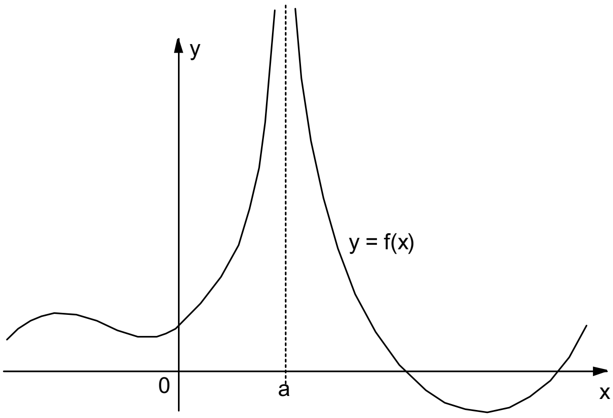

Figura 4.4. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

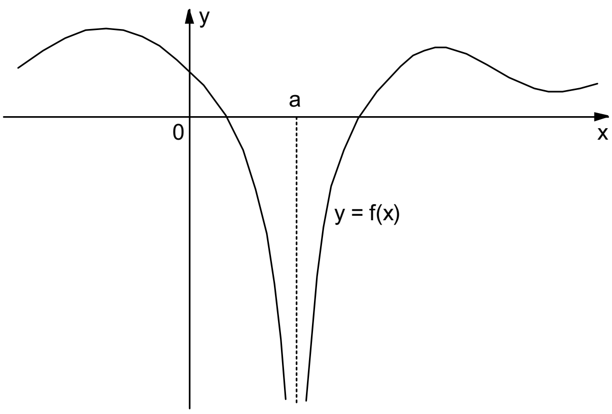

Figura 4.5. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

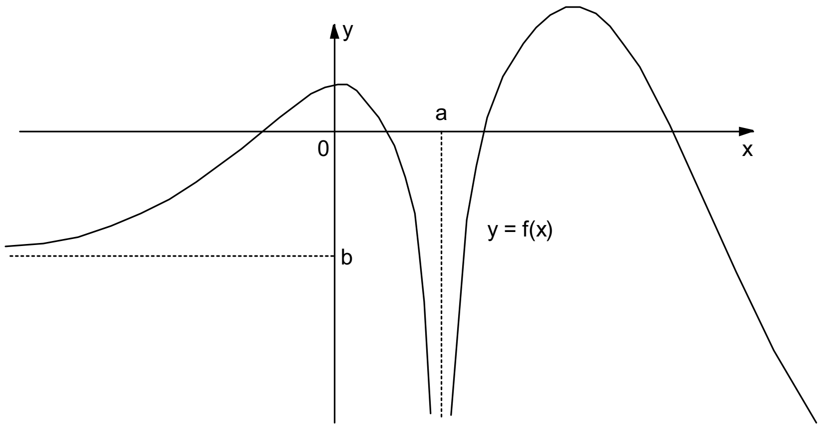

Figura 4.6. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$, e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

4.3 Problemas

1. Calcule os limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$

(c) $\displaystyle\lim_{k\to 4} \frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}$ (d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(e) $\displaystyle\lim_{h\to -2} \frac{h^3+8}{h+2}$ (f) $\displaystyle\lim_{z\to 10} \frac{1}{z-10}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} (x^2+3)(x-4)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} 15$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$ (l) $\displaystyle\lim_{s\to 4} \frac{6s-1}{2s-9}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)$ (n) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h}$

(o) $\displaystyle\lim_{t\to -1} \frac{(4t^2+5t-3)^3}{(6t+5)^4}$ (p) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^{-2}-2^{-2}}{h}$

2. Demonstre que se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ e}$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

sendo $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ números reais com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, então

(a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$

(b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$

3. Calcule os limites.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x-5}$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^2+1}}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+3)^3(2-3x)^2}{x^5+5}$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+ax}-x)$ (h) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sqrt[3]{1-x^3})$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x+8x^3}-2x)$ (j) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

4. Considerando as duas primeiras colunas da tabela 4.1, de valores para a função $g(x) = x^2$, Joãozinho argumentou que, quanto mais próximo de 0 é o valor de x, mais próximo de -1 fica $g(x)$. Explique porquê Joãozinho está certo. Isto quer dizer que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$? Explique.

4.3.1 Respostas e sugestões

1. (a) 4 (b) $1/9$ (c) 32 (d) $3x^2$ (e) 12 (f) não existe (g) $+\infty$ (h) $5\sqrt{2}-20$ (i) 15 (j) -7 (k) $-3/8$ (l) -23 (m) 2 (n) $-1/8$ (o) -64 (p) $-1/4$

2. (a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \cdots + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m}\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \cdots + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{\pm\infty} + \cdots + \frac{a_1}{\pm\infty} + \frac{a_0}{\pm\infty}}{1 + \frac{b_{m-1}}{\pm\infty} + \cdots + \frac{b_1}{\pm\infty} + \frac{b_0}{\pm\infty}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \frac{1+0+\cdots+0}{1+0+\cdots+0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}
\end{aligned}$$

3. (a) 2 (b) 0 (c) 0
(d) $+\infty$.
Sugestão: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$
Agora, como $x \to -\infty$, temos $x < 0$, e então $|x| = -x$.

(e) 72

(f) 0. *Sugestão:* $\sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$.

(g) $a/2$ (h) 0. *Sugestão:* Para contornar a indeterminação $+\infty - \infty$, faça $x + \sqrt[3]{1-x^3} = \dfrac{(x + \sqrt[3]{1-x^3})[x^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + (\sqrt[3]{1-x^3})^2]}{x^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + (\sqrt[3]{1-x^3})^2}$, e use a identidade $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

(i) 0. *Sugestão:* Aproveite a idéia usada na solução do problema anterior, agora fazendo uso da identidade $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

(j) $1/2$