INTRODUÇÃO À ANÁLISE ESTATÍSTICA DE MEDIDAS 14

Sérgio Ricardo Muniz

14.1 Introdução: o que é estatística e para que serve?

A maioria das pessoas tem uma ideia, ainda que não a mais precisa ou correta, do que seja estatística. Essa palavra é usada coloquialmente em vários contextos, mas geralmente está associada à ideia de números, previsões e comparações entre conjuntos de dados numéricos ou medidas. Assim, de uma forma bem simplificada, podemos pensar na estatística como um conjunto de métodos matemáticos que nos permite organizar e analisar dados e informações.

Curiosamente, muitos têm a tendência de achar os métodos estatísticos um pouco confusos e difíceis de entender. Talvez isso seja consequência da forma um pouco abstrata como, às vezes, ela é apresentada. A razão dessa abstração, muitas vezes, é permitir uma maior precisão e generalidade na definição dos conceitos matemáticos relevantes, que são bastante gerais e aplicáveis nas mais diversas áreas.

Neste texto, porém, seguiremos um caminho um pouco diferente, conduzindo a discussão de uma forma mais prática e aplicada. Sempre que possível, usaremos exemplos concretos de utilização dessas ferramentas em condições típicas, que poderiam ser tanto de um laboratório de pesquisa quanto do seu dia a dia. O objetivo é aproveitar ao máximo os conceitos intuitivos já existentes, ganhos através da experiência cotidiana, e uni-los aos conhecimentos adquiridos neste curso, para construir e refinar os novos conceitos necessários para responder às perguntas que iremos propor.

14.2 A estatística no dia a dia

Atualmente, até mesmo graças à mídia, diversos conceitos estatísticos passaram a fazer parte do nosso vocabulário cotidiano. Conceitos como valor médio, desvio estatístico, incerteza, projeções e probabilidade, além de diversas formas de representação gráfica, são frequentemente vistos na imprensa e na literatura técnica. São usados, por exemplo, como formas de apresentar relatórios de produtividade ou desempenho de parâmetros da economia e do mercado financeiro, ou nas projeções de votação de eleições e até mesmo nas análises esportivas. São números assim que indicam, por exemplo, as chances de sucesso de um tratamento médico, ou o risco de expansão de uma nova epidemia mundial. Enfim, estamos cercados por dados estatísticos por todos os lados. Estamos acostumados a vê-los nos jornais, revista, internet e televisão, mas quantas vezes você já parou para pensar no que esses números realmente significam? Como será que eles são produzidos e qual a sua confiabilidade? Você já percebeu que, frequentemente, tomamos decisões importantes com basea nesses números? Mas o que é mesmo que eles representam?

O objetivo deste texto é justamente desmistificar alguns desses conceitos, permitindo-lhes responder às questões levantadas aqui, e a muitas outras que surgirão ao longo deste texto. Naturalmente, dada a limitação de tempo e os objetivos principais deste nosso curso, faremos isso, necessariamente, de uma forma limitada. Vamos concentrar-nos nos conceitos e ferramentas principais, que são de uso frequente nas mais diversas áreas da ciência e, em particular, no contexto de medições experimentais.

14.3 Exatidão, precisão, erros e incertezas

No texto **Grandezas e medidas físicas**, introduzimos o conceito de medidas de grandeza e das incertezas associadas às medidas. Vimos que a palavra "erro" tem um significado científico que é diferente do coloquial "engano". Na ciência, os erros de medidas não são "enganos" ou "falhas", mas representam uma inevitável incerteza que acompanha toda e qualquer medida, por mais bem feita que ela seja. Naquela ocasião, destacamos a existência de dois tipos de erros de medida: os aleatórios ou estatísticos e os erros sistemáticos. Veremos agora como a análise estatística pode ajudar-nos a quantificar e minimizar as incertezas das medidas.

No contexto que se segue, trataremos as palavras "erro" e "incerteza" como sinônimos, representando o desconhecimento ou ignorância a respeito do valor exato de certa grandeza medida experimentalmente.

Em contraste, é necessário fazer uma importante distinção entre outras duas palavras que temos usado, até aqui, de forma um pouco coloquial. Essas palavras são: exatidão e precisão. Até este momento, não tínhamos as ferramentas necessárias para fazer a distinção correta. Agora, graças à estatística, teremos meios de entender isso de forma mais clara.

Exemplos

Para entender melhor, vamos considerar um exemplo prático.
Suponhamos que dois estudantes tenham acabado de fazer uma prática de laboratório, onde mediram o período de oscilação de um pêndulo. Cada um fez, cuidadosamente, o seu próprio conjunto de medidas usando os mesmos instrumentos. Em princípio, parece razoável imaginar que ambos deveriam encontrar os mesmos resultados. Mas será que isso é mesmo razoável?
Se ambos os estudantes usaram o mesmo método de medida, o mesmo pêndulo e cronômetros idênticos, a expectativa é, de fato, a de que encontrem valores parecidos. Mas será que esses valores serão exatamente os mesmos?
Para piorar a situação, apesar dos cuidados que ambos afirmam terem tido, os resultados apresentados por eles não são iguais. Um deles reportou o período como 1,4 s enquanto o outro afirma que o período do pêndulo é 1,56 s. Qual desses valores está correto? Em quem devemos acreditar?
Pelo que aprendemos até agora, sobre algarismos significativos, somos tentados a dar crédito ao segundo aluno, que parece ser mais preciso, representando suas medidas com duas casas decimais. Mas a questão importante aqui é se os algarismos usados são, de fato, significativos.
Na verdade, a forma como o resultado foi apresentado ainda não nos permite chegar a uma conclusão. Pode ser que o primeiro tenha sido displicente ao não carregar o terceiro dígito, ou talvez ele já tenha feito uma análise e percebido que suas medidas não permitiam expressar o valor com um dígito extra. Por outro lado, o segundo estudante pode mesmo ter sido mais cuidadoso nas suas medidas, ou pode apenas estar querendo impressionar, adicionando um dígito, sem ter certeza dele. Como, então, avaliar a melhor medida? Em quem devemos confiar?
Se quisermos ser objetivos, a melhor alternativa é pedir aos alunos que mostrem seus resultados medidos, já que uma única medida não nos permite avaliar completamente a incerteza associada a ela.

Como veremos adiante, são necessários, pelo menos, dois números (parâmetros) para caracterizar um conjunto de medidas que torne possível fazer um julgamento objetivo da confiabilidade da medida.

Tabela 14.1

Medidas A:	1,41 s	1,52 s	1,28 s	1,61 s	1,39 s
Medidas B:	1,53 s	1,56 s	1,55 s	1,58 s	1,56 s

Os resultados obtidos pelos estudantes são mostrados na **Tabela 14.1**. Nela percebemos imediatamente que, embora ambas tenham três dígitos, as medidas B parecem ser, de fato, mais precisas, pois a faixa de variação dos valores é menor do que a dos observados nas medidas A. Essas observações intuitivas (baseadas apenas no senso comum) estão corretas, mas como expressar isso de forma quantitativa? Veremos isso mais adiante.

Neste momento, queremos entender melhor a relação entre essas medidas e os conceitos de exatidão e precisão. Para isso faremos uso das ferramentas de visualização (gráficos), vistos no texto **Representação gráfica**, que nos ajudarão a perceber isso de forma mais clara.

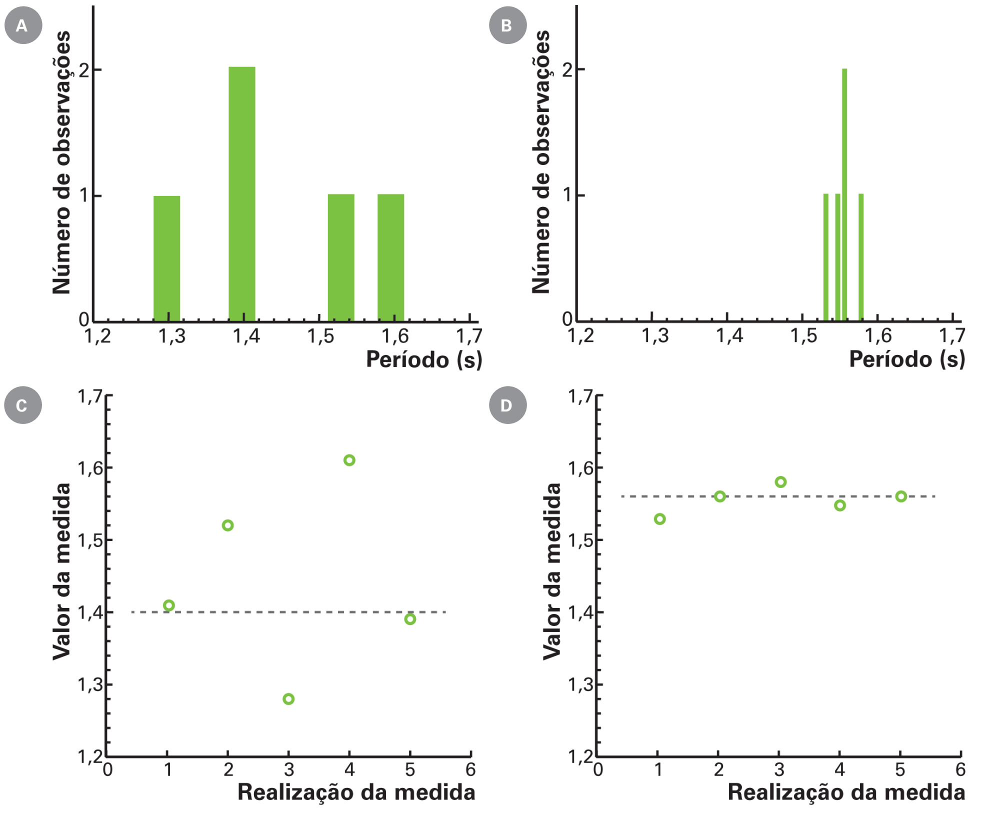

Figura 14.1: Diferentes maneiras de representar graficamente um conjunto de medidas experimentais, úteis para mostrar a variação e dispersão dos dados. Os gráficos **(A)** e **(B)** representam um histograma com a distribuição (frequência) com que os valores são observados numa certa faixa. Os gráficos **(C)** e **(D)** mostram os valores medidos em cada realização do experimento. A linha tracejada indica o valor médio de cada conjunto de medidas. A distribuição (distância) dos pontos em torno do valor médio dá uma ideia da dispersão (variação) da medida.

Podemos observar claramente, pelos gráficos da **Figura 14.1**, aquilo que a tabela já nos havia indicado. Graficamente, porém, fica mais fácil perceber que o conjunto de medidas B tem uma "dispersão" muito menor, em torno de um valor central. Notamos, por exemplo, que no gráfico **(d)**, os valores medidos se distribuem numa região bem menor em torno da reta pontilhada, que indica o valor médio daquele conjunto de medidas.

Quando alguém diz que o valor médio de certa grandeza é $\overline{X}$, é mais ou menos comum o entendimento de que esse valor é aquele que melhor representa ("na média") certo conjunto de valores X: $\{X_1, X_2, X_3,...X_n\}$. Iremos definir, de um modo mais formal, o que entendemos exatamente por valor médio, mas já podemos perceber, na **Figura 14.1**, que esse parâmetro sozinho não diz toda a história do experimento, e não é suficiente para avaliar a confiabilidade das medidas. Como podemos, a partir da **Tabela 14.1**, quantificar a "dispersão" dos valores observados graficamente na **Figura 14.1**? Como podemos dar um valor numérico para a incerteza associada a cada conjunto de medidas experimentais? Veremos que uma forma conveniente de fazer isso e, portanto, estabelecer a precisão de um conjunto de medidas, é usar o chamado **desvio estatístico**, que será discutido logo mais.

Antes de entrarmos nos detalhes técnicos, porém, vamos encerrar esta seção, retornando à pergunta inicial. Qual a diferença entre precisão e exatidão? Já vimos que a dispersão (variabilidade) dos valores medidos está associada à precisão da medida. Assim, quanto menor a dispersão ou faixa de valores incertos, maior será a precisão da medida.

Mas seria isso o mesmo que exatidão? Seria correto dizer que as medidas B têm também maior exatidão do que as medidas A?

A resposta, na verdade, é negativa. Para entender isso, vamos recorrer ao nosso conceito intuitivo do que significa dizer que um valor é exato. Para a maioria das pessoas esse conceito é claro: ele quer dizer que o valor medido corresponde ao valor "correto" ou verdadeiro da grandeza. Outra situação em que se usa essa palavra é quando se deseja dizer que não há incertezas associadas àquele valor. Por exemplo, neste último caso, alguém poderia dizer que a velocidade da luz no vácuo é exatamente c = 299.792.458 m/s, pois esse é um valor definido no SI (Sistema Internacional) como o valor aceito (ou "correto"). Por outro lado, se alguém fizesse um experimento para medir a velocidade da luz, por mais preciso que fosse, não poderia indicar o valor medido sem apontar a incerteza experimental daquela medida. Nesse sentido, um valor medido nunca é exato.

No caso das medidas, o termo exatidão corresponde a quão próximo do valor "correto", ou assumido como verdadeiro, uma medida ou conjunto de medidas realmente é do valor aceito como o correto. Note que esse é um conceito bem diferente do conceito de precisão, que está relacionado à dispersão (ou desvio estatístico) das medidas.

Finalmente, para esclarecer isso de vez, vamos recorrer a um diagrama clássico que pretende ilustrar bem a distinção entre os dois conceitos. Para isso, observe a **Figura 14.2**, na qual é mostrado um alvo de tiros, onde os pontos indicam o local de acerto dos tiros em cada caso. Nesse diagrama, a situação **(b)** é bastante precisa, porém, os tiros estão longe do centro do alvo, enquanto **(c)** é pouco preciso, mas acurado (valor médio é próximo do valor esperado). A melhor situação ocorre em **(a)**, onde há precisão (pouca dispersão) e acurácia (exatidão = próximo do valor correto), enquanto a pior situação é **(d)**, onde há pouca precisão e pouca acurácia.

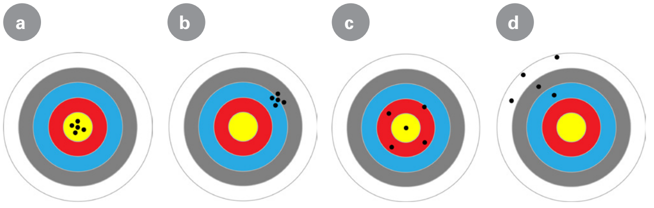

Figura 14.2: Diagrama comparativo ilustrando os conceitos de precisão e exatidão. Os pontos indicam os tiros num alvo. **(a)** Representa um conjunto preciso e exato, enquanto **(b)** é preciso, mas pouco exato, pois a dispersão é pequena, mas está longe do centro do alvo. **(c)** Representa uma situação menos precisa, porém, cujo valor médio é razoavelmente exato (próximo do centro do alvo). Finalmente, **(d)** representa a situação onde há imprecisão e pouca exatidão.

Resumindo, precisão não é tudo. Por exemplo, você pode ser muito preciso ao jogar o papel no lixo, mas ainda assim errar sempre no mesmo lugar (fora do cesto), similar à **Figura 14.2b**. Isso não conta pontos a seu favor. Por outro lado, alguém menos preciso, embora acerte cada hora num lugar diferente (**Figura 14.2c**), pode eventualmente acertar uma vez ou outra dentro do cesto, e ainda assim conseguir um resultado, na média, melhor que o seu.

No caso das medidas, em relação aos tipos de erros, a acurácia (exatidão) é mais afetada pelos erros sistemáticos enquanto a precisão está ligada ao desvio estatístico dos erros aleatórios. Enquanto o segundo sempre pode ser melhorado com um número maior de medidas, o primeiro não pode.

Na prática, porém, a determinação da acurácia, e por consequência dos erros sistemáticos, não é tão simples como indicado na **Figura 14.2**, pois, ao fazer uma medida, em geral, não se conhece o seu valor verdadeiro (não há alvo). Esse valor só pode ser "inferido" a partir do valor mais provável das medidas. É aí que entram os métodos estatísticos, como veremos a seguir.

14.4 Valor verdadeiro e medidas numéricas da melhor estimativa e da dispersão

No texto **Representações gráficas**, nós aprendemos como usar representações gráficas para facilitar a visualização e dar sentido aos dados num conjunto numérico. Outra forma de fazer isso é através de medidas numéricas representativas desse conjunto de dados. Dois tipos importantes de medidas numéricas obtidas através dos métodos estatísticos são: **as medidas de tendência (localização) central e as medidas de variação ou dispersão de valores em torno do valor central**. Cada uma delas pode fornecer informações importantes sobre todo o conjunto de dados.

14.4.1 Medidas de tendência central: média, mediana e moda

As medidas de tendência central fornecem um valor numérico representativo do valor médio (central) de uma distribuição de valores. Existem diferentes tipos de médias, e cada uma delas tem suas vantagens e desvantagens, que só vão depender dos dados e dos fins desejados.

Os tipos mais comuns de medidas de tendência central são: a **média aritmética** (ou, simplesmente, média ou valor médio), a **mediana**, a **moda**, a **média geométrica** e a **média quadrática**.

14.4.1.1 Média aritmética

A média aritmética ou média de um conjunto de N valores X: $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_n\}$, usualmente representado por $\bar{X}$, é definida por:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{14.1}$$

Exemplos

- Exemplo 1

A média dos números $\{3, 2, 5, 7, 10\}$ é:

$$\bar{X} = \frac{3+2+5+7+10}{5} = \frac{27}{5} = 5{,}4$$

14.4.1.2 Média ponderada

Quando os valores $X_1, X_2,...X_K$, têm associados a eles certos fatores de peso, ou ponderação, $w_1, w_2, ..., w_K$, que os distinguem em importância relativa dentro de um conjunto de valores, a média ponderada é definida por:

$$\bar{X} = \frac{w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3 + \ldots + w_KX_K}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_K} = \frac{\sum_{i=1}^{K} w_iX_i}{\sum_{i=1}^{K} w_i} \tag{14.2}$$

• Exemplo 2

Se as atividades *online* têm peso 40 e as presenciais, peso 60, qual é a média ponderada de uma aluna com nota *online* 9,5 e presencial 6,0?

$$\overline{X} = \frac{40 \cdot 9{,}5 + 60 \cdot 6{,}0}{100} = \frac{380 + 360}{100} = 7{,}4$$

14.4.1.2.1 Cálculo da média com histogramas

Quando os valores X_1, X_2, ..., X_K, ocorrem com frequências, f_1, f_2, ..., f_K, respectivamente, a média aritmética é dada por:

$$\overline{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + \ldots + f_K X_K}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_K} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{K} f_i} \qquad 14.3$$

Note que esse tipo de agrupamento é equivalente a um histograma de frequências, como visto anteriormente, e o cálculo da média é idêntico ao da média ponderada. Nesse caso, os pesos são as frequências de ocorrências de um dado valor X_i.

• Exemplo 3

Se os valores 5, 8, 6, 2 ocorrem com frequências 3, 2, 4 e 1, respectivamente, a média desses valores será:

$$\overline{X} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 2}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{15 + 16 + 24 + 2}{10} = 5{,}7$$

14.4.1.3 Mediana

A mediana de um conjunto de números ordenados é o valor central (localizado no meio da sequência ordenada), que divide o conjunto em, aproximadamente, 50% dos valores abaixo e 50% acima dele.

Na prática, para determinar esse valor, observa-se que, quando o número de elementos for ímpar, a mediana será o elemento do meio da sequência ordenada. Quando o número de elementos for par, a mediana será a média aritmética dos dois valores centrais.

- Exemplo 4:

No conjunto de números {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} a mediana é 4.

- Exemplo 5:

No conjunto de números {1, 2, 3, 4, 6, 6, 7, 8} a mediana é 5.

14.4.1.4 Moda

A moda de um conjunto é o elemento que ocorre com maior frequência, isto é, o elemento mais comum. A moda pode não existir (quando todos ocorrem com a mesma frequência) e, mesmo que exista, pode não ser única (quando há mais de um elemento com frequência máxima).

- Exemplo 6

No conjunto de números {2, 2, 3, 5, 5, 5, 8, 9} a moda é 5.

- Exemplo 7

O conjunto {2, 3, 5, 7, 15, 8, 9} não tem moda.

- Exemplo 8

No conjunto de números {1, 2, 2, 5, 7, 7, 3} as modas são 2 e 7. Este tipo de conjunto (ou distribuição) é chamado bimodal.

Num histograma de frequência, a moda será sempre o valor (ou valores) que ocorre(m) com maior frequência. Distribuições com um único pico (valor máximo) são ditas unimodais.

14.4.1.4.1 Relação entre média, mediana e moda

No caso de uma distribuição unimodal simétrica as três medidas de tendência central terão valores bem próximos, e no caso perfeitamente simétrico elas irão sempre coincidir. Isso não ocorre se a distribuição for assimétrica ou multimodal.

Para curvas de frequência (histograma) unimodal moderadamente assimétricas, seja com viés positivo ou negativo, existe uma relação empírica que relaciona os valores dessas três medidas:

$$\text{Média} - \text{Moda} = 3\,(\text{Média} - \text{Mediana}) \tag{14.4}$$

A **Figura 14.3** apresenta uma ilustração aproximada das posições relativas dessas três medidas de tendência central para diferentes distribuições.

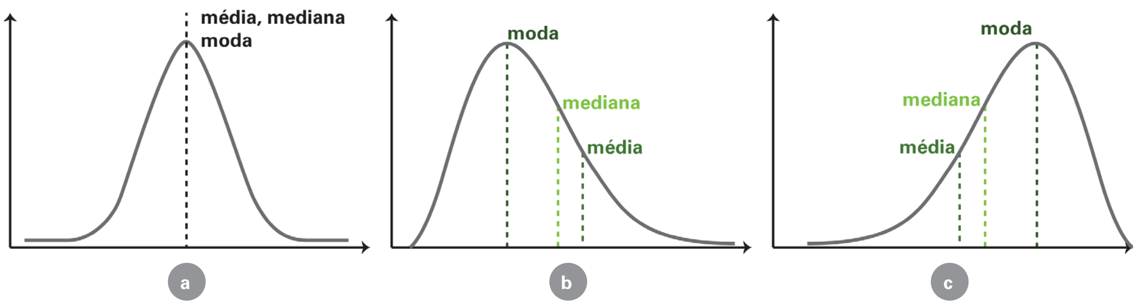

Figura 14.3: comparação das posições das medidas de tendência central em diferentes distribuições. **(a)** Distribuição perfeitamente simétrica: todas as medidas coincidem. **(b)** e **(c)** Distribuições assimétricas, enviesadas à esquerda e direita, respectivamente: as posições da média, mediana e moda são diferentes e seguem aproximadamente a relação empírica apresentada acima.

Comentamos, anteriormente, que cada uma dessas medidas tem suas vantagens e desvantagens, dependendo do conjunto de dados e do propósito da medida. Vamos agora discutir melhor alguns desses casos, para que você entenda a significância deles e evite ser vítima do uso errado e/ou distorcido de informações estatísticas, com respeito às medidas de tendência central.

Como será discutido depois, no limite onde $N \to \infty$ (números grandes de amostra), a média será, em geral, a melhor estimativa do valor verdadeiro (ou aceito como verdadeiro) de uma medida física onde só existem erros estatísticos ou aleatórios. Mas, no limite em que $N \to 0$ (números pequenos), que é o mais próximo da realidade prática (onde temos uma amostra limitada de uma população ou universo de possibilidades), usar a média como medida de localização central não é isento de problemas.

Por exemplo, num conjunto pequeno de medidas, se houver uma com valor muito diferente dos demais (seja muito maior ou menor), isso irá causar um viés do valor médio em direção a esse valor destoante dos demais.

• Exemplo 9
Considere que num conjunto de medidas tenham sido observados os valores $X = \{2,3,3,4,13\}$. O valor médio desse conjunto é $\bar{X}_5 = 5$, enquanto a média apenas dos quatro primeiros valores é $\bar{X}_4 = 3$. Portanto, o valor 13, claramente destoante das demais medidas que parecem se agrupar em torno do valor 3, tem sozinho um grande efeito no cálculo da média. Esse caso ilustra a fragilidade da média de uma amostra pequena para dados espúrios ("*outliers*"), que poderia incluir um erro acima do normal ou até mesmo de uma eventual falha do operador durante a medida.

Isso já não ocorre com a moda e a mediana, que são medidas centrais bem mais robustas. No exemplo acima, por exemplo, ambas coincidiriam com a média $\bar{X}_4$ dos primeiros pontos. A moda tem ainda a vantagem de poder ser usada até mesmo com grandezas que não são numéricas como, por exemplo, respostas de questionários, como os censos do IBGE ou sobre intenção de votos, onde as categorias podem ser nomes. Por outro lado, a moda nem sempre é bem definida (pode não existir) e tanto ela quanto a mediana são mais difíceis de calcular num caso geral, pois elas exigem a ordenação dos dados, o que é custoso em amostras grandes. Já a média é sempre definida num conjunto numérico, leva em conta todos os dados do conjunto, e é melhor justamente em amostras grandes.

14.4.1.5 Média geométrica

A média geométrica G de um conjunto de N valores $\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N\}$ é definida como a raiz de ordem N do produto desses valores:

$$G_x = \sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \cdots X_N} \qquad (14.5)$$

• Exemplo 10
A média geométrica dos números 2, 4 e 8 é:

$$G = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} = 4$$

14.4.1.6 Média quadrática: valor-rms

A média quadrática de um conjunto $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_N\}$ é definida como a raiz quadrada da média dos valores ao quadrado:

$$\langle X \rangle = \sqrt{\overline{X^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i)^2}{N}} \qquad 14.6$$

• Exemplo 11

A média quadrática dos números 2, 4 e 8 é:

$$\langle X \rangle = \sqrt{\frac{2^2 + 4^2 + 8^2}{3}} = \sqrt{\frac{84}{3}} \cong 5{,}29$$

A média quadrática é muito útil nos casos em que os valores seguem uma distribuição simétrica centrada no valor zero, onde a média aritmética, moda e mediana teriam valor nulo (zero).

Um exemplo prático disso é a tensão elétrica da sua casa, que oscila periodicamente de forma senoidal, e na média (simples) tem valor nulo, mas não é isso que você vai sentir se puser os dedos diretamente na tomada. Para expressar o valor efetivo da tensão elétrica alternada, por exemplo, utiliza-se o chamado valor quadrático médio, ou valor-rms (que vem do inglês: "*root mean square*"). Esse tipo de medida estatística é usado também em outras áreas da física e da engenharia.

14.5 **Medidas de dispersão:** variância e desvio-padrão

Como foi visto, embora o valor médio seja uma medida importante, ele sozinho não fornece toda a informação relevante sobre um conjunto de medidas. Vimos um exemplo disso na **Figura 14.1**, onde as medidas A e B têm características bem diferentes com relação à média.

Também mencionamos que a precisão estava relacionada ao desvio estatístico das medidas. Vamos agora esclarecer o que isso significa.

Apresentaremos agora as chamadas medidas de dispersão ou variação de um conjunto de valores. Essas medidas servem para informar o grau em que os dados numéricos tendem a se dispersar (variar) em torno do valor médio. Fornecem, portanto, uma medida da significância e/ou confiabilidade do valor médio de um conjunto de números.

Assim como no caso das medidas de tendência (localização) central, existem várias medidas de dispersão. Algumas das mais comuns são: **amplitude total**, **desvio médio**, **variância** e o **desvio-padrão**.

14.5.1 Amplitude de variação total: faixa de valores

A amplitude total de um conjunto de valores $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_N\}$ é a diferença entre os valores mais altos e os mais baixos do conjunto.

$$\Delta = \left(X_{\max} - X_{\min}\right) \qquad 14.7$$

• Exemplo 12

Na discussão sobre a **Tabela 14.1**, as amplitudes totais das medidas A e B são dadas a seguir:

$$\Delta_{\mathrm{A}} = (1{,}61\ \mathrm{s} - 1{,}28\ \mathrm{s}) = 0{,}33\ \mathrm{s} \ \text{ e } \ \Delta_B = (1{,}58\ \mathrm{s} - 1{,}53\ \mathrm{s}) = 0{,}05\ \mathrm{s}$$

14.5.2 Desvio médio (absoluto)

O conceito de desvio em estatística está diretamente ligado ao conceito de erro de medidas ou variabilidade (nos casos em que as diferenças decorrem de razões naturais). Vimos que, em geral, ao fazer uma medida, não se conhece o seu "valor verdadeiro". A estimativa desse valor é dada pela média das medidas. Em termos estatísticos, o desvio é definido como a diferença entre o valor de uma medida e o valor médio do conjunto de medidas onde ela se inclui.

$$\delta_i = \left(X_i - \bar{X}\right) \tag{14.8}$$

O desvio médio de um conjunto de N valores $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_N\}$, é definido por:

$$DM = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|X_i - \bar{X}\right| \tag{14.9}$$

onde $\bar{X}$ é a média do conjunto e $\sum_{i=1}^{N}\left|X_i - \bar{X}\right|$ é o valor absoluto de δ_i.

- Exemplo 13

Determinar o desvio médio do conjunto $\{1, 3, 5, 7\}$:

$$\bar{X} = \frac{1+3+5+7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$DM = \frac{|1-4|+|3-4|+|5-4|+|7-4|}{4} = \frac{3+1+1+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Pode-se definir também o desvio mediano absoluto simplesmente substituindo a média aritmética pela mediana na definição acima. Os desvios mediano e médio utilizam a função módulo para calcular o valor absoluto dos desvios, e assim evitam o cancelamento mútuo entre os valores positivos e negativos dos desvios. Devido, porém, às suas características matemáticas, o uso da função módulo é menos conveniente no estudo das propriedades dos desvios estatísticos. Por isso, é mais comum o uso de outra medida de dispersão que utiliza o quadrado dos desvios em relação à média.

14.5.3 Variância

A variância de um conjunto de dados $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_N\}$ é definida por:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\delta_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \tag{14.10}$$

É possível demonstrar que a definição **14.10** é equivalente à forma alternativa indicada abaixo, que frequentemente é mais conveniente, de expressar a variância:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - (\bar{X})^2 = \langle X \rangle^2 - (\bar{X})^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 \qquad 14.11$$

isto é, a variância é a diferença entre a média quadrática e o quadrado da média. A vantagem dessa forma alternativa é uma ligeira facilidade nos cálculos, que se tornam um pouco menos trabalhosos. Ambos os resultados são idênticos.

• Exemplo 14

Determinar a variância do conjunto {3, 4, 5, 6, 7}:

$$\bar{X} = \frac{3+4+5+6+7}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2}{5}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Embora seja muito útil, e resolva a questão dos valores absolutos (positivos) dos desvios, a variância tem a inconveniência de não ter a mesma unidade das medidas e dificultar a comparação direta entre essa medida e o conjunto de dados originais. Para solucionar isso, utiliza-se o desvio-padrão.

14.5.4 Desvio padrão

O desvio-padrão é simplesmente a raiz quadrada da variância. Assim, para o conjunto de N valores $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$, o desvio-padrão é definido por:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\delta_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\langle x \rangle^2 - (\bar{x})^2} = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \qquad 13.12$$

Segundo essa definição, o desvio padrão é o valor-rms dos desvios.

• Exemplo 15

Determinar o desvio-padrão do conjunto {12, 11, 9, 6, 7}:

$$\bar{X} = \frac{12+11+9+6+7}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{(12-9)^2 + (11-9)^2 + (9-9)^2 + (6-9)^2 + (7-9)^2}{5}}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{3^2 + 2^2 + 0^2 + (-3)^2 + (-2)^2}{5}} = \sqrt{\frac{9+4+0+9+4}{5}} = \sqrt{\frac{23}{5}} \cong 2{,}14$$

O desvio padrão é uma medida muito útil da dispersão de um conjunto de dados (amostra, ou população), caracterizando a confiabilidade de um conjunto de medidas.

De fato, se as fontes de incerteza são pequenas e aleatórias, num conjunto de muitas medidas, os valores estarão distribuídos em torno do valor médio, seguindo uma distribuição normal (gaussiana). Nesse caso, aproximadamente de 68% dos resultados estão dentro de uma distância σ_x do valor médio, e 95% dentro de $2\sigma_x$. É isso que nos permite, na prática, adotar o desvio padrão como uma boa estimativa do erro ou incerteza de um conjunto de medidas.

Amostra *versus* População: diferentes definições do desvio-padrão

Um ponto que costuma causar muita confusão com relação ao cálculo do desvio-padrão é a existência de uma segunda definição para o desvio-padrão de uma amostra pequena, isto é, quando N não é um número grande. Nesses casos, define-se o desvio-padrão de uma amostra como:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\delta_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \qquad 14.13$$

Essa distinção surge no contexto da chamada **inferência estatística**, cujo objetivo é fazer a melhor estimativa de uma população grande, a partir de uma amostragem de dados bem menor. Existem argumentos teóricos em favor das vantagens da definição **14.13**, que se aplica a uma amostra limitada, em vez da **14.12**, que representa o desvio-padrão, σ_x, de uma população (quando $N \to \infty$).

Não entraremos nos detalhes dessa discussão, exceto para dizer que, se o número de amostras for razoavelmente grande (pelo menos maior do que $N = 5$), a diferença, na prática, é pequena. Quanto maior o número de amostras, menor a diferença entre as duas definições e no limite $N \to \infty$ elas passam a ser idênticas. Na prática, por exemplo, se $N = 5$, a diferença entre $\sqrt{N} = 2{,}2$ e $\sqrt{N-1} = 2$ já não é muito significativa na maioria dos casos. É importante, porém, estar ciente das duas definições e, quando usá-las, deixar claro a qual delas você se refere para que outros possam verificar seus cálculos.

- Exemplo 16

Vamos retornar agora ao problema da **Tabela 14.1**, onde tínhamos um conjunto de medidas sobre as quais desejávamos decidir qual seria a correta. Podemos usar agora todas as ferramentas estatísticas que aprendemos para tentar responder a essa pergunta.
Os valores médios e desvios estatísticos de ambas as medidas são:

$$\text{Medidas A:}\quad \bar{t}_A = 1{,}44 \text{ s}; \langle t_A \rangle = 1{,}45 \text{ s}; s_A = 0{,}13 \text{ s}; \sigma_A = 0{,}11 \text{ s}; DM_A = 0{,}10 \text{ s};\quad \text{Faixa} = 0{,}33 \text{ s.}$$

$$\text{Medidas B:}\quad \bar{t}_B = 1{,}56 \text{ s}; \langle t_B \rangle = 1{,}56 \text{ s}; s_B = 0{,}02 \text{ s}; \sigma_B = 0{,}02 \text{ s}; DM_B = 0{,}01 \text{ s};\quad \text{Faixa} = 0{,}05 \text{ s.}$$

Diante desses números, é possível entender porque os resultados dos alunos foram expressos daquela forma. Os alunos expressaram seus resultados de acordo com a incerteza (desvio-padrão) de suas medidas. Podemos verificar também que as medidas B são mesmo mais precisas. Mas os valores centrais delas não estão dentro dos desvios das duas, indicando um possível erro sistemático numa delas. De fato, após ambos repetirem suas medidas um número bem maior de vezes e também compararem os resultados com as medidas físicas do pêndulo, concluiu-se que o período correto do pêndulo deveria ser cerca de 1,50 s. Eventualmente, eles descobriram que o cronômetro B estava mal calibrado. Esse exemplo ilustra bem a distinção entre precisão e exatidão ou acurácia, mostrando que mesmo as medidas muito precisas podem não ser exatas, e que a análise cuidadosa dos dados, usando as ferramentas estatísticas que aprendemos aqui, pode ajudar a entender o porquê.

Resumo do texto			
Nome	**Médias**	**Nome**	**Desvios**
Média aritmética	$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	Desvio médio (**valor absoluto**)	$DM = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
Média ponderada	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{K} w_i}$	Variância	$\mathrm{Var}(x) = \sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$ $\sigma_x^2 = \langle x \rangle^2 - (\bar{x})^2$
Média geométrica	$G_x = \sqrt[N]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_N}$	Desvio padrão (**população**)	$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$ $\sigma_x = \sqrt{\langle x \rangle^2 - (\bar{x})^2}$
Média quadrática	$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2}{N}}$	Desvio padrão (**amostra**)	$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$

Agora é a sua vez...

Continue explorando os recursos de aprendizagem disponíveis no Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).

Referências

BARFORD, N.C. **Experimental Measurements: precision, error and truth**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. de. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 4. ed. São Paulo: Edusp, 2002.

SPIEGEL, M. R. **Estatística**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1985.

TAYLOR, J. R. **An introduction to error analysis**. 2. ed. University Science Books, 1997.