Estatística Matemática

Alexandre Nicolella

Departamento de Economia
Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto

2011

Introdução

Tipos de modelos para estudar fenômenos cotidianos

- Determinísticos
- Probabilísticos

Um modelo simplifica o mundo

- Determinísticos - o experimento determina o resultado ex: $Y = C + I + G$
- Probabilísticos - o experimento não determina completamente o resultado, determina apenas o comportamento probabilístico

$$Des = \alpha + \beta_1 horasestudo + \beta_2 qualidade + \beta_3 escpais + \beta_4 raça + \varepsilon$$

Introdução

Tipos de modelos para estudar fenômenos cotidianos

- Determinísticos
- Probabilísticos

Um modelo simplifica o mundo

- Determinísticos - o experimento determina o resultado ex: $Y = C + I + G$
- Probabilísticos - o experimento não determina completamente o resultado, determina apenas o comportamento probabilístico

$$Des = \alpha + \beta_1 horasestudo + \beta_2 qualidade + \beta_3 escpais + \beta_4 raça + \varepsilon$$

Introdução

Tipos de modelos para estudar fenômenos cotidianos

- Determinísticos
- Probabilísticos

Um modelo simplifica o mundo

- Determinísticos - o experimento determina o resultado ex: $Y = C + I + G$
- Probabilísticos - o experimento não determina completamente o resultado, determina apenas o comportamento probabilístico

$$Des = \alpha + \beta_1 horasestudo + \beta_2 qualidade + \beta_3 escpais + \beta_4 raça + \varepsilon$$

Introdução

Tipos de modelos para estudar fenômenos cotidianos

- Determinísticos
- Probabilísticos

Um modelo simplifica o mundo

- Deterministicos - o experimento determina o resultado ex: $Y = C + I + G$
- Probabilísticos - o experimento não determina completamente o resultado, determina apenas o comportamento probabilístico

$$Des = \alpha + \beta_1 horasestudo + \beta_2 qualidade + \beta_3 escpais + \beta_4 raça + \varepsilon$$

Introdução

Tipos de modelos para estudar fenômenos cotidianos

- Determinísticos
- Probabilísticos

Um modelo simplifica o mundo

- Deterministicos - o experimento determina o resultado ex: $Y = C + I + G$
- Probabilísticos - o experimento não determina completamente o resultado, determina apenas o comportamento probabilístico

$$Des = \alpha + \beta_1 horasestudo + \beta_2 qualidade + \beta_3 escpais + \beta_4 raça + \varepsilon$$

Introdução

Tipos de modelos para estudar fenômenos cotidianos

- Determinísticos
- Probabilísticos

Um modelo simplifica o mundo

- Deterministicos - o experimento determina o resultado ex: $Y = C + I + G$
- Probabilísticos - o experimento não determina completamente o resultado, determina apenas o comportamento probabilístico

$$Des = \alpha + \beta_1 horasestudo + \beta_2 qualidade + \beta_3 escpais + \beta_4 raça + \varepsilon$$

Conjuntos

Conjunto: Coleção de objetos, ex.: $A = 1, 2, 3, 4; B = x|0 \leq x \leq 1$

Definições importantes

1. Elementos de A: São os objetos que formam o conjunto. Assim, $a \in A$, quer dizer que a é elemento de A
2. Conjunto Universo U: Conjunto de todos os objetos que estejam sendo estudados, U
3. Conjunto Vazio$\emptyset$: Conjunto que não contém elementos, $\emptyset$
4. Subconjunto: Se ser elemento de A implica em ser elemento de B, $A \subset B$, A é subconjunto de B
5. Complemento: A^c é conjunto constituído por todos os elementos que não estão em A, mas estejam em U

Conjuntos

Conjunto: Coleção de objetos, ex.: $A = 1, 2, 3, 4; B = x|0 \leq x \leq 1$

Definições importantes

1. Elementos de A: São os objetos que formam o conjunto. Assim, $a \in A$, quer dizer que a é elemento de A
2. Conjunto Universo U: Conjunto de todos os objetos que estejam sendo estudados, U
3. Conjunto Vazio$\emptyset$: Conjunto que não contém elementos, $\emptyset$
4. Subconjunto: Se ser elemento de A implica em ser elemento de B, $A \subset B$, A é subconjunto de B
5. Complemento: A^c é conjunto constituído por todos os elementos que não estão em A, mas estejam em U

Conjuntos

Conjunto: Coleção de objetos, ex.: $A = 1, 2, 3, 4; B = x|0 \leq x \leq 1$

Definições importantes

1. Elementos de A: São os objetos que formam o conjunto. Assim, $a \in A$, quer dizer que a é elemento de A
2. Conjunto Universo U: Conjunto de todos os objetos que estejam sendo estudados, U
3. Conjunto Vazio$\emptyset$: Conjunto que não contém elementos, $\emptyset$
4. Subconjunto: Se ser elemento de A implica em ser elemento de B, $A \subset B$, A é subconjunto de B
5. Complemento: A^c é conjunto constituído por todos os elementos que não estão em A, mas estejam em U

Conjuntos

Conjunto: Coleção de objetos, ex.: $A = 1, 2, 3, 4; B = x|0 \leq x \leq 1$

Definições importantes

1. Elementos de A: São os objetos que formam o conjunto. Assim, $a \in A$, quer dizer que a é elemento de A
2. Conjunto Universo U: Conjunto de todos os objetos que estejam sendo estudados, U
3. Conjunto Vazio$\emptyset$: Conjunto que não contém elementos, $\emptyset$
4. Subconjunto: Se ser elemento de A implica em ser elemento de B, $A \subset B$, A é subconjunto de B
5. Complemento: A^c é conjunto constituído por todos os elementos que não estão em A, mas estejam em U

Conjuntos

Conjunto: Coleção de objetos, ex.: $A = 1, 2, 3, 4; B = x|0 \leq x \leq 1$

Definições importantes

1. Elementos de A: São os objetos que formam o conjunto. Assim, $a \in A$, quer dizer que a é elemento de A
2. Conjunto Universo U: Conjunto de todos os objetos que estejam sendo estudados, U
3. Conjunto Vazio$\emptyset$: Conjunto que não contém elementos, $\emptyset$
4. Subconjunto: Se ser elemento de A implica em ser elemento de B, $A \subset B$, A é subconjunto de B
5. Complemento: A^c é conjunto constituído por todos os elementos que não estão em A, mas estejam em U

Conjuntos

Conjunto: Coleção de objetos, ex.: $A = 1, 2, 3, 4; B = x|0 \leq x \leq 1$

Definições importantes

1. Elementos de A: São os objetos que formam o conjunto. Assim, $a \in A$, quer dizer que a é elemento de A
2. Conjunto Universo U: Conjunto de todos os objetos que estejam sendo estudados, U
3. Conjunto Vazio$\emptyset$: Conjunto que não contém elementos, $\emptyset$
4. Subconjunto: Se ser elemento de A implica em ser elemento de B, $A \subset B$, A é subconjunto de B
5. Complemento: A^c é conjunto constituído por todos os elementos que não estão em A, mas estejam em U

Conjuntos

Propriedades do Conjunto vazio e Universo

1. $\emptyset \subset A$ para qualquer A
2. A, considerado na composição de U, tem-se $A \subset U$

Sendo C a união entre A e B, tem-se:

$$C = \{x| \quad x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$$

$$C = A \cup B$$

Sendo D a interseção entre A e B, tem-se:

$$D = \{x| \quad x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}$$

$$D = A \cap B$$

Diagrama de Venn

Conjuntos

Propriedades do Conjunto vazio e Universo

1. $\emptyset \subset A$ para qualquer A
2. A, considerado na composição de U, tem-se $A \subset U$

Sendo C a união entre A e B, tem-se:

$$C = \{x| \quad x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$$

$$C = A \cup B$$

Sendo D a interseção entre A e B, tem-se:

$$D = \{x| \quad x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}$$

$$D = A \cap B$$

Diagrama de Venn

Conjuntos

Propriedades do Conjunto vazio e Universo

1. $\emptyset \subset A$ para qualquer A
2. A, considerado na composição de U, tem-se $A \subset U$

Sendo C a união entre A e B, tem-se:

$$C = \{x| \quad x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$$

$$C = A \cup B$$

Sendo D a interseção entre A e B, tem-se:

$$D = \{x| \quad x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}$$

$$D = A \cap B$$

Diagrama de Venn

Conjuntos: Relações e Propriedades

Comutativa

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Associativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Conjuntos: Relações e Propriedades

Comutativa

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Associativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Conjuntos: Relações e Propriedades

Outras Propriedades

a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
c) $A \cap \phi = \phi \, , A \cap \Omega = A$
d) $\phi^c = \Omega \, , \Omega^c = \phi$
e) $A \cap A^c = \phi$
f) $A \cup A^c = \Omega$
g) $A \cup \phi = A \, , A \cup \Omega = \Omega$
h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
j) $(A^c)^c = A$

Conjuntos: Relações e Propriedades

O número de elementos de um conjunto pode ser:

1. Finito – número finito de elementos
2. Infinito enumerável – pode ser ordenado (ex inteiros)
3. Infinito não enumerável – número infinito que não pode ser ordenado.

Conjuntos: Relações e Propriedades

O número de elementos de um conjunto pode ser:

1. Finito – número finito de elementos
2. Infinito enumerável – pode ser ordenado (ex inteiros)
3. Infinito não enumerável – número infinito que não pode ser ordenado.

Conjuntos: Relações e Propriedades

O número de elementos de um conjunto pode ser:

1. Finito – número finito de elementos
2. Infinito enumerável – pode ser ordenado (ex inteiros)
3. Infinito não enumerável – número infinito que não pode ser ordenado.

Experimentos Aleatórios

Exemplos

1. Jogar dado uma vez e verificar seu valor
2. Número de peças defeituosas em retiradas em 24 h
3. Número de rebites defeituosos na asa de um avião
4. Duração de uma lâmpada

Experimentos aleatórios podem ser assim caracterizados

- Poderá ser repetido indefinidamente – mesmas condições
- Não é possível afirmar sobre um resultado particular, no entanto pode-se descrever todos os resultados possíveis
- Quando repete-se o experimento um número grande de vezes uma regularidade irá aparecer

Experimentos Aleatórios

Exemplos

1. Jogar dado uma vez e verificar seu valor
2. Número de peças defeituosas em retiradas em 24 h
3. Número de rebites defeituosos na asa de um avião
4. Duração de uma lâmpada

Experimentos aleatórios podem ser assim caracterizados

- Poderá ser repetido indefinidamente - mesmas condições
- Não é possível afirmar sobre um resultado particular, no entanto pode-se descrever todos os resultados possíveis
- Quando repete-se o experimento um número grande de vezes uma regularidade irá aparecer

Experimentos Aleatórios

Exemplos

1. Jogar dado uma vez e verificar seu valor
2. Número de peças defeituosas em retiradas em 24 h
3. Número de rebites defeituosos na asa de um avião
4. Duração de uma lâmpada

Experimentos aleatórios podem ser assim caracterizados

Experimentos Aleatórios

Exemplos

1. Jogar dado uma vez e verificar seu valor
2. Número de peças defeituosas em retiradas em 24 h
3. Número de rebites defeituosos na asa de um avião
4. Duração de uma lâmpada

Experimentos aleatórios podem ser assim caracterizados

Experimentos Aleatórios

Exemplos

1. Jogar dado uma vez e verificar seu valor
2. Número de peças defeituosas em retiradas em 24 h
3. Número de rebites defeituosos na asa de um avião
4. Duração de uma lâmpada

Experimentos aleatórios podem ser assim caracterizados

1. Poderá ser repetido indefinidamente - mesmas condições

Experimentos Aleatórios

Exemplos

1. Jogar dado uma vez e verificar seu valor
2. Número de peças defeituosas em retiradas em 24 h
3. Número de rebites defeituosos na asa de um avião
4. Duração de uma lâmpada

Experimentos aleatórios podem ser assim caracterizados

1. Poderá ser repetido indefinidamente - mesmas condições
2. Não é possível afirmar sobre um resultado particular, no entanto pode-se descrever todos os resultados possíveis
3. Quanto repete-se o experimento um número grande de vezes uma regularidade irá aparecer.

Experimentos Aleatórios

Exemplos

1. Jogar dado uma vez e verificar seu valor
2. Número de peças defeituosas em retiradas em 24 h
3. Número de rebites defeituosos na asa de um avião
4. Duração de uma lâmpada

Experimentos aleatórios podem ser assim caracterizados

1. Poderá ser repetido indefinidamente - mesmas condições
2. Não é possível afirmar sobre um resultado particular, no entanto pode-se descrever todos os resultados possíveis
3. Quanto repete-se o experimento um número grande de vezes uma regularidade irá aparecer.

Experimentos Aleatórios

Exemplos

1. Jogar dado uma vez e verificar seu valor
2. Número de peças defeituosas em retiradas em 24 h
3. Número de rebites defeituosos na asa de um avião
4. Duração de uma lâmpada

Experimentos aleatórios podem ser assim caracterizados

1. Poderá ser repetido indefinidamente - mesmas condições
2. Não é possível afirmar sobre um resultado particular, no entanto pode-se descrever todos os resultados possíveis
3. Quanto repete-se o experimento um número grande de vezes uma regularidade irá aparecer.

Experimentos Aleatórios

Exemplos

1. Jogar dado uma vez e verificar seu valor
2. Número de peças defeituosas em retiradas em 24 h
3. Número de rebites defeituosos na asa de um avião
4. Duração de uma lâmpada

Experimentos aleatórios podem ser assim caracterizados

1. Poderá ser repetido indefinidamente - mesmas condições
2. Não é possível afirmar sobre um resultado particular, no entanto pode-se descrever todos os resultados possíveis
3. Quanto repete-se o experimento um número grande de vezes uma regularidade irá aparecer.

Espaço Amostral

Definição

Seja ε um experimento, o espaço amostral será:

Conjunto de todos os possíveis resultados do experimento ε e será representado por Ω ou S

Espaço Amostral

Exemplos

1. ε_1 =Jogar o dado 1 vez

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. ε_2 =Jogar uma moeda 4 vezes e verificar o número de caras

$$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

3. ε_3 =Duração de vida de uma lâmpada

$$\Omega_3 = \{t| \quad t \geq 0\}$$

Espaço Amostral

Exemplos

1. ε_1 =Jogar o dado 1 vez
$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
2. ε_2 =Jogar uma moeda 4 vezes e verificar o número de caras
$$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
3. ε_3 =Duração de vida de uma lâmpada
$$\Omega_3 = \{t| \quad t \geq 0\}$$

Espaço Amostral

Exemplos

1. ε_1 =Jogar o dado 1 vez

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. ε_2 =Jogar uma moeda 4 vezes e verificar o número de caras

$$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

3. ε_3 =Duração de vida de uma lâmpada

$$\Omega_3 = \{t \mid t \geq 0\}$$

Espaço Amostral

Exemplos

1. ε_1 =Jogar o dado 1 vez

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. ε_2 =Jogar uma moeda 4 vezes e verificar o número de caras

$$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

3. ε_3 =Duração de vida de uma lâmpada

$$\Omega_3 = \{t| \quad t \geq 0\}$$

Espaço Amostral

Assim:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ onde ω_i são os elementos ou pontos amostrais.

Cada experimento pode possuir diversos espaços amostras. Assim, existe **<u>um</u>** espaço amostral associado a um experimento. O resultado do experimento pode ser numérico, alfanumérico ou mesmo uma função. Sendo o número de resultados possíveis de um espaço amostral:

1. Finito (ex. dados e moedas)
2. Infinito enumerável (ex. peças fabricadas até obter uma defeituosa)
3. Infinito não enumerável (ex. lâmpada).

Espaço Amostral

Assim:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ onde ω_i são os elementos ou pontos amostrais.

Cada experimento pode possuir diversos espaços amostras. Assim, existe **um** espaço amostral associado a um experimento. O resultado do experimento pode ser numérico, alfanumérico ou mesmo uma função. Sendo o número de resultados possíveis de um espaço amostral:

1. Finito (ex. dados e moedas)
2. Infinito enumerável (ex. peças fabricadas até obter uma defeituosa)
3. Infinito não enumerável (ex. lâmpada).

Espaço Amostral

Assim:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ onde ω_i são os elementos ou pontos amostrais.

Cada experimento pode possuir diversos espaços amostras. Assim, existe **um** espaço amostral associado a um experimento. O resultado do experimento pode ser numérico, alfanumérico ou mesmo uma função. Sendo o número de resultados possíveis de um espaço amostral:

1. Finito (ex. dados e moedas)
2. Infinito enumerável (ex. peças fabricadas até obter uma defeituosa)
3. Infinito não enumerável (ex. lâmpada).

Eventos

Exemplos

Um evento A é um subconjunto de um espaço amostral Ω de um experimento ε

1. ε_1 =Jogar o dado 1 vez

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A_1= par ocorre, $A_1 = \{2, 4, 6\}$

1. ε_3 =Duração de vida de uma lâmpada

$$\Omega_3 = \{t| \quad t \geq 0\}$$

A_3= queima em menos de 3 horas, $A_3 = \{t| \quad t \leq 3\}$

Eventos

Exemplos

Um evento A é um subconjunto de um espaço amostral Ω de um experimento ε

1. ε_1 =Jogar o dado 1 vez

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A_1= par ocorre, $A_1 = \{2, 4, 6\}$

1. ε_3 =Duração de vida de uma lâmpada

$$\Omega_3 = \{t| \quad t \geq 0\}$$

A_3= queima em menos de 3 horas, $A_3 = \{t| \quad t \leq 3\}$

Eventos

Exemplos

Um evento A é um subconjunto de um espaço amostral Ω de um experimento ε

1. ε_1 =Jogar o dado 1 vez

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A_1= par ocorre, $A_1 = \{2, 4, 6\}$

1. ε_3 =Duração de vida de uma lâmpada

$$\Omega_3 = \{t| \quad t \geq 0\}$$

A_3= queima em menos de 3 horas, $A_3 = \{t| \quad t \leq 3\}$

Eventos

Definição

Dois eventos A e B são denominados mutuamente exclusivos se não puderem ocorrer juntos, ou seja:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Dado um evento A qualquer não será possível dizer se ele irá ocorrer ou não. O que pode ser feito é associar um valor ao evento que indique quão provável é a sua ocorrência

Frequência Relativa

Definição

Considere que o experimento ε tenha sido repetido n vezes

Sejam A e B dois eventos quaisquer e n_A e n_Bo número de vezes que ocorreram nas n repetições.

$\therefore$

$f_A = \frac{n_A}{n}$ é a freqüência relativa do evento A nas n repetições do experimento ε.

Frequência Relativa

Propriedades

1. $0 \leq f_A \leq 1$
2. $f_A = 1$ se A ocorrer em todas as n repetições
3. $f_A = 0$ se A não ocorrer nas n repetições
4. Se A e B são mutuamente exclusivos e $f_{A \cup B}$ a freqüência relativa de $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$
5. f_A converge em certo sentido probabilístico para P(A) quando $n \to \infty$

A medida que o número de repetições n cresce, a freqüência relativa de A tenderá a variar cada vez menos – *regularidade estatística*.

Frequência Relativa

Propriedades

1. $0 \leq f_A \leq 1$
2. $f_A = 1$ se A ocorrer em todas as n repetições
3. $f_A = 0$ se A não ocorrer nas n repetições
4. Se A e B são mutuamente exclusivos e $f_{A \cup B}$ a freqüência relativa de $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$
5. f_A converge em certo sentido probabilístico para P(A) quando $n \to \infty$

A medida que o número de repetições n cresce, a freqüência relativa de A tenderá a variar cada vez menos – *regularidade estatística*.

Frequência Relativa

Propriedades

1. $0 \leq f_A \leq 1$
2. $f_A = 1$ se A ocorrer em todas as n repetições
3. $f_A = 0$ se A não ocorrer nas n repetições
4. Se A e B são mutuamente exclusivos e $f_{A \cup B}$ a freqüência relativa de $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$
5. f_A converge em certo sentido probabilístico para P(A) quando $n \to \infty$

A medida que o número de repetições n cresce, a freqüência relativa de A tenderá a variar cada vez menos – *regularidade estatística*.

Frequência Relativa

Propriedades

1. $0 \leq f_A \leq 1$
2. $f_A = 1$ se A ocorrer em todas as n repetições
3. $f_A = 0$ se A não ocorrer nas n repetições
4. Se A e B são mutuamente exclusivos e $f_{A \cup B}$ a freqüência relativa de $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$
5. f_A converge em certo sentido probabilístico para P(A) quando $n \to \infty$

A medida que o número de repetições n cresce, a freqüência relativa de A tenderá a variar cada vez menos – *regularidade estatística*.

Frequência Relativa

Propriedades

1. $0 \leq f_A \leq 1$
2. $f_A = 1$ se A ocorrer em todas as n repetições
3. $f_A = 0$ se A não ocorrer nas n repetições
4. Se A e B são mutuamente exclusivos e $f_{A \cup B}$ a freqüência relativa de $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$
5. f_A converge em certo sentido probabilístico para P(A) quando $n \to \infty$

A medida que o número de repetições n cresce, a freqüência relativa de A tenderá a variar cada vez menos – *regularidade estatística*.

Probabilidade: Exemplo

Exemplos

Queremos estudar as freqüências relativas de ocorrências das faces de um dado. Um procedimento a adotar seria lançar o dado certo número de vezes, n, e depois contar o número ni de vezes em que ocorre a face i, i = 1,2,...,6. As proporções $f_i = \frac{n_i}{n}$ determinam a distribuição de freqüências relativas do experimento realizado. Lançando o dado um número n' ($n' \neq n$) vezes, teríamos outra distribuição de freqüências relativa, mas com um padrão que esperamos ser muito próximo do anterior

Probabilidade: Exemplo

Dessa forma f_A fornece uma medida precisa de quão verossímil é a ocorrência do evento A.

Com repetições f_A se estabiliza em algum ponto p

Essa abordagem possui dois problemas

1. Qual deve ser o valor de n para que estabilize
2. O número p não deveria depender do experimentador ou da sua sorte ou azar

Probabilidade: Exemplo

Dessa forma f_A fornece uma medida precisa de quão verossímil é a ocorrência do evento A.

Com repetições f_A se estabiliza em algum ponto p

Essa abordagem possui dois problemas

1. Qual deve ser o valor de n para que estabilize
2. O número p não deveria depender do experimentador ou da sua sorte ou azar

Probabilidade: Exemplo

Dessa forma f_A fornece uma medida precisa de quão verossímil é a ocorrência do evento A.

Com repetições f_A se estabiliza em algum ponto p

Essa abordagem possui dois problemas

1. Qual deve ser o valor de n para que estabilize
2. O número p não deveria depender do experimentador ou da sua sorte ou azar

Probabilidade: Exemplo

O modelo probabilístico pode ser construído por meio de premissas, por exemplo:

1. Só podem ocorrer seis faces
2. Temos um dado perfeitamente equilibrado, de modo a não favorecer nenhuma face em particular.

Com essas suposições, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes quando o dado é lançado n vezes, e, portanto, a proporção de ocorrência de cada face deve ser $1/6$.

Probabilidade: Exemplo

O modelo probabilístico pode ser construído por meio de premissas, por exemplo:

1. Só podem ocorrer seis faces
2. Temos um dado perfeitamente equilibrado, de modo a não favorecer nenhuma face em particular.

Com essas suposições, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes quando o dado é lançado n vezes, e, portanto, a proporção de ocorrência de cada face deve ser $1/6$.

Probabilidade

Todo experimento (ε) terá seu modelo probabilístico especificado quando estabelecermos:

1. **um espaço amostral**, Ω, que é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento ε:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\},$$

onde ω são os pontos amostrais ou eventos elementares.

1. **uma probabilidade**, $P(\omega)$, para cada ponto amostral, de tal sorte que seja possível encontrar a probabilidade $P(A)$ de qualquer subconjunto A de Ω. Isto é, caso $A \subset \Omega$, por exemplo $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, então pode-se definir a $P(A)$, que é a probabilidade do evento aleatório A ocorrer.

Probabilidade

Todo experimento (ε) terá seu modelo probabilístico especificado quando estabelecermos:

1. **um espaço amostral**, Ω, que é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento ε:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\},$$

onde ω são os pontos amostrais ou eventos elementares.

1. **uma probabilidade**, $\mathrm{P}(\omega)$, para cada ponto amostral, de tal sorte que seja possível encontrar a probabilidade P(A) de qualquer subconjunto A de Ω. Isto é, caso $A \subset \Omega$, por exemplo $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, então pode-se definir a P(A), que é a probabilidade do evento aleatório A ocorrer.

Probabilidade

Exemplos

Lançamos uma moeda duas vezes. Se C indicar cara e R indicar coroa, então um espaço amostral será:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

onde $\omega 1$ = (C,C), $\omega 2$ = (C,R), $\omega 3$ = (R,C), $\omega 4$ = (R,R). É razoável supor que cada ponto ω_i tenha probabilidade $\frac{1}{4}$. Sendo A o evento que consiste nas faces iguais:

$$P(A) = P\{\omega_1, \omega_4\} = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Se A for qualquer evento de Ω, então:

Probabilidade

Exemplos

Experimento: retirar uma lâmpada de um lote e medir o "tempo de vida" antes de queimar. Um espaço amostral conveniente é

$$\Omega = \{t \in \Re : t \geq 0\},$$

O conjunto de todos os números reais não negativos. Se A indicar o evento "o tempo de vida é inferior a 20 horas", então:

$$A = \{t : 0 \leq t < 20\}.$$

$$P(A) = P(0 \leq t \leq 20)$$

Observe que $P(A)$ pode ser próximo de f_A, caso esse seja baseado em um número grande de repetições.

Probabilidade: Algumas Propriedades

Sendo o modelo probabilístico um modelo teórico para as freqüências relativas. Tem-se as seguintes propriedades gerais:

Probabilidade: Algumas Propriedades

Definição

Dado ε e Ω, para cada evento A associa-se um número real, $P(A)$, denominado probabilidade de A e irá satisfazer:

1. Como a freqüência relativa está entre 0 e 1, tem-se:

$$0 < P(A) < 1$$

2. Quanto ao espaço amostral, Ω, temos:

$$P(\Omega) = 1$$

3. Se A e B dois eventos mutuamente exclusivos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade: Algumas Propriedades

Definição

Dado ε e Ω, para cada evento A associa-se um número real, $P(A)$, denominado probabilidade de A e irá satisfazer:

1. Como a freqüência relativa está entre 0 e 1, tem-se:

$$0 < P(A) < 1$$

2. Quanto ao espaço amostral, Ω, temos:

$$P(\Omega) = 1$$

3. Se A e B dois eventos mutuamente exclusivos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade: Algumas Propriedades

Definição

Dado ε e Ω, para cada evento A associa-se um número real, $P(A)$, denominado probabilidade de A e irá satisfazer:

1. Como a freqüência relativa está entre 0 e 1, tem-se:

$$0 < P(A) < 1$$

2. Quanto ao espaço amostral, Ω, temos:

$$P(\Omega) = 1$$

3. Se A e B dois eventos mutuamente exclusivos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade: Algumas Propriedades

Definição

Dado ε e Ω, para cada evento A associa-se um número real, $P(A)$, denominado probabilidade de A e irá satisfazer:

1. Como a freqüência relativa está entre 0 e 1, tem-se:

$$0 < P(A) < 1$$

2. Quanto ao espaço amostral, Ω, temos:

$$P(\Omega) = 1$$

3. Se A e B dois eventos mutuamente exclusivos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 1

Se $\emptyset$ for conjunto vazio, então P($\emptyset$) = 0

Prova

Pode-se escrever para qualquer evento A, sendo $A = A \cup \emptyset$.
Como A e $\emptyset$ são mutuamente exclusivos de iii) tem-se

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) = P(A)$$

Observação: $P(A) = 0 \not\Rightarrow A = \emptyset$

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 1

Se $\emptyset$ for conjunto vazio, então $P(\emptyset) = 0$

Prova

Pode-se escrever para qualquer evento A, sendo $A = A \cup \emptyset$.
Como A e $\emptyset$ são mutuamente exclusivos de iii) tem-se

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) = P(A)$$

Observação: $P(A) = 0 \not\Rightarrow A = \emptyset$

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 2

Se A^c for o complementar de A, assim:

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Prova

Sendo $\Omega = A \cup A^c$ e utilizando ii) e iii) tem-se
$P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$ que é igual a $1 = P(A) + P(A^c)$
Observação: Algumas vezes é mais fácil trabalhar com A^c e $P(A^c)$

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 2

Se A^c for o complementar de A, assim:

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Prova

Sendo $\Omega = A \cup A^c$e utilizando ii) e iii) tem-se
$P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$ que é igual a $1 = P(A) + P(A^c)$
Observação: Algumas vezes é mais fácil trabalhar com A^c e $P(A^c)$

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 3

Se A e B forem dois eventos quaisquer:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Prova

Decompondo em eventos mutuamente exclusivos :

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

$$A \cup B = (A^c \cap B) \cup A$$

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 3

Se A e B forem dois eventos quaisquer:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Prova

Decompondo em eventos mutuamente exclusivos :

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

$$A \cup B = (A^c \cap B) \cup A$$

Consequências das Propriedades Gerais

Prova

Assim:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \tag{1}$$

$$P(A \cup B) = P(A^c \cap B) + P(A) \tag{2}$$

Substituindo (1) de (2) vem:

$$P(A \cup B) = P(B) - P(A \cap B) + P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 4

Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Prova

Reescrever $A \cup B \cup C$ como $(A \cup B) \cup C$ e utilizar o Teo 3.

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 4

Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Prova

Reescrever $A \cup B \cup C$ como $(A \cup B) \cup C$ e utilizar o Teo 3.

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 5

Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$

Prova

Decompondo B em eventos mutuamente exclusivos:
$B = A \cup (B \cap A^c)$ pois $A \subset B$ Assim:
$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A)$ pois $P(B \cap A^c)$é maior ou igual a 0 pela propriedade i).

Consequências das Propriedades Gerais

Teorema 5

Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$

Prova

Decompondo B em eventos mutuamente exclusivos:
$B = A \cup (B \cap A^c)$ pois $A \subset B$ Assim:
$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A)$ pois $P(B \cap A^c)$é maior ou igual a 0 pela propriedade i).

Exercícios

Exercício 1

Para dois eventos A e B quaisquer, tem-se:
$P(A)$=1/2 $P(B)$=1/3 $P(A \cap B) = 1/4$
Calcular:
a) $P(Ac)$; $P(Bc)$: b) $P(A \cup B)$: c) $P(A^c \cap B^c)$ d) $P(A^c \cup B^c)$ e) $P(A^c \cap B)$

Exercícios

Exercício 2

Indique se as afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Se $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ e A e B são mutuamente exclusivos, então temos $P(A \cap B) = {}^{1}/_{8}$. (Dica: pense nos eventos em um diagrama de Venn).

b) Se $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = {}^{1}/_{4}$, então $P(A^c \cap B^c) = {}^{5}/_{12}$.

IMPORTANTE

IMPORTANTE

$P(A)$ e f_A não são as mesmas coisas, será utilizado f_A para aproximar $P(A)$. Sendo que $P(A)$ será sempre o valor postulado e f_A uma aproximação.

Espaço Finito

Para um espaço finito $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ é formado por m número finito de elementos.

Considerando um evento elementar ou simples $A = \{\omega_i\}$, pode-se associar uma probabilidade p_i que satisfaça:

1. $p_i \geq 0$
2. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Espaço Finito

Para um espaço finito $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ é formado por m número finito de elementos.

Considerando um evento elementar ou simples $A = \{\omega_i\}$, pode-se associar uma probabilidade p_i que satisfaça:

1. $p_i \geq 0$
2. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Espaço Finito

Dadas as propriedades acima, suponha um evento A constituído por k resultados, $0 \leq k \leq n$, assim:
$A = \{\omega_{j1}, \omega_{j2}, \ldots, \omega_{jk}\}$ e

$$P(A) = p_{j1} + p_{j2} + \ldots p_{jk}$$

Suponha que todos os resultados de Ω são igualmente verossímeis, assim $p_i = \frac{1}{n}$ e $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \Rightarrow np_i = 1$.

Assim, para qualquer evento A com k resultados possíveis, tem-se:

$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{fav}{tot}$

Exemplo

Joga-se duas vezes a moeda e anota-se se foi cara. O espaço amostral será $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Busca-se o evento A = {uma cara}. Qual a probabilidade de A?
$P(A) = \frac{1}{3}$?

Exemplo

Joga-se duas vezes a moeda e anota-se se foi cara. O espaço amostral será $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Busca-se o evento A = {uma cara}. Qual a probabilidade de A?
$P(A) = \frac{1}{3}$?
Errado resultados acima não são igualmente prováveis.
Reconstruindo o espaço amostral, Ω', do experimento tem-se:
$\Omega' = \{CC, CR, RC, RR\} \rightarrow$ Resultados igualmente prováveis.
Agora $P(A) = \frac{2}{4} = 0,5$

Questão: Qual é o número de casos favoráveis ao evento A?
Vejamos as possibilidades de cálculo

Análise Combinatória

Regra da Multiplicação

Evento 1 pode ocorrer de *n1* formas. Após o Evento 2, pode ocorrer de *n2* formas. Sendo assim, o total de maneira que podem ocorrer numa determinada ordem é:

$n_1 \times n_2$.

Análise Combinatória

Regra da Adição

Evento 1 pode ocorrer de *n1* formas um Evento 2, pode ocorrer de *n2* formas. No entanto não é possível que ambos sejam realizados em conjunto. Assim, o total de maneira que pode-se realizar 1 ou 2 será:

$n_1 + n_2$.

Análise Combinatória

Fatorial

Define-se como fatorial de um número n ($n!$), sendo esse número um inteiro maior do que 1:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

Análise Combinatória

Permutação

O número de permutações de n objetos diferentes será:

$$P_n = n!$$

Permutação com grupos

É o caso quando temos n objetos com subgrupos, $n1$, $n2$, ..., então:

$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots}$, onde $n = n1 + n2 + \ldots$.

Análise Combinatória

Permutação

O número de permutações de n objetos diferentes será:

$$P_n = n!$$

Permutação com grupos

É o caso quando temos n objetos com subgrupos, $n1$, $n2$, ..., então:

$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots}$, onde $n = n1 + n2 + \ldots$.

Análise Combinatória

Arranjo

Quando se quer k objetos entre os n objetos e permutar os k escolhidos, será utilizado o arranjo.
Utiliza-se um arranjo quando se quer formar grupos a partir de um conjunto maior em que a ordem é importante.

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Análise Combinatória

Combinação

Formar grupos a partir de um conjunto de elementos sendo que a ordem não importa.
Considera-se n objetos e extrai-se k entre os n, não importando a ordem.

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Outra notação que é utilizada para combinações é:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

Observação: Note que $Cn,k = Cn,n\text{-}k$.

Probabilidade Condicional

- Para dois eventos quaisquer A e B a probabilidade condicional do evento B dado que o evento A ocorreu será $P(B|A)$.
- Assim, $P(B|A)$ é a $P(B)$ calculada em relação ao espaço amostral reduzido A ao invés do espaço original Ω.
- $P(B)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em Ω
- $P(B|A)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em A (o espaço reduziu de Ω para A)
- Assim, queremos os valores que estão nos eventos A e B simultaneamente, em relação a estar em A.

Probabilidade Condicional

- Para dois eventos quaisquer A e B a probabilidade condicional do evento B dado que o evento A ocorreu será $P(B|A)$.
- Assim, $P(B|A)$ é a $P(B)$ calculada em relação ao espaço amostral reduzido A ao invés do espaço original Ω.
- $P(B)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em Ω
- $P(B|A)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em A (o espaço reduziu de Ω para A)
- Assim, queremos os valores que estão nos eventos A e B simultaneamente, em relação a estar em A.

Probabilidade Condicional

- Para dois eventos quaisquer A e B a probabilidade condicional do evento B dado que o evento A ocorreu será $P(B|A)$.
- Assim, $P(B|A)$ é a $P(B)$ calculada em relação ao espaço amostral reduzido A ao invés do espaço original Ω.
- $P(B)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em Ω
- $P(B|A)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em A (o espaço reduziu de Ω para A)
- Assim, queremos os valores que estão nos eventos A e B simultaneamente, em relação a estar em A.

Probabilidade Condicional

- Para dois eventos quaisquer A e B a probabilidade condicional do evento B dado que o evento A ocorreu será $P(B|A)$.
- Assim, $P(B|A)$ é a $P(B)$ calculada em relação ao espaço amostral reduzido A ao invés do espaço original Ω.
- $P(B)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em Ω
- $P(B|A)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em A (o espaço reduziu de Ω para A)
- Assim, queremos os valores que estão nos eventos A e B simultaneamente, em relação a estar em A.

Probabilidade Condicional

- Para dois eventos quaisquer A e B a probabilidade condicional do evento B dado que o evento A ocorreu será $P(B|A)$.
- Assim, $P(B|A)$ é a $P(B)$ calculada em relação ao espaço amostral reduzido A ao invés do espaço original Ω.
- $P(B)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em Ω
- $P(B|A)$ - Quão provável é o evento B em relação a estar em A (o espaço reduziu de Ω para A)
- Assim, queremos os valores que estão nos eventos A e B simultaneamente, em relação a estar em A.

Probabilidade Condicional

Definição

$P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ desde que $P(A) \geq 0$

Notas

1. Se $A = \Omega$, então $P(B\,|\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(\Omega)} = P(B)$ pois $P(\Omega) = 1$ e $\Omega \cap B = B$
2. Se A e B forem eventos mutuamente exclusivos $P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$
3. Se $B \supset A$, então $P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Probabilidade Condicional

Definição

$P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ desde que $P(A) \geq 0$

Notas

1. Se $A = \Omega$, então $P(B\,|\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(\Omega)} = P(B)$ pois $P(\Omega) = 1$ e $\Omega \cap B = B$
2. Se A e B forem eventos mutuamente exclusivos $P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$
3. Se $B \supset A$, então $P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Probabilidade Condicional

Definição

$P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ desde que $P(A) \geq 0$

Notas

1. Se $A = \Omega$, então $P(B\,|\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(\Omega)} = P(B)$ pois $P(\Omega) = 1$ e $\Omega \cap B = B$
2. Se A e B forem eventos mutuamente exclusivos $P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$
3. Se $B \supset A$, então $P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Probabilidade Condicional

Definição

$P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ desde que $P(A) \geq 0$

Notas

1. Se $A = \Omega$, então $P(B\,|\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(\Omega)} = P(B)$ pois $P(\Omega) = 1$ e $\Omega \cap B = B$
2. Se A e B forem eventos mutuamente exclusivos $P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$
3. Se $B \supset A$, então $P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Probabilidade Condicional

Definição

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ desde que $P(A) \geq 0$

Notas

1. Se $A = \Omega$, então $P(B|\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(\Omega)} = P(B)$ pois $P(\Omega) = 1$ e $\Omega \cap B = B$
2. Se A e B forem eventos mutuamente exclusivos $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$
3. Se $B \supset A$, então $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Teorema da Multiplicação

Definições

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A\,|B\,)$$

De maneira geral, para os eventos A, B e C:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B\,|A\,) \times P(C\,|A \cap B)$$

Para n eventos quaisquer A1, A2, ..., An:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2\,|A_1) \times \ldots \times P(A_n\,|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Método da Composição do Evento

Definição

Os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sendo

1. $\Omega = B_1 \bigcup B_2 \bigcup \ldots \bigcup B_k$
2. $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$

Então a coleção de eventos $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ representa uma partição do espaço amostral Ω.

Se A for qualquer subespaço de Ω e $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ é a partição de Ω, então pode-se decompor A como:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$$

Método da Composição do Evento

Definição

Os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sendo

1. $\Omega = B_1 \bigcup B_2 \bigcup \ldots \bigcup B_k$
2. $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$

Então a coleção de eventos $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ representa uma partição do espaço amostral Ω.

Se A for qualquer subespaço de Ω e $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ é a partição de Ω, então pode-se decompor A como:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$$

Método da Composição do Evento

Definição

Os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sendo

1. $\Omega = B_1 \bigcup B_2 \bigcup \ldots \bigcup B_k$
2. $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$

Então a coleção de eventos $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ representa uma partição do espaço amostral Ω.

Se A for qualquer subespaço de Ω e $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ é a partição de Ω, então pode-se decompor A como:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$$

Método da Composição do Evento

Definição

Como $(A \cap B_1), \ldots, (A \cap B_k)$ são mutuamente excludentes, tem-se:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

Teorema da Probabilidade Total

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_k)P(B_k)$$

Método da Composição do Evento

Definição

Como $(A \cap B_1), \ldots, (A \cap B_k)$ são mutuamente excludentes, tem-se:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

Teorema da Probabilidade Total

$$P(A) = P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) + \ldots + P(A | B_k) P(B_k)$$

Método da Composição do Evento: EXERCÍCIO

Os votantes em determinada cidade, 40% dos eleitores eram da coligação do PT e 60% eram da coligação PSDB. Entre os eleitores do PT 70% são favoráveis a lei antitabagismos e 80% dos eleitores do PSDB são favoráveis. Ao selecionar um eleitor aleatoriamente, qual a probabilidade desse eleitor ser favorável a lei?

Independência

Saber da ocorrência de um evento A pode gerar informação que seja capaz de:

- Alterar a probabilidade de ocorrência de B.
- Não alterar a probabilidade de ocorrência de B.

Definição

Dois eventos são ditos independentes se uma das condições abaixo for validas:

$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Caso contrário os eventos são não independentes

Independência

Saber da ocorrência de um evento A pode gerar informação que seja capaz de:

- Alterar a probabilidade de ocorrência de B.
- Não alterar a probabilidade de ocorrência de B.

Definição

Dois eventos são ditos independentes se uma das condições abaixo for validas:

$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Caso contrário os eventos são não independentes

Independência

Saber da ocorrência de um evento A pode gerar informação que seja capaz de:

- Alterar a probabilidade de ocorrência de B.
- Não alterar a probabilidade de ocorrência de B.

Definição

Dois eventos são ditos independentes se uma das condições abaixo for validas:

$$P(B\,|A) = P(B)$$
$$P(A\,|B) = P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Caso contrário os eventos são não independentes

Independência

Definição

Três eventos, A, B e C, são ditos independentes dois a dois se *todas* as condições abaixo forem validas:

$$P(A \bigcap B) = P(A) \times P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

Para que os eventos sejam mutuamente independentes, além das condições anteriores precisamos da condição:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

Independência

Definição

Então, dizemos que n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes se e somente se:
$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times ... \times P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$, para i = 1,...,n.

Independência

Teorema

Sendo A e B dois eventos independentes então A e $\bar{B}$, B e $\bar{A}$ e $\bar{A}$e $\bar{B}$ também serão independentes.

Notas

Para dois eventos A e B com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, independentes, $\Rightarrow$ que esses não são mutuamente exclusivos.

Independência

Teorema

Sendo A e B dois eventos independentes então A e $\bar{B}$, B e $\bar{A}$ e $\bar{A}$e $\bar{B}$ também serão independentes.

Notas

Para dois eventos A e B com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, independentes, $\Rightarrow$ que esses não são mutuamente exclusivos.

Teorema de Bayes

Teorema

Admitindo que $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ é uma partição de Ω, então a regra de Bayes pode ser assim descrita:

$$P(A_i|\, B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)} = \frac{P(B_j\,|A_i\,) \times P(A_i)}{\sum_{l=1}^{k} P(B_j\,|A_i\,) \times P(A_i)}.$$

Teorema de Bayes

Prova

A prova segue da definição da probabilidade condicional e do teorema da probabilidade total, ou seja:
$P(A_i \cap B_j) = P(B_j|A_i) \times P(A_i)$ e

$$P(B_j) = P(B_j|A_1) \times P(A_1) + \ldots + P(B_j|A_k) \times P(A_k)$$
$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{k} P(B_j|A_i) \times P(A_i)$$

Teorema de Bayes: EXERCÍCIO

Exercício 1

Três máquinas A, B e C produzem 50%, 30% e 20%, respectivamente, do total de peças. A porcentagem de peças defeituosas de cada uma é 3%, 4% e 5%, respectivamente. Seleciona-se uma peça e constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de ser uma peça da máquina A?

Teorema de Bayes: EXERCÍCIO

Exercício 2 - Paradoxo de Monty Hall

Você esta em um show de televisão e o apresentador apresenta a você três portas. Uma delas contém um prêmio colocado aleatoriamente e as outras duas não. Depois que escolheu uma das portas o apresentador que sabe o que está atrás das portas escolhe uma para ser aberta. Existem duas possibilidades se o carro está em uma das duas restantes ele abre com certeza a que não tem nada. Se as duas não tiverem o prêmio ele abre uma delas aleatoriamente. Depois que abre a porta ele pergunta se você gostaria de trocar ou ficar com a sua primeira opção. Ou seja, suponha que você tenha escolhido a porta 2 e ele tenha aberto a porta 3, ele perguntaria "Você gostaria de mudar da porta 2 para a porta 3?" É vantajoso trocar?