Expressões aproximadas da esperança e da variância

Conhecendo as características de uma variável aleatória X, pode-se estar interessado em calcular a $E(Y)$ e $Var(Y)$, sendo $Y = H(X)$. Uma das maneiras mais usuais de calcular é utilizar a distribuição de probabilidade de X,. Entretanto, H pode ser bem complicada para integrar.

Assim, existe a possibilidade de utilizar expressões aproximadas pela série de Taylor da esperança e da variância.

<u>Teorema:</u>

Seja X uma variável aleatória com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Suponha $Y = H(X)$. Então:

$$E(Y) \cong H(\mu) + \frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2$$

$$Var(Y) \cong [H'(\mu)]^2\sigma^2$$

<u>Demonstração:</u>

Parte 1:

Desenvolvendo H por série de Taylor próximo de $X = \mu$ com dois termos, tem-se

$$Y = H(\mu) + \frac{(x-\mu)H'(\mu)}{1!} + \frac{(x-\mu)^2 H''(\mu)}{2!} + R_1$$

Ignorando o resto R_1

$$E(Y) = H(\mu) + \cancelto{0}{(E(x) - \mu)}H'(\mu) + E(x-\mu)^2\frac{H''(\mu)}{2}$$

$$E(Y) = H(\mu) + \frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2$$

Parte 2:

Desenvolvendo H por série de Taylor para um termo próximo de $x = \mu$

$$Y \cong H(\mu) + (x-\mu)H'(\mu) + R_2$$

Ignorando R_2:

$$Var(Y) \cong H(\mu) + Var(XH'(\mu) - \mu H'(\mu))$$

$$Var(Y) \cong H(\mu) + \left(H'(\mu)\right)^2 . \sigma^2$$

EXEMPLO:

A tensão superficial de um líquido pode ser assim descrita:

$$S = 2(1-0{,}005T)^{1{,}2}$$

Sendo T é uma variável aleatória com função distribuição de probabilidade dada por:

$$f(t)\begin{cases} = 3000t^{-4} & t \geq 10 \\ = 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

$E(T) = 15$ e $Var(T) = 75$

$$E(S) = \underbrace{\int_{10}^{\infty} 2(1-0{,}005t)^{1{,}2} . 3000t^{-4}}_{Muito\ complicado}$$

Utilizando a aproximação

$$H'(t) = 2{,}4(1-0{,}005)^{0{,}2} . (-0{,}005) = -0{,}012 . (1-0{,}005t)^{0{,}2}$$

$$H'(15) = 0{,}01$$

$$H(15) = 1{,}82$$

$$H''(t) = 0{,}00012(1-0{,}005t)^{-0{,}8}$$

$$H''(15) = 0$$

$$\therefore E(S) \cong H(15) + 75H''(15) = 1{,}82$$

$$Var(S) \cong 75[H'(15)]^2 = 0{,}87$$