Osciladores harmônicos forçados-amortecidos

Sérgio L. Morelhão[1,*]

[1]*Instituto de Física, Universidade de São Paulo,*

CP 66318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil

(Dated: 8 de agosto de 2016)

Resumo

Nos cursos de Física, a abordagem dos osciladores amortecidos e forçados tem sido dividida em vários tópicos: osciladores harmônicos, osciladores amortecidos sub-crítico, crítico e super-crítico, e por fim osciladores forçados e ressonância. O extenso enfoque de cada tópico dificulta a percepção de que esses tópicos derivam de uma única equação geral, a qual será apresentada aqui.

Keywords:

I. TEORIA

Seja uma massa m sob ação de força restauradora $-kx$, força de amortecimento $-\rho\dot{x}$ proporcional à velocidade (e.g. atrito) e força periódica $F(t) = F_0 cos(\Omega t + \varphi)$ aplicada na direção x.

Equação do movimento unidimensional com variáveis reais:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m$$

onde $\gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = k/m$.

Equação do movimento na forma complexa:

$$\ddot{\mathbb{Z}} + \gamma\dot{\mathbb{Z}} + \omega_0^2\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{F}_0}{m}\, e^{i\Omega t} \tag{1}$$

onde $\mathbb{F}_0 = F_0\, e^{i\varphi}$, $x(t) = \mathrm{Re}\{\mathbb{Z}(t)\}$ e $F(t) = \mathrm{Re}\{\mathbb{F}_0\, e^{i\Omega t}\} = F_0\, \cos(\Omega t + \varphi)$.

Solução transitória, obtida tomando $F(t) = 0$. Substituindo $\mathbb{Z}_T(t) = e^{p\,t}$ na equação do movimento obtem-se $p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0$ (equação de 2° grau), portanto

$$\boxed{p = \gamma/2 \pm \beta} \quad \text{e} \quad \boxed{\beta = \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}}$$

A solução

$$\mathbb{Z}_T(t) = e^{-\gamma t/2}\left[a\, e^{\beta t} + b\, e^{-\beta t}\right]$$

é dada pela combinação linear das soluções para os dois valores possíveis de p, e onde a e b são constantes definidas pelas condições iniciais, isto é amplitude e velocidade em $t = 0$,

$$\mathbb{Z}_T(0) = a + b = A_0' \quad \text{(amplitude inicial da solução transitória)} \quad \text{e}$$

$$\dot{\mathbb{Z}}_T(0) = -\frac{\gamma}{2}(a+b) + \beta\,(a-b) = v_0' \quad \text{(velocidade inicial da solução transitória)}\ .$$

Manipulando essas duas equações para eliminar a e b, a solução transitória pode ser escrita em termos das condições iniciais,

$$x_T(t) = \mathbb{Z}_T(t) = e^{-\gamma t/2}\left[A_0'\,\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + (A_0'\gamma/2 + v_0')\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta}\right]\ . \tag{2}$$

Note que esta solução é sempre real, ou seja, $x_T(t) = \mathrm{Re}\{\mathbb{Z}_T(t)\} = \mathbb{Z}_T(t)$, mesmo quando

β for um número imaginário. Por exemplo, se $\beta = i\omega$, então $(e^{\beta t} + e^{-\beta t})/2 = \cos(\omega)$ e $(e^{\beta t} - e^{-\beta t})/2\beta = \sin(\omega)/\omega$. Assim, A_0' e v_0' são também valores reais.

Solução estacionária ($t \to \infty$), obtida substituindo $\mathbb{Z}_E(t) = \mathbb{Z}_0(\Omega)e^{i\Omega t}$ na Eq. 1, o que resulta em

$$\mathbb{Z}_0(\Omega) = \frac{\mathbb{F}_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega} = A(\Omega)\, e^{i[\Phi(\Omega)+\varphi]} \ .$$

Amplitude da oscilação $A(\Omega)$, e a defasagem $\Phi(\Omega)$ em relação à força aplicada são dadas por

$$A(\Omega) = |\mathbb{Z}_0(\Omega)| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}} \quad \text{e} \quad \tan\Phi(\Omega) = \frac{-\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \ .$$

O deslocamento e velocidade reais do oscilado no regime estacionário serão, respectivamente,

$$x_E(t) = \mathrm{Re}\{\mathbb{Z}_E(t)\} = A(\Omega)\cos[\Omega t + \Phi(\Omega) + \varphi] \quad \text{e}$$

$$\dot{x}_E(t) = \mathrm{Re}\{\dot{\mathbb{Z}}_E(t)\} = -\Omega A(\Omega)\sin[\Omega t + \Phi(\Omega) + \varphi] \ .$$

Solução geral, obtida pela superposição das soluções transitória e estacionária:

$$\mathbb{Z}(t) = e^{-\gamma t/2}\left[A_0'\,\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + (A_0'\gamma/2 + v_0')\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta}\right] + \mathbb{Z}_0(\Omega)e^{i\Omega t} \ . \tag{3}$$

Cuidado na hora de encontrar as condições iniciais dessa equação. Se é dado que no instante $t = 0$ o oscilador tem amplitude A_0 e velocidade v_0, então

$$A_0 = x(0) = x_T(0) + x_E(0) \Rightarrow A_0' = A_0 - A(\Omega)\cos[\Phi(\Omega) + \varphi] \quad \text{e}$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = \dot{x}_T(0) + \dot{x}_E(0) \Rightarrow v_0' = v_0 + \Omega A(\Omega)\sin[\Phi(\Omega) + \varphi] \ .$$

Dependendo da intensidade da força de amortecimento, esta equação geral, Eq. 3, se desdobra em três soluções:

- Amortecimento super-crítico ($\gamma > 2\omega_0$), β é um valor real e a solução acima, Eq. 3, fica como está.

- Amortecimento crítico ($\gamma = 2\omega_0$), é necessário tomar o limite $\beta \to 0$, i.e. $e^{\pm\beta t} \to 1 \pm \beta t$, resultando em

$$\mathbb{Z}(t) = e^{-\gamma t/2}\left[A_0' + (A_0'\gamma/2 + v_0')t\right] + \mathbb{Z}_0(\Omega)e^{i\Omega t}\ . \tag{4}$$

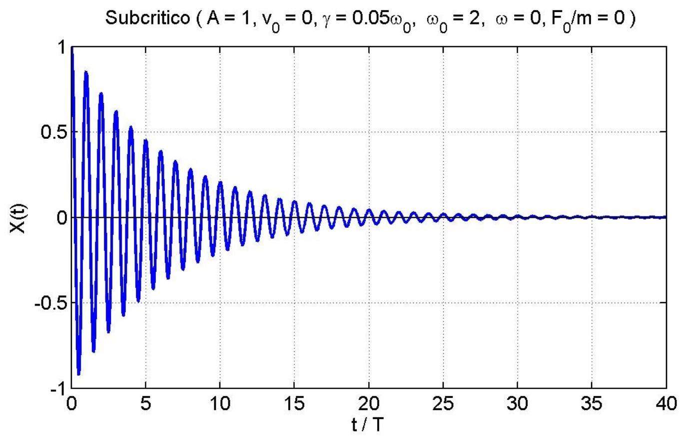
- Amortecimento sub-crítico ($\gamma < 2\omega_0$), $\beta = i\omega$ onde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$, de modo que

$$\mathbb{Z}(t) = e^{-\gamma t/2}\left[A_0'\,\cos(\omega t) + (A_0'\gamma/2 + v_0')\frac{\mathrm{sen}(\omega t)}{\omega}\right] + \mathbb{Z}_0(\Omega)e^{i\Omega t}\ . \tag{5}$$

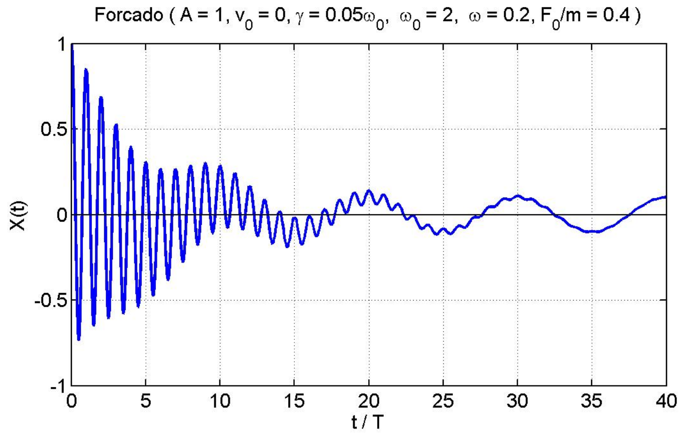
II. APLICAÇÕES

Os gráficos apresentados nesta seção foram calculados com a rotina em código MatLab anexa.

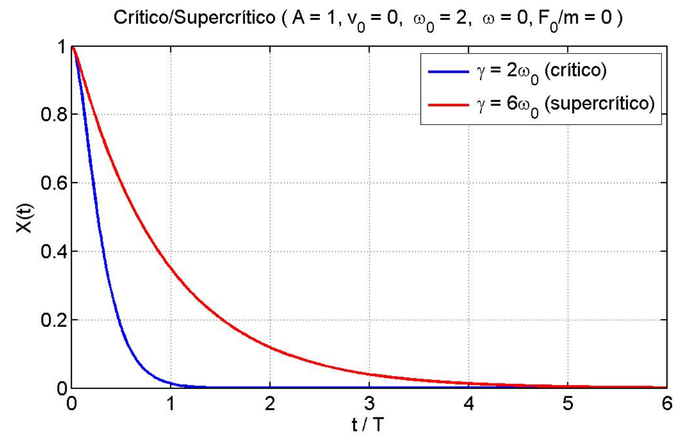
Exemplo 1. Sistema subamortecido $\gamma = 0,05\omega_0$, sem força aplicada, $F_0 = 0$. Mola com $k = 1\,\mathrm{N/m}$, massa $m = 250\,\mathrm{g}$, implicando em $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad/s}$. Sendo o deslocamento inicial de $1\,\mathrm{m}$ e velocidade nula, as condições iniciais para a equação (5) são $A_0' = 1\,\mathrm{m}$ e $v_0' = 0$.



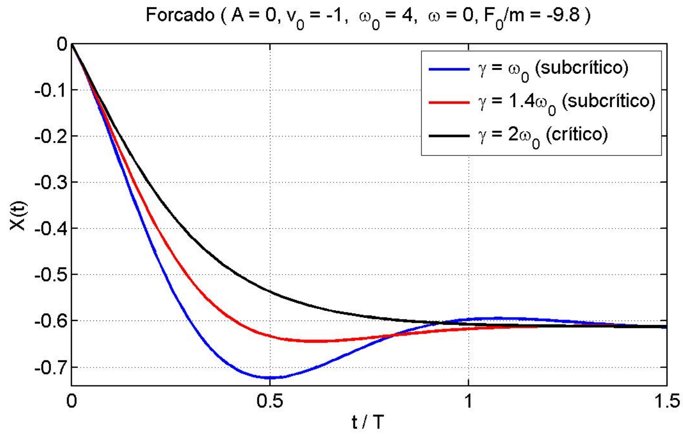
Exemplo 2. Mesmo sistema do exemplo 1, mas com força $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$ onde $\Omega = \omega_0/10$ e $F_0 = 0,1\,\mathrm{N}$. Para os valores dados, $A(\Omega) = 0,101\,\mathrm{m}$ e $\Phi(\Omega) \simeq 0$, as condições iniciais são $A_0' = A_0 - A(\Omega)\,\cos(\Phi) \simeq 0,899\,\mathrm{m}$ e $v_0' = v_0 + \Omega A(\Omega)\,\sin(\Phi) \simeq 0$.



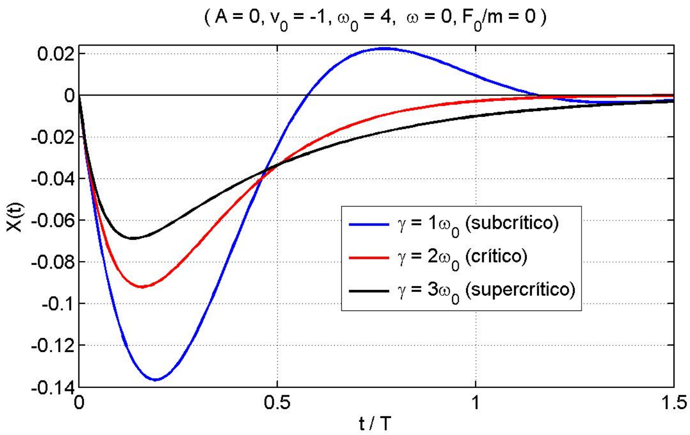
Exemplo 3. Crítico e supercrítico. Mesmo sistema do exemplo 1, mas quando se aumenta o amortecimento para $\gamma = 2\omega_0$ e $\gamma = 6\omega_0$, equações (4) e (3) com $A_0' = 1\,\mathrm{m}$ e $v_0' = 0$.



Exemplo 4. Um homem salta de uma janela e atinge com velocidade de $1\,\mathrm{m/s}$ uma plataforma suspensa por molas em equilíbrio. O sistema homem mais plataforma tem frequencia de ressonância $\omega_0 = 4\,\mathrm{rad/s}$. Amortecimento crítico, $\gamma = 2\omega_0$, evita que o sistema oscile, mas a força de reação da plataforma é maior. Como o sistema está sujeito à força da gravidade, $F_0/m = -9,8\,\mathrm{m/s^2}$ e $\Omega = 0$ (força constante).



Exemplo 5. Um sistema massa-mola repousa sobre uma superfície horizontal. Ao absorve o impacto de um projétil, começa a se mover com velocidade de $1\,\mathrm{m/s}$ e frequencia de ressonância $\omega_0 = 4\,\mathrm{rad/s}$. Na horizontal não tem força de gravidade, portanto o sistema retorna à posição inicial sem oscilar e com mínimo de dano no ponto de impacto quando $\gamma = 2\omega_0$ (amortecimento crítico).



Apêndice A: ROTINA EM MATLAB

```
function M=mhfa(A,v0,gamma_w0,w0,w,F,N)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% A = amplitude em t = 0                                                  %
% v0 = velocidade em t = 0                                                %
% gamma_w0 = amortecimento em termos de gamma/w0                          %
% w0 = freq. natural                                                      %
% w = freq. da força aplicada                                             %
% F = força aplicada / massa                                              %
% N = numero de periodos                                                  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
gamma = gamma_w0 * w0;
beta = sqrt(0.25*gamma*gamma - w0*w0);  % freq. final
if (beta == 0), beta = 1e-6; end;
Z0 = F / (w0*w0 - w*w + 1i*gamma*w);
if (w > 0.1*w0) T = 2*pi / w; else  T = 2*pi / w0; end;
A = A - real(Z0); v0 = v0 + w * imag(Z0);  % condições iniciais
a = 0.5 * A * (1 + 0.5*gamma/beta) + 0.5*v0/beta;
b = 0.5 * A * (1 - 0.5*gamma/beta) - 0.5*v0/beta;
k1 = -0.5*gamma + beta;
k2 = -0.5*gamma - beta;
dt = T/100;
t = 0:dt:N*T;
Z = a*exp(k1*t) + b*exp(k2*t);  % Solução transitória
Z = Z + Z0*exp((1i*w)*t);       % Solução transitória + estacionária
Y = real(Z);
X = t/T;
% início da parte gráfica
if (F == 0)
    if (gamma < 2*w0) tipo = 'Subcritico';
                 else tipo = 'Critico/Supercritico';
    end;
else tipo = 'Forcado';
end;
titulo = [tipo ' ( A = ' num2str(A) ', v_0 = ' num2str(v0)];
titulo = [titulo ', \gamma = ' num2str(gamma/w0) '\omega_0,  \omega_0 = '];
titulo = [titulo num2str(w0) ',  \omega = '];
titulo = [titulo num2str(w) ', F_0/m = ' num2str(F) ' )'];
hf = figure(1); clf;
set(hf,'InvertHardcopy', 'off','Color','w','PaperType','A4',...
    'PaperPositionMode','manual','PaperPosition',[0.25 4.70 8 4.5])
plot(X,Y,'b','LineWidth',2)
hold on
    plot([0 N],[0 0],'k','LineWidth',1)
hold off
set(gca,'FontName','Arial','FontSize',14,'LineWidth',1);
axis tight
title(titulo)
xlabel('t / T')
ylabel('X(t)')
grid
M=[X; Y]';
```

* Electronic address: morelhao@if.usp.br