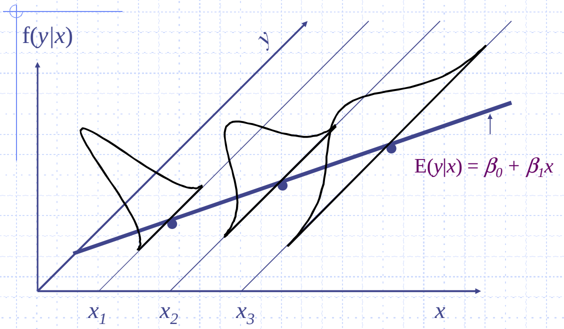
Heterocedasticidade

- $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots \beta_k x_k + u$

O que heterocedasticidade?

- Lembre-se da hipótese de homocedasticidade: condicional às variáveis explicativas, a variância do erro, *u*, é constante.
- Se isso não for verdade, ou seja, se a variância de *u* é diferente para diferentes valores de *x*'s, então os erros são heterocedásticos.
- Exemplo: pense no gasto das famílias com alimentação em função da renda; à medida que a renda aumenta, aumenta a variância dos gastos em alimentação.

Exemplo de heterocedasticidade



Por que se preocupar com heterocedasticidade?

- MQO continua não tendencioso e consistente, mesmo sem a hipótese de homocedasticidade.
- Mas os erros-padrão dos coeficientes estimados serão viesados se há heterocedasticidade.
- Se os erros-padrão são viesados, não podemos utilizar as estatísticas *t*, *F* e *LM* usuais.

Variância com heterocedasticidade

O para o caso da regressão linear simples,

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \text{ e}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sigma_i^2}{SQT_x^2}, \text{ onde } SQT_x = \sum (x_i - \bar{x})^2.$$

Um estimador válido, quando $\sigma_i^2 \neq \sigma^2$, é

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \hat{u}_i^2}{SQT_x^2}, \text{ onde } \hat{u}_i \text{ é o resíduo de MQO.}$$

Variância com heterocedasticidade (cont.)

Para a regressão linear múltipla, um estimador válido da $Var(\hat{\beta}_j)$ com heterocedasticidade é

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sum \hat{r}_{ij}^2 \hat{u}_i^2}{SQT_j^2}, \text{ onde } \hat{r}_{ij} \text{ é o } i-ésimo \text{ resíduo da}$$

regressão de x_j em todas as outras variáveis independentes, e SQT_j é a soma dos quadrados dos resíduos dessa regressão.

Erros-padrão robustos

- Agora que temos uma estimativa consistente da variância, sua raiz quadrada será uma estimativa do erro-padrão.
- Tais erros-padrão são chamados de erros-padrão robustos.
- Às vezes a variância estimada é corrigida pelos graus de liberdade, pela multiplicação por $n/(n - k - 1)$.
- Quando $n \rightarrow \infty$, essa correção faz pouca diferença.

Erros-padrão robustos (cont.)

- É importante lembrar que esses erros-padrão robustos têm justificativa apenas assintótica – com amostras pequenas, as estatísticas t´s obtidas com os erros-padrão robustos não terão distribuição próxima da t, e as inferências não serão corretas.
- No Gretl há a opção de se calcular tais erros-padrão robustos.

Teste de heterocedasticidade

- Queremos testar se H_0: $\mathrm{Var}(u|x_1, x_2,\ldots, x_k) = \sigma^2$, que é equivalente a H_0: $E(u^2|x_1, x_2,\ldots, x_k) = E(u^2) = \sigma^2$.
- Se assumirmos que a relação entre u^2 e x_j é linear, podemos testar uma restrição linear.
- Logo, para $u^2 = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \ldots + \delta_k x_k + v$, isso significa testar:
- H_0: $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_k = 0$ (modelo é homocedástico).

O teste de Breusch-Pagan

- Não observamos o erros, mas podemos utilizar suas estimativas: os resíduos da regressão por MQO.
- Após fazer a regressão dos quadrados dos resíduos em todos os x's, podemos utilizar o R^2 para obter um teste F ou LM.
- A estatística F é simplesmente a estatística F da significância da regressão:
- $F = [R^2/k]/[(1 - R^2)/(n - k - 1)]$, que tem distribuição $F_{k,\, n - k - 1}$.
- A estatística LM é $LM = nR^2$, que tem distribuição χ^2_k.

Exemplo

- Banco de dados Hprice1.gdt
- Verificar a heterocedasticidade em uma equação simples de preços de imóveis.
- Após fazer a regressão original, geramos os resíduos e o quadrado destes resíduos em todos os x's (Gravar Resíduos Quadrados – cria uma nova variável no banco de dados chamada *usq1*).

Exemplo

Modelo 1: Estimativas OLS usando as 88 observações 1-88
Variável dependente: price

Variável	*Coeficiente*	*Erro Padrão*	*estatística-t*	*p-valor*	
const	-21,7703	29,475	-0,7386	0,46221	
lotsize	0,00206771	0,000642126	3,2201	0,00182	***
sqrft	0,122778	0,0132374	9,2751	<0,00001	***
bdrms	13,8525	9,01015	1,5374	0,12795	

Média da variável dependente = 293,546
Desvio padrão da variável dependente = 102,713
Soma dos resíduos quadrados = 300724
Erro padrão dos resíduos = 59,8335
R^2 não-ajustado = 0,672362
R^2 ajustado = 0,660661
Estatística-F (3, 84) = 57,4602 (p-valor < 0,00001)
Verosimilhança-Logarítmica = -482,877
Critério de informação de Akaike = 973,755
Critério Bayesiano de Schwarz = 983,664
Critério de Hannan-Quinn = 977,747

Exemplo

$$\hat{price} = -21.77 + .00207\ lotsize + .123\ sqrft + 13.85\ bdrms$$
$$(29.48)\quad (.00064)\quad (.013)\quad (9.01)$$
$$n = 88,\ R^2 = .672.$$

Exemplo

Modelo 2: Estimativas OLS usando as 88 observações 1-88
Variável dependente: usq1

Variável	*Coeficiente*	*Erro Padrão*	*estatística-t*	*p-valor*	
const	-5522,79	3259,48	-1,6944	0,09390	*
lotsize	0,201521	0,0710091	2,8380	0,00569	***
sqrft	1,69104	1,46385	1,1552	0,25128	
bdrms	1041,76	996,381	1,0455	0,29877	

Média da variável dependente = 3417,32
Desvio padrão da variável dependente = 7094,38
Soma dos resíduos quadrados = 3,67752e+009
Erro padrão dos resíduos = 6616,65
R^2 não-ajustado = 0,160141
R^2 ajustado = 0,130146
Estatística-F (3, 84) = 5,33892 (p-valor = 0,00205)
Verosimilhança-Logarítmica = -896,986
Critério de informação de Akaike = 1801,97
Critério Bayesiano de Schwarz = 1811,88
Critério de Hannan-Quinn = 1805,96

P-valor baixo, forte evidência contra a hipótese nula

LM = 88.(0,1601)=14,09

P-valor =~0,0028

O teste de White

- O teste de Breusch-Pagan irá detectar formas de heterocedasticidade lineares.
- O teste de White permite não-linearidades por utilizar quadrados e produtos cruzados de todos os *x*'s.
- Basta computar a estatística *F* ou *LM* para testar se todos os x_j, x_j^2 e $x_j x_h$ são conjuntamente significativos.

$$\hat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_1^2 + \delta_5 x_2^2 + \delta_6 x_3^2 + \delta_7 x_1 x_2 + \delta_8 x_1 x_3 + \delta_9 x_2 x_3 + error.$$

- Problema: se muitos regressores, usa muitos graus de liberdade.

Forma alternativa do teste de White

- Suponha que o valores ajustado por MQO, $\hat{y}$, é função de todos os *x*'s.
- Logo, $\hat{y}^2$ será função dos quadrados e produtos cruzados e, portanto, $\hat{y}$ e $\hat{y}^2$ serão *proxies* para todos os x_j, x_j^2 e $x_j x_h$; então:
- Faça a regressão dos resíduos ao quadrado em $\hat{y}$ e $\hat{y}^2$ e use o R^2 para obter a estatística *F* ou *LM*.
- Agora o teste é para apenas 2 restrições.

$$\hat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 \hat{y} + \delta_2 \hat{y}^2 + error.$$

Exemplo

Modelo 5: Estimativas OLS usando as 88 observações 1-88
Variável dependente: lprice

Variável	*Coeficiente*	*Erro Padrão*	*estatística-t*	*p-valor*	
const	-1,29704	0,651284	-1,9915	0,04967	**
llotsize	0,167967	0,0382811	4,3877	0,00003	***
lsqrft	0,700232	0,0928652	7,5403	<0,00001	***
bdrms	0,0369583	0,0275313	1,3424	0,18308	

Média da variável dependente = 5,63318
Desvio padrão da variável dependente = 0,303573
Soma dos resíduos quadrados = 2,86256
Erro padrão dos resíduos = 0,184603
R^2 não-ajustado = 0,642965
R^2 ajustado = 0,630214
Estatística-F (3, 84) = 50,4237 (p-valor < 0,00001)
Verosimilhança-Logarítmica = 25,8607
Critério de informação de Akaike = -43,7213
Critério Bayesiano de Schwarz = -33,812
Critério de Hannan-Quinn = -39,7291

Exemplo

$$\log(\hat{price}) = 5.61 + .168 \log(lotsize) + .700 \log(sqrft) + .037\ bdrms$$
$$(.65)\quad (.038)\quad (.093)\quad (.028)$$
$$n = 88,\ R^2 = .643.$$

Exemplo

Modelo 6: Estimativas OLS usando as 88 observações 1-88
Variável dependente: usq

Variável	*Coeficiente*	*Erro Padrão*	*estatística-t*	*p-valor*
const	5,04683	3,345	1,5088	0,13507
yhat	-1,70922	1,16333	-1,4692	0,14546
yhatsqr	0,145135	0,100992	1,4371	0,15436

Média da variável dependente = 0,0325291
Desvio padrão da variável dependente = 0,0736048
Soma dos resíduos quadrados = 0,452874
Erro padrão dos resíduos = 0,0729926
R^2 não-ajustado = 0,0391735
R^2 ajustado = 0,0165658
Estatística-F (2, 85) = 1,73275 (p-valor = 0,183)
Verosimilhança-Logarítmica = 106,99
Critério de informação de Akaike = -207,981
Critério Bayesiano de Schwarz = -200,549
Critério de Hannan-Quinn = -204,987

LM=88.(0,0392)

P-valor 0,178

Mínimos quadrados ponderados

- Embora seja possível estimar os erros-padrão robustos para os estimadores de MQO, se soubermos alguma coisa sobre a forma específica da heterocedasticidade, poderemos obter estimadores mais eficientes que os de MQO.
- Como devemos especificar a natureza da heterocedasticidade, o processo de estimação é mais trabalhoso.
- **A idéia básica é transformar o modelo em outro cujos erros sejam homocedásticos.**

Exemplo de mínimos quadrados ponderados

- Suponha que a heterocedasticidade seja dada por $\mathrm{Var}(u|\mathbf{x}) = \sigma^2 h(\mathbf{x})$.
- $h(\mathbf{x})$ é uma função das variáveis explicativas e determina a forma da heterocedasticidade, ou seja, como a variância dependerá de x.
- $h(\mathbf{x}) > 0$, pois a variância é positiva e $h(\mathbf{x})$ é conhecida.
- O parâmetro populacional σ^2 não é conhecido, mas pode ser estimado através do uso dos dados.

Exemplo de mínimos quadrados ponderados

$$sav_i = \beta_0 + \beta_1 inc_i + u_i$$

$$\mathrm{Var}(u_i|inc_i) = \sigma^2 inc_i.$$

- Neste caso, a variância do erro é proporcional ao nível de renda.
- Quanto maior o nível de renda, maior a variância do termo de erro, ou seja, maior a variabilidade da poupança.

Exemplo de mínimos quadrados ponderados

- Como usamos a informação sobre o formato da heterocedasticidade para estimar os parâmetros do modelo e fazer inferência?
- Modelo original heterocedástico:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + u_i,$$

- Temos que transformar esta equação de forma que os erros virem homocedásticos.

Exemplo de mínimos quadrados ponderados

- $E(u_i/\sqrt{h_i}|\mathbf{x}) = 0$, pois h_i é apenas uma função de $\mathbf{x}$, e $\mathrm{Var}(u_i/\sqrt{h_i}|\mathbf{x}) = \sigma^2$.
- Logo, se dividirmos toda a equação por $\sqrt{h_i}$, teremos um modelo com erros homocedásticos.

$$y_i/\sqrt{h_i} = \beta_0/\sqrt{h_i} + \beta_1(x_{i1}/\sqrt{h_i}) + \beta_2(x_{i2}/\sqrt{h_i}) + \ldots + \beta_k(x_{ik}/\sqrt{h_i}) + (u_i/\sqrt{h_i})$$

Exemplo de mínimos quadrados ponderados

- Podemos obter os estimadores de tal forma que as propriedades de eficiência destes estimadores MQO sejam melhores do que no modelo anterior com presença de heterocedasticidade.
- No exemplo da poupança:

$$sav_i/\sqrt{inc_i} = \beta_0(1/\sqrt{inc_i}) + \beta_1\sqrt{inc_i} + u_i^*,$$

- O novo modelo satisfaz as hipóteses do modelo linear clássico.

25

Mínimos quadrados generalizados

- A estimação da equação transformada por MQO é um exemplo de mínimos quadrados generalizados, MQG (ou GLS, em inglês).
- MQG será BLUE neste caso.
- MQG é igual aos mínimos quadrados ponderados, MQP (ou WLS, em inglês) onde cada resíduo ao quadrado é ponderado pelo inverso da $\mathrm{Var}(u_i|\mathbf{x}_i)$.

26

Mínimos quadrados ponderados (cont.)

- A idéia é minimizar a soma dos quadrados ponderados por $1/h_i$.
- Dá-se menos peso para as observações com maior variância.
- MQO é ótimo se conhecermos $\mathrm{Var}(u_i|\mathbf{x}_i)$.
- Mas, em geral, não a conhecemos.

27

MQG Factível

- Quando não conhecemos a forma da heterocedasticidade, precisamos estimar $h(\mathbf{x}_i)$.
- Em geral, iniciamos com uma hipótese flexível, tal como:
- $\mathrm{Var}(u|\mathbf{x}) = \sigma^2\exp(\delta_0 + \delta_1 x_1 + \ldots + \delta_k x_k)$
- Precisamos, então, estimar os δ´s.

28

MQGF (cont.)

- Nossa hipótese implica que $u^2 = \sigma^2\exp(\delta_0 + \delta_1 x_1 + \ldots + \delta_k x_k)v$,
- onde $E(v|\mathbf{x}) = 1$; então se $E(v) = 1$:
- $\ln(u^2) = \alpha_0 + \delta_1 x_1 + \ldots + \delta_k x_k + e$,
- onde $E(e) = 1$ e e é independente dos x´s.
- Agora, podemos substituir u por $\hat{u}$, e estimar a equação por MQO.

29

MQGF (cont.)

- A estimativa de h é obtida por $\hat{h} = \exp(\hat{g})$; o peso será o inverso dessa estimativa.
- Resumindo:
- Faça a regressão por MQO da equação original, salve os resíduos, $\hat{u}$, eleve-os ao quadrado e tire o log.
- Faça a regressão de $\ln(\hat{u}^2)$ em todas as variáveis independentes o obtenha o valor ajustado $\hat{g}$.
- Faça a regressão por MQP utilizando $1/\exp(\hat{g})$ como ponderador.

30

Observações sobre MQP

- Lembre-se que utiliza-se MQP apenas por eficiência, pois MQO continua não tendencioso e consistente.
- As estimativas serão diferentes devido a erros amostrais, mas se forem muito diferentes, então alguma outra hipótese de Gauss-Markov também deve estar sendo violada.