PTC-2305: Quarta lista de exercícios

Exercícios sugeridos: 5, 6, 8, 10
Desafio: 14

1. Dadas as VAs X e Y com função massa de probabilidade conjunta

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,|x+y|\,, & x=-2,0,2 \text{ e } y=1,3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

   calcule:

   (a) A correlação $R_{XY} = \mathrm{E}[XY]$

   (b) A covariância C_{XY}

2. As VAs X e Y têm pmf conjunta dada por

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/21, & x=0,1,2,3,4,5 \text{ e } y=0,1,...,x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Encontre as pmfs marginais $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ e calcule a covariância C_{XY}.

3. X_1 e X_2 são duas VAs independentes e identicamente distribuídas, com valor esperado $\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[X_2] = \mu_X$ e $\mathrm{var}[X_1] = \mathrm{var}[X_2] = \sigma_X^2$.

   (a) Calcule $\mathrm{E}[X_1 - X_2]$

   (b) Calcule $\mathrm{var}[X_1 - X_2]$

4. As VAs X e Y podem ser descritas pela pdf conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Qual o valor de $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{var}[X]$?

   (b) Qual o valor de $\mathrm{E}[Y]$ e $\mathrm{var}[Y]$?

   (c) Qual o valor de C_{XY}?

5. Considere duas VAs independentes X e Y e suas respectivas pdfs

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\, e^{-x/3}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, e^{-y/2}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Qual o valor de $\Pr[X > Y]$?

   (b) Qual o valor de $R_{XY} = \mathrm{E}[XY]$?

   (c) Qual o valor da covariância C_{XY}?

6. As VAs X_1 e X_2 possuem média nula, variâncias $\sigma^2_{X_1} = 4$ e $\sigma^2_{X_2} = 9$ e covariância $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 3$.

   (a) Encontre a matriz de covariância de $\mathbf{X} = [\ X_1 \quad X_2\ ]^T$.

   (b) As variáveis X_1 e X_2 são transformadas em novas variáveis aleatórias Y_1 e Y_2, conforme

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - 2X_2 \\ Y_2 = 3X_1 + 4X_2 \end{cases}$$

   Encontre a matriz de covariância de $\mathbf{Y} = [\ Y_1 \quad Y_2\ ]^T$.

7. O vetor $\mathbf{Y}$, 2×1 (isto é, um vetor coluna de duas dimensões), tem pdf

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} 2, & \mathbf{y} \geq 0 \quad \text{e} \quad [\ 1 \quad 1\ ] \cdot \mathbf{y} \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Calcule o valor esperado $\mathrm{E}[\mathbf{Y}]$, a matriz de autocorrelção $\mathbf{R_Y}$ e a matriz de covariância $\mathbf{C_Y}$.

8. O vetor de variáveis aleatórias Gaussianas $\mathbf{X}$ tem valor esperado $\boldsymbol{\mu_X} = [\ 4 \quad 8 \quad 6\ ]^T$ e matriz de covariância

$$\boldsymbol{C_X} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

   Calcule:

   (a) A matriz de correlação $\mathbf{R_X}$.

   (b) A pdf dos dois primeiros componentes de $\mathbf{X}$, $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

   (c) A probabilidade de $\{X_1 > 8\}$.

9. Dado o vetor aleatório Gaussiano $\mathbf{X}$ do exercício 8 e $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 2/3 \\ 1 & -1/2 & 2/3 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{b} = [\ -4 \quad -4\ ]^T$. Calcule:

   (a) O valor esperado $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}}$.

   (b) A matriz de covariância $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$.

   (c) A matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}$.

   (d) A probabilidade $\Pr[-1 \leq Y_2 \leq 1]$.

10. A VA $X \sim \text{Uniforme}(0, 12)$ representa ao tempo total (tempo de espera + tempo de leitura), em milissegundos, necessário para adquirir um bloco de informação do disco rígido de um computador. A fim de realizar uma determinada tarefa, um computador deve acessar 12 blocos de informação diferentes no disco, sendo que o tempo de acesso para cada bloco é independente dos tempos de acesso dos outros blocos. O tempo total necessário para o processador obter toda a informação é uma VA A, em milissegundos.

   (a) Qual o valor esperado do tempo de acesso de cada bloco $\mathrm{E}[X]$?

   (b) Qual a variância do tempo de acesso de cada bloco $\mathrm{var}[X]$?

   (c) Qual o valor esperado do tempo total de acesso $\mathrm{E}[A]$?

   (d) Qual a variância do tempo total de acesso $\mathrm{var}[A]$?

   (e) Usando o Teorema do Limite Central, estime a probabilidade de que o tempo total de acesso exceda 75 ms, ou seja, $\Pr[A > 75 \text{ ms}]$.

   (f) Usando o Teorema do Limite Central, estime a probabilidade de que o tempo total de acesso seja menor do que 48 ms, ou seja, $\Pr[A < 48 \text{ ms}]$.

11. Um modem transmite um milhão de bits. Cada bit é independente dos demais e é igual a 0 ou 1 com a mesma probabilidade. Estime a probabilidade de ocorrerem entre 499000 e 501000 bits iguais a 1 nessa transmissão.

12. Uma moeda honesta é lançada 1000 vezes.

   (a) Calcule a probabilidade exata de obter um número de caras entre 400 e 600 vezes.

   (b) Calcule a mesma probabilidade do item anterior usando o Teorema do Limite Central.

13. A vida útil de uma lâmpada de bulbo é uma v.a. exponencial com média de 36h. Suponha que 16 lâmpadas são testadas. Use o Teorema do Limte Central para estimar a probabilidade de a soma dos tempos de vida útil dessas lâmpadas ser menor do que 600 horas.

14. A função característica de uma VA X é dada por

$$M_X(j\omega) = \mathrm{E}[e^{j\omega x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx,$$

ou seja, é a transformada de Fourier da sua pdf (a não ser pelo sinal trocado no expoente de e). A partir da função característica é possível calcular todos os momentos de uma variável aleatória fazendo:

$$\mathrm{E}[X^n] = \frac{1}{j^n} \frac{d^n}{d\omega^n} M_X(j\omega) \Big|_{\omega=0}$$

Considerando uma VA contínua $X \sim$ Uniforme(a, b), encontre sua função característica e calcule os momentos de primeira e segunda ordem de X.