

## Capítulo 3

# CINEMÁTICA DIRETA DE ROBÔS MANIPULADORES

A cinemática de um robô manipulador é o estudo da posição e da velocidade do seu efetuador e dos seus ligamentos. Quando se menciona posição, está se referindo tanto à posição propriamente dita, como à orientação e quando se fala em velocidade, considera-se tanto a velocidade linear como angular. Pode-se distinguir dois tipos de cinemática, a cinemática direta e a inversa. Na cinemática direta deseja-se obter a posição e velocidade do efetuador, para uma dada posição das articulações. A cinemática inversa é o oposto da cinemática direta, ou seja, são fornecidas a posição e a velocidade do efetuador e quer se obter as posições e velocidades correspondentes das articulações.

No capítulo 2 foram vistas as ferramentas matemáticas necessárias para se determinar a posição e orientação de corpos rígidos que se baseia na transformação de coordenadas. Neste capítulo, é apresentada a cinemática direta. A cinemática inversa será analisada no capítulo 5. Observa-se que neste capítulo, será visto como se calcula a posição, a orientação, a velocidade linear e angular do efetuador de um robô manipulador. A posição e velocidade dos outros ligamentos do robô podem ser facilmente calculadas de forma análoga às do efetuador.

### 3.1 Posição e Orientação do Efetuador

Um manipulador consiste basicamente de uma série de corpos rígidos unidos entre si por articulações. A Figura 3-1, mostra um esquema de um manipulador. Será considerado somente manipuladores com estrutura cinemática do tipo aberta, como foi visto no capítulo 3.

Cada ligamento do manipulador pode ser numerado de 0 a  $n$ , como mostra a Figura 3-1. O ligamento da base, que é usualmente fixo em relação ao mundo externo, é numerado por conveniência como 0 e o efetuador, que é o último ligamento, é numerado como  $n$ . O objetivo é analisar a posição e a orientação do efetuador em função da posição de cada uma das articulações.

Para representar a posição e a orientação do efetuador, é posicionado o sistema de coordenadas  $O_n-x_ny_nz_n$  no efetuador. A posição e orientação deste sistema de coordenadas é descrito em relação ao sistema  $O_0-x_0y_0z_0$ , fixo na base, isto é, no primeiro ligamento. Define-se, também, para cada um dos demais ligamentos, um sistema de coordenadas  $O_i-x_iy_iz_i$ . É possível determinar a posição e a orientação do sistema  $i$  em relação ao sistema anterior,  $i-1$ , pelo uso de matrizes homogêneas relacionando a transformação entre estes sistemas. Dessa forma, a posição e a orientação do efetuador em relação à base é obtida por uma composição de transformações homogêneas consecutivas, partindo-se do sistema da base para o último sistema (sistema do efetuador).

Para posicionar os sistemas de coordenadas nos ligamentos do manipulador de forma sistemática, é utilizada a notação de *Denavit-Hartenberg*. A notação de *Denavit-Hartenberg* é um método sistemático de descrever a posição e a orientação relativa entre dois ligamentos consecutivos, baseado na transformação homogênea.

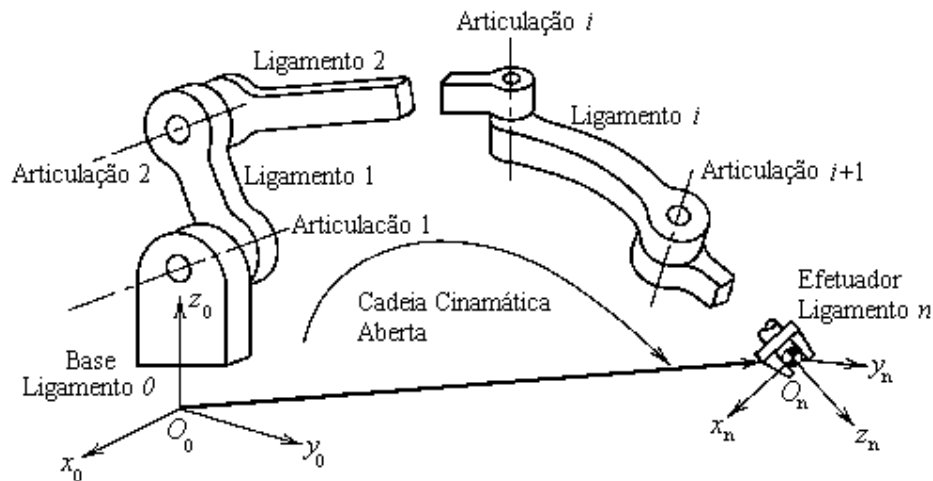


Figura 3-1: Esquema da Estrutura de um Manipulador.

### Notação de Denavit-Hartenberg

A Notação de *Denavit-Hartenberg* baseia-se no fato de que para determinar a posição relativa de duas retas no espaço, são necessários somente dois parâmetros. O primeiro parâmetro é a distância medida ao longo da normal comum entre as duas retas e o segundo é o ângulo de rotação em torno da normal comum, que uma das retas deve girar, de forma que fique paralela à outra. Observa-se que a normal comum entre duas retas no espaço é definida por uma terceira reta que intercepta as duas primeiras retas, com ângulos de  $90^\circ$ . Além disso, a distância medida entre as duas retas, ao longo da normal comum, é a menor distância entre as mesmas. A Figura 5-2 apresenta duas retas no espaço e os dois parâmetros necessários para descrever sua posição relativa.

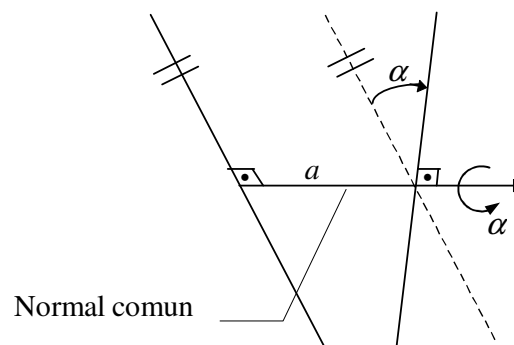


Figura 3-2: Posição relativa de duas retas no espaço.

Se para definir a posição relativa de duas retas no espaço são necessários dois parâmetros, então, para definir a posição relativa de dois sistemas de coordenadas serão necessários quatro parâmetros. Isto decorre do fato de que um sistema de coordenadas é definido por três retas (os três eixos do sistema), sendo que conhecendo-se dois eixos do sistema, o terceiro está automaticamente definido, pelas condições de ortogonalidade e pela regra da mão direita. Observa-se que, a intercessão dos eixos de um sistema de coordenadas define a origem do mesmo. Portanto, a partir da definição da posição relativa entre dois eixos de dois sistemas de coordenadas, pode-se descrever a posição relativa entre os dois sistemas de coordenadas.

A Figura 3-3 representa um par de ligamentos adjacentes de um robô manipulador (ligamentos  $i$  e  $i-1$ ) e suas respectivas articulações (articulações  $i-1$ ,  $i$  e  $i+1$ ). A posição e orientação relativa entre os dois ligamentos é descrita pelas transformações de translação e de rotação entre os dois sistemas de coordenadas fixos a estes ligamentos.

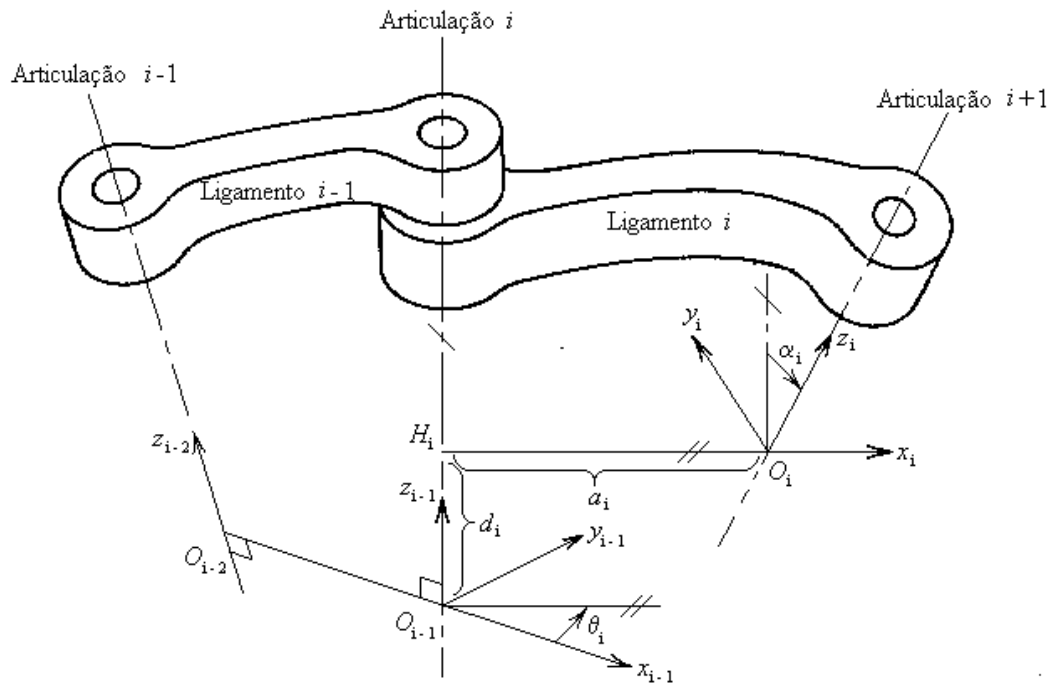


Figura 3-3: A Notação de Denavit-Hartenberg.

O primeiro passo para definir os sistemas de coordenadas de um robô, é localizar os eixos  $z$  ao longo dos eixos das articulações, de forma que o eixo  $z_{i-1}$  é o eixo da articulação  $i$ . Seja a reta  $H_i O_i$  a normal comum aos eixos das articulações  $i$  e  $i+1$  (eixos  $z_{i-1}$  e  $z_i$ ). A origem do sistema  $O_i$  é localizada na intercessão do eixo da articulação  $i+1$  (eixo  $z_i$ ) e a normal comum entre os eixos  $z_{i-1}$  e  $z_i$ . O eixo  $x_i$  é direcionado ao longo da extensão desta normal comum, na direção de  $z_{i-1}$  para  $z_i$ . Finalmente, o eixo  $y_i$  é escolhido de forma que o sistema resultante  $O_i$ - $x_i y_i z_i$  seja um sistema de coordenadas que segue a regra da mão direita.

A posição relativa entre dois sistemas de coordenadas consecutivos, sistemas  $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$  e  $O_i-x_iy_iz_i$ , é completamente determinada pelas posições relativas entre os eixos  $x_{i-1}$  e  $x_i$ , e entre os eixos  $z_i$  e  $z_{i-1}$ , que são definidas pelos quatro parâmetros seguintes:

- $a_i$ : é a distância (em módulo) entre  $z_{i-1}$  e  $z_i$ , medida ao longo do eixo  $x_i$ , que é a normal comum entre  $z_{i-1}$  e  $z_i$ , ou seja, é a distância  $H_iO_i$ ;
- $\alpha_i$ : é o ângulo (com sinal) entre o eixo  $z_{i-1}$  e o eixo  $z_i$ , medido em torno do eixo  $x_i$ , segundo a regra da mão direita, ou seja, é o ângulo de rotação em torno do eixo  $x_i$ , que o eixo  $z_{i-1}$  deve girar para que fique paralelo ao eixo  $z_i$ ;
- $d_i$ : é a distância (com sinal) entre os eixos  $x_{i-1}$  e  $x_i$ , medida sobre o eixo  $z_{i-1}$  (que é a normal comum entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$ ), partindo-se de  $O_{i-1}$  e indo em direção à  $H_i$ . O sinal de  $d_i$  é positivo, se para ir de  $O_{i-1}$  até  $H_i$ , caminha-se no sentido positivo de  $z_{i-1}$ , e negativo, se caminha-se no sentido oposto de  $z_{i-1}$ ;
- $\theta_i$ : é o ângulo (com sinal) entre o eixo  $x_{i-1}$  e o eixo  $x_i$ , medido em torno do eixo  $z_{i-1}$ , segundo a regra da mão direita, ou seja, é o ângulo de rotação em torno do eixo  $z_{i-1}$ , que o eixo  $x_{i-1}$  deve girar para que fique paralelo ao eixo  $x_i$ .

Com estes quatro parâmetros, a posição e orientação do sistema de coordenadas  $i$  em relação ao sistema  $i-1$  pode ser definida como uma sequência de quatro transformações:

- A primeira transformação, consiste em uma rotação em torno de  $z_{i-1}$ , de um ângulo  $\theta_i$ , medido segundo a regra da mão direita, de forma a alinhar  $x_{i-1}$  com  $x_i$ ;
- A segunda transformação, é uma translação ao longo do eixo  $z_{i-1}$ , de uma distância  $d_i$ , medida a partir do ponto  $O_{i-1}$ , até encontrar a intercessão da normal comum entre  $z_{i-1}$  e  $z_i$  (ponto  $H_i$ );
- A terceira transformação, consiste em uma translação ao longo do eixo  $x_i$ , de uma distância  $a_i$ , partindo-se do ponto  $H_i$  até encontrar o eixo  $z_i$  (ponto  $O_i$ ); e
- A quarta transformação consiste em uma rotação em torno do eixo  $x_i$ , de um ângulo  $\alpha_i$ , medido segundo a regra da mão direita, de forma a alinhar o eixo  $z_{i-1}$  com o eixo  $z_i$ .

Assim, tem-se, em resumo, as seguintes transformações:

$$\mathbf{A}_{i-1}^i = Rot(z, \theta_i) Trans(z, d_i) Trans(x, a_i) Rot(x, \alpha_i), \quad (3-1)$$

onde os símbolos *Rot* e *Trans* significam respectivamente transformação de rotação e de translação. Em termos de transformações homogêneas, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i-1}^i &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i \cos \alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3-2)$$

Os parâmetros  $a_i$  e  $\alpha_i$  são constantes e são determinados pela geometria do ligamento  $i$ . Um dos outros dois parâmetros,  $d_i$  ou  $\theta_i$ , varia a medida que a articulação se move. Como visto no capítulo 2, existem dois tipos de articulações em braços robóticos: articulações de

revolução (ou de rotação) e articulações lineares (ou prismáticas). Se a articulação  $i$  for de revolução, o parâmetro  $\theta_i$  é variável e representa a sua posição angular, enquanto o parâmetro  $d_i$  é constante. Se a articulação  $i$  for prismática, o parâmetro  $d_i$  é a variável que representa a sua posição linear e o parâmetro  $\theta_i$  é constante.

Existem algumas exceções à notação de *Denavit-Hartenberg*, sendo estas as seguintes:

- Para estabelecer o sistema de coordenadas da base, a origem do sistema pode ser escolhida em qualquer ponto do eixo  $z_0$ . Os eixos  $x_0$  e  $y_0$ , podem ser escolhidos arbitrariamente, desde que satisfaçam a regra da mão direita;
- Para estabelecer o sistema de coordenadas do efetuador, a origem do sistema pode ser escolhida em qualquer ponto conveniente do efetuador. A orientação dos eixos deve ser tal que  $x_n$  seja perpendicular a  $z_{n-1}$ ;
- Se os eixos das duas articulações de um ligamento são paralelos, a normal comum entre eles não é única. Neste caso, a direção de  $x_{i-1}$  deve ser perpendicular a ambos os eixos e a origem  $O_i$  é arbitrária;
- Se os eixos das duas articulações de um ligamento se interceptam, ou seja, se  $z_{i-1}$  intercepta  $z_i$ , a origem  $O_i$  deve ser localizada na interseção dos dois eixos e  $x_i$  deve ser perpendicular a ambos os eixos.

### Posição e Orientação do Efetuador

Com a notação de *Denavit-Hartenberg* definida, pode-se obter a posição e orientação do efetuador em relação ao sistema da base (sistema  $O_0-x_0y_0z_0$ ) em função dos deslocamentos de todas as articulações. O deslocamento de cada articulação é dada por  $d_i$  ou  $\theta_i$ , dependendo do tipo de articulação. Para facilitar a nomenclatura, a posição das articulações será denotada por  $q_i$ , definido como:

$$\begin{aligned} q_i &= \theta_i, \text{ se a articulação } i \text{ for de revolução; e} \\ q_i &= d_i, \text{ se a articulação } i \text{ for prismática.} \end{aligned}$$

Dessa forma, a posição e orientação do ligamento  $i$  relativo ao ligamento  $i-1$  é descrita em função de  $q_i$ , através da matriz homogênea  $\mathbf{A}_{i-1}^i(q_i)$ .

Como visto, um manipulador consiste de  $n + 1$  ligamentos, com a base sendo o ligamento 0 e o efetuador o ligamento  $n$ . Portanto, do efetuador à base existem  $n$  transformações homogêneas consecutivas, assim, a posição e orientação do efetuador é dada por:

$$\mathbf{A}_0^n = \mathbf{A}_0^1(q_1)\mathbf{A}_1^2(q_2)\dots\mathbf{A}_{n-1}^n(q_n), \quad (3-3)$$

onde,  $\mathbf{A}_0^n$  é a matriz homogênea que representa a posição e orientação do efetuador em relação ao sistema da base, em função das posições de todas as articulações. Como  $\mathbf{A}_0^n$  é uma matriz homogênea ela tem a seguinte forma:

$$\mathbf{A}_0^n(q_1, \dots, q_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^n(q_1, \dots, q_n) & \mathbf{x}_0^n(q_1, \dots, q_n) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (3-4)$$

$\mathbf{R}_0^n(q_1, \dots, q_n)$  é a matriz de rotação que representa a orientação do efetuador em relação ao sistema da base. Desta matriz de rotação, pode-se obter, se desejado, uma descrição da orientação do efetuador em termos de ângulos de Euler, "roll-pitch-yaw", ou ainda, parâmetros de Euler-Rodrigues, como visto no capítulo 2. O vetor  $\mathbf{x}_0^n(q_1, \dots, q_n)$  fornece a posição do efetuador em relação ao sistema da base.

Dessa forma pode-se definir o seguinte algoritmo para realizar a cinemática direta da posição:

Passo 1: Localizar os eixos das articulações, ou seja, os eixos  $z_0, z_1$ , até  $z_{n-1}$ , de forma que o eixo da articulação  $i$  seja o eixo  $z_{i-1}$ .

Passo 2: Estabelecer o sistema de coordenadas da base. A origem deste sistema pode ser escolhida em qualquer lugar do eixo  $z_0$ . Os eixos  $x_0$  e  $y_0$  podem ser escolhidos arbitrariamente, desde que satisfaçam a regra da mão direita.

Repetir os passos 3 a 5 para  $i = 1, \dots, n-1$ .

Passo 3: Localizar a origem do sistema  $i$ , ponto  $O_i$ , onde a normal comum entre os eixos  $z_i$  e  $z_{i-1}$  intercepta o eixo  $z_i$ . Se o eixo  $z_i$  intercepta o eixo  $z_{i-1}$ , localizar o ponto  $O_i$  na interseção. Se os eixos  $z_i$  e  $z_{i-1}$  são paralelos, localizar o ponto  $O_i$  na articulação  $i$ .

Passo 4: Estabelecer o eixo  $x_i$  ao longo da normal comum entre os eixos  $z_i$  e  $z_{i-1}$ , a partir do ponto  $O_i$ . O sentido do eixo  $x_i$  é na direção do eixo  $z_{i-1}$  para o eixo  $z_i$ . Se os eixos  $z_i$  e  $z_{i-1}$  se cruzam, então o eixo  $x_i$  é normal a ambos com qualquer direção.

Passo 5: Tendo os eixos  $z_i$  e  $x_i$ , estabelecer o eixo  $y_i$  segundo a regra da mão direita.

Passo 6: Estabelecer o sistema de coordenadas do efetuador, sistema  $O_n-x_ny_nz_n$ . A origem deste sistema é escolhida de forma arbitrária, porém, de maneira geral é escolhida como sendo o centro da garra ou algum outro ponto de interesse do efetuador. Os eixos deste sistema são definidos de forma arbitrária, desde que o eixo  $x_n$  seja perpendicular ao eixo  $z_{n-1}$ . Normalmente tem-se, o eixo  $z_n$  na direção de ataque, o eixo  $x_n$  na direção normal e o eixo  $y_n$  na direção de escorregamento, como mostra a Figura 3-4.

Passo 7: Criar uma tabela com os parâmetros de *Denavit-Hartenberg* referentes a cada um dos ligamentos ou articulações.

Passo 8: Montar as matrizes de transformação homogênea,  $\mathbf{A}_{i-1}^i(q_i)$ , a partir dos parâmetros de *Denavit-Hartenberg* e da eq. (3-2).

Passo 9: Obter a matriz de transformação homogênea  $\mathbf{A}_0^n(q_1, \dots, q_n)$ , a partir de eq. (3-3), que relaciona a posição e orientação do efetuador em relação ao sistema da base.

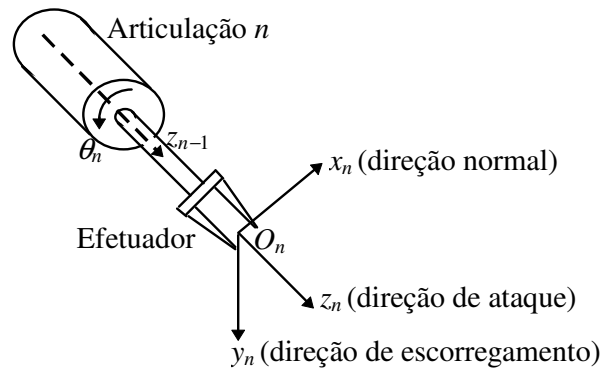


Figura 3-4: Sistema de coordenadas do efetuador.

**Exemplo 3.1:** Robô plano de duas articulações de revolução (2R).

A Figura 3-5 apresenta um esquema de um robô plano de duas articulações de revolução, com os sistemas de coordenadas posicionados nas articulações e no efetuador.

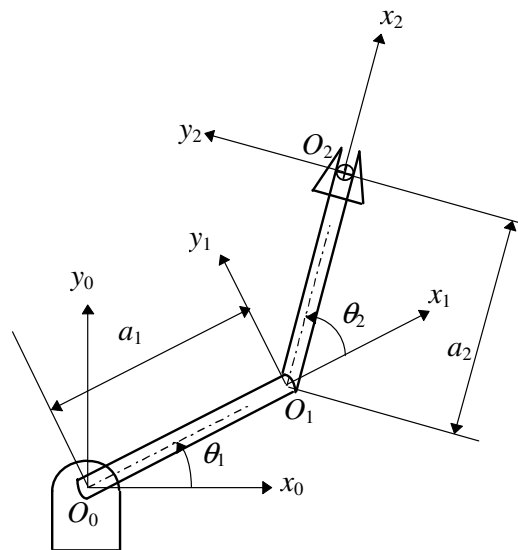


Figura 3-5: Esquema de um robô plano com duas articulações de revolução.

Os parâmetros de *Denavit-Hartenberg* para este robô são definidos na Tabela 3-1.

**Tabela 3-1:** Parâmetros de *Denavit-Hartenberg* do robô plano com dois graus de liberdade de revolução.

Ligamento	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$a_1$	0	0	$\theta_1$
2	$a_2$	0	0	$\theta_2$

Com estes parâmetros de *Denavit-Hartenberg* e a eq. (3-2) pode-se definir as matrizes de transformação homogênea do sistema de coordenadas da base para o sistema 1 e do sistema 1 para o sistema 2, fixo no efetuador, como abaixo.

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde os símbolos  $S_1$ ,  $C_1$  significam respectivamente o seno e o cosseno de  $\theta_1$  e  $S_2$ ,  $C_2$  significam respectivamente o seno e o cosseno de  $\theta_2$ . A multiplicação destas duas matrizes resulta na matriz de transformação homogênea da base para o efetuador, como se segue:

$$\mathbf{A}_0^2 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $S_{12}$  e  $C_{12}$  representam respectivamente o seno e o cosseno de  $\theta_1 + \theta_2$ . Nota-se que os dois primeiros elementos da quarta coluna são as componentes  $x$  e  $y$  do ponto  $O_2$ , ou seja, as coordenadas do efetuador descritos em relação ao sistema da base ( $O_0-x_0y_0z_0$ ). Observa-se, também, que a orientação do efetuador é dada por uma rotação em torno do eixo  $z_0$  de um ângulo  $\theta_1 + \theta_2$ .

**Exemplo 3.2:** Robô de *Stanford*. A Figura 3-6 apresenta o robô de Stanford de 6 graus de liberdade, sendo 5 articulações de revolução e uma prismática.

A Figura 3-7 apresenta um esquema deste robô com as suas articulações e com os sistemas de coordenadas posicionados nos ligamentos. Os parâmetros de Denavit-Hartenberg correspondentes aos sistemas de coordenadas definidos na Figura 3-7 são apresentados na Tabela 3-2. Note que na configuração instantânea da Figura 3-7, o manipulador apresenta os sistemas de coordenadas 3 e 5 como sendo coincidentes e o eixo  $x_4$  também coincidente com  $x_3$ . Contudo, qualquer alteração nas posições das articulações 4 e 5 (ângulos  $\theta_4$  e  $\theta_5$ ) fará com que a coincidência destes eixos e destes sistemas seja eliminada.

Tabela 3-2: Parâmetros de *Denavit-Hartenberg* do robô de *Stanford*.

Ligamento	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	-90°	$l_1$	$\theta_1^*$
2	0	90°	$l_2$	$\theta_2^*$
3	0	0	$d_3^*$	0
4	0	-90°	0	$\theta_4^*$
5	0	90°	0	$\theta_5^*$
6	0	0	$l_6$	$\theta_6^*$



Nota-se que os parâmetros marcados com o asteriscos (\*) representam o parâmetro variável da articulação.

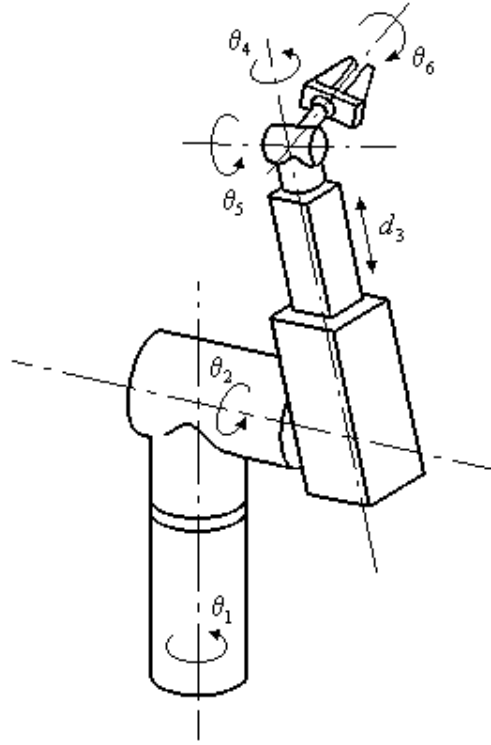


Figura 3-6: Robô de *Stanford*.

As matrizes homogêneas podem ser calculadas a partir da eq. (3-2) e dos parâmetros de *Denavit-Hartenberg* da Tabela 3-2, resultando no seguinte:

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_3^4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_4^5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_5^6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

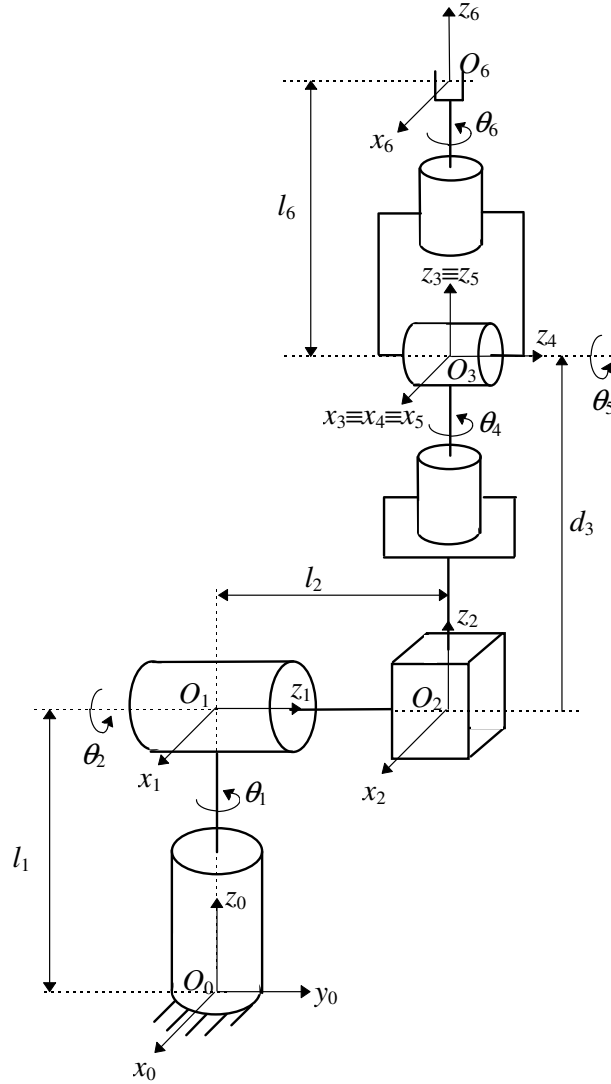


Figura 3-7: Esquema do robô de *Stanford* com os sistemas de coordenadas das articulações.

A posição e orientação do efetuador é obtida a partir das matrizes homogêneas acima e da eq. (3-3), resultando no seguinte:

$$\mathbf{A}_0^6 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4 \mathbf{A}_4^5 \mathbf{A}_5^6 = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & x_0^6 \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & y_0^6 \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & z_0^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde os elementos da matriz  $\mathbf{A}_0^6$  acima, são dados pelas expressões seguintes:

$$r_{1,1} = C_1 [C_2 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6);$$

$$r_{2,1} = S_1 [C_2 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6] + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6);$$

$$\begin{aligned}
r_{3,1} &= -S_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_2S_5C_6; \\
r_{1,2} &= C_1[-C_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_2S_5S_6] - S_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6); \\
r_{2,2} &= S_1[-C_2(C_4C_5S_6 - S_4C_6) + S_2S_5S_6] + C_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6); \\
r_{3,2} &= S_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_2S_5S_6; \\
r_{1,3} &= C_1(C_2C_4S_5 + S_2C_5) - S_1S_4S_5; \\
r_{2,3} &= S_1(C_2C_4S_5 + S_2C_5) + C_1S_4S_5; \\
r_{3,3} &= -S_2C_4S_5 + C_2C_5; \\
x_0^6 &= C_1S_2d_3 - S_1l_2 + l_6(C_1C_2C_4S_5 + C_1S_2C_5 - S_1S_4S_5); \\
y_0^6 &= S_1S_2d_3 + C_1l_2 + l_6(S_1C_2C_4S_5 + S_1S_2C_5 - C_1S_4S_5); \\
z_0^6 &= l_1 + C_2d_3 + l_6(C_2C_5 - S_2C_4S_5).
\end{aligned}$$

Observa-se que os elementos  $r_{i,j}$  formam a matriz de rotação da transformação do sistema da base para o sistema do efetuador, ou seja, a orientação do efetuador, e os elementos,  $x_0^6$ ,  $y_0^6$ , e  $z_0^6$  representam a posição do efetuador.

### 3.2 Velocidade do Efetuador

Pode-se definir o vetor  $\mathbf{q}$ , como sendo um vetor coluna, que contém as posições de todas as articulações, da seguinte maneira,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^t$ . Nota-se que o vetor  $\mathbf{q}$  tem dimensão  $n \times 1$ , onde  $n$  é o número de articulações. O objetivo é encontrar o vetor velocidade linear,  $\mathbf{v}_n(\mathbf{q})$ , e o vetor velocidade angular do efetuador,  $\mathbf{w}_n(\mathbf{q})$ , descritos em relação ao sistema de coordenadas da base, em função das velocidades das articulações.

#### Velocidade Linear do Efetuador

Como visto,  $\mathbf{x}_0^n(\mathbf{q})$  é o vetor de posição do efetuador em relação ao sistema da base, sendo função das posições de todas as articulações. Portanto, para obter a velocidade linear do efetuador, basta derivar este vetor em relação ao tempo, ou seja:

$$\mathbf{v}_n = \frac{d\mathbf{x}_0^n}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_0^n}{dt} \\ \frac{dy_0^n}{dt} \\ \frac{dz_0^n}{dt} \end{bmatrix}, \quad (3-5)$$

onde  $x_0^n$ ,  $y_0^n$ , e  $z_0^n$  são as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  do vetor posição do efetuador. Como o vetor  $\mathbf{x}_0^n$  é função da posição de todas as articulações, as derivadas das suas componentes em relação ao tempo são obtidas pela regra da cadeia, sendo dadas por:

$$v_{n,x} = \dot{x}_0^n = \frac{\partial x_0^n}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_0^n}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_0^n}{\partial q_n} \dot{q}_n; \quad (5-6)$$

$$v_{n,y} = \dot{y}_0^n = \frac{\partial y_0^n}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y_0^n}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial y_0^n}{\partial q_n} \dot{q}_n; \quad (3-7)$$

$$v_{n,z} = \dot{z}_0^n = \frac{\partial z_0^n}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z_0^n}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial z_0^n}{\partial q_n} \dot{q}_n; \quad (3-8)$$

onde o ponto sobre a variável denota derivada em relação ao tempo.

Definindo a matriz jacobiano da velocidade linear,  $\mathbf{J}_v(\mathbf{q})$ , de dimensão  $3 \times n$ , como sendo:

$$\mathbf{J}_v(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0^n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_0^n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_0^n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial y_0^n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_0^n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial z_0^n}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad (3-9)$$

as eq. (3-6), (3-7) e (3-8) podem ser escritas de forma matricial, da seguinte forma,

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{J}_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3-10)$$

Esta expressão fornece a velocidade linear do efetuador, descrita em relação ao sistema de coordenadas da base, em função das velocidades e das posições das articulações. Note que, a matriz  $\mathbf{J}_v(\mathbf{q})$ , é, em geral, função das posições de todas as articulações.

Existe outra forma de se obter a velocidade linear do efetuador sem a necessidade de efetuar derivadas. A eq. (3-10) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{J}_{v1}\dot{q}_1 + \mathbf{J}_{v2}\dot{q}_2 + \dots + \mathbf{J}_{vn}\dot{q}_n, \quad (3-11)$$

onde  $\mathbf{J}_{vi}$  é a coluna  $i$  da matriz  $\mathbf{J}_v$ , sendo um vetor coluna de dimensão  $3 \times 1$ , e o produto  $\mathbf{J}_{vi}q_i$  representa a contribuição da articulação  $i$  na velocidade do efetuador, com todas as outras articulações paradas.

Se a articulação  $i$  for prismática, ela produz no efetuador uma velocidade linear na mesma direção que seu eixo, eixo  $z_{i-1}$ , com magnitude igual a  $\dot{d}_i$ , ou seja,

$$\mathbf{J}_{vi}\dot{q}_i = \mathbf{z}_{i-1}\dot{d}_i, \quad (3-12)$$

onde,  $\mathbf{z}_{i-1}$  é o versor do eixo  $z_{i-1}$  descrito no sistema de coordenadas da base. Se a articulação  $i$  for de revolução, ela produz no efetuador uma velocidade linear igual a;

$$\mathbf{J}_{vi}\dot{q}_i = (\mathbf{z}_{i-1}\dot{\theta}) \times \mathbf{r}_{i-1,n}, \quad (3-13)$$

onde  $\dot{\theta}_i$  é a velocidade angular da articulação  $i$ , o símbolo  $\times$  denota produto vetorial e  $\mathbf{r}_{i-1,n}$  é o vetor que une a origem do sistema de coordenadas da articulação  $i$ , ponto  $O_{i-1}$ , à origem do

sistema de coordenadas do efetuador, ponto  $O_n$ , descrito em relação ao sistema de coordenadas da base.

Observando as eq. (3-12) e (3-13) pode-se concluir que a coluna  $i$  da matriz  $\mathbf{J}_v$  é dada por:

$$\mathbf{J}_{vi} = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1}, & \text{se a articulação } i \text{ for prismática, e} \\ \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,n}, & \text{se a articulação } i \text{ for de revolução.} \end{cases} \quad (3-14)$$

### Velocidade Angular do Efetuador

A velocidade angular do ligamento  $i$  ou, do sistema de coordenadas  $i$ , relativa ao sistema de coordenadas  $i-1$ , expressa no sistema de coordenadas  $i-1$ ,  $\mathbf{w}_i^{(i-1)}$ , é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{w}_i^{(i-1)} = \begin{cases} \dot{q}_i \mathbf{k}, & \text{se a articulação } i \text{ for de revolução;} \\ 0, & \text{se a articulação } i \text{ for de translação;} \end{cases} \quad (3-15)$$

onde  $\mathbf{k}$  é o eixo da articulação  $i$  visto pelo sistema de coordenadas  $i-1$ , ou seja,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^t$ . Observa-se que  $\mathbf{w}_i^{(i-1)}$  é a velocidade angular da articulação  $i$  vista pelo sistema de coordenadas fixo na própria articulação (sistema  $i-1$ ).

Para exprimir a velocidade angular  $\mathbf{w}_i^{(i-1)}$  em relação ao sistema de coordenadas da base, basta descrever o versor  $\mathbf{k}$  em relação ao sistema da base. Para isso realiza-se a transformação de rotação que leva o sistema da base ao sistema  $i-1$ , ou seja,

$$\mathbf{R}_0^{i-1} \mathbf{w}_i^{(i-1)} = \mathbf{R}_0^{i-1} \dot{q}_i \mathbf{k} = \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1}. \quad (3-16)$$

Note que o produto  $\mathbf{R}_0^{i-1} \mathbf{k}$  representa o versor do eixo da articulação  $i$  (eixo  $z_{i-1}$ ) descrito em relação ao sistema de coordenadas da base, que é denominado por  $\mathbf{z}_i$

A velocidade angular do efetuador descrita em relação ao sistema da base, é a soma das velocidades angulares de todos os ligamentos, expressas todas em relação ao sistema de coordenadas da base. Assim, a velocidade angular do efetuador, descrita em relação à base, é dada por:

$$\mathbf{w}_n = \rho_1 \mathbf{w}_1^{(0)} + \rho_2 \mathbf{R}_0^1 \mathbf{w}_2^{(1)} + \dots + \rho_n \mathbf{R}_0^{n-1} \mathbf{w}_n^{(n-1)}. \quad (3-17)$$

Obviamente, se a articulação  $i$  for prismática, ela não contribui para a velocidade angular do efetuador. Para considerar este efeito, na equação acima, foi introduzido o parâmetro  $\rho_i$ , que representa o seguinte:

$$\rho_i = \begin{cases} 1, & \text{se a articulação } i \text{ for de revolução;} \\ 0, & \text{se a articulação } i \text{ for de translação.} \end{cases}$$

A velocidade do efetuador escrita em função das velocidades das articulações, pode ser obtida pela substituição da eq. (3-16) na expressão acima, obtendo-se o seguinte resultado:

$$\mathbf{w}_n = \rho_1 \dot{q}_1 \mathbf{z}_0 + \rho_2 \dot{q}_2 \mathbf{z}_1 + \dots + \rho_n \dot{q}_n \mathbf{z}_{n-1}. \quad (3-18)$$

Esta equação pode ser escrita de forma matricial, da seguinte maneira:

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{J}_w(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3-19)$$

onde  $\mathbf{J}_w$  é uma matriz de dimensão  $3 \times n$ , cujas colunas são os eixos das articulações descritas no sistema da base multiplicados por um indicador que fornece o tipo da articulação, ou seja,

$$\mathbf{J}_w = [\rho_1 \mathbf{z}_0, \rho_2 \mathbf{z}_1, \dots, \rho_n \mathbf{z}_{n-1}]. \quad (3-20)$$

Observa-se que cada coluna de  $\mathbf{J}_w$  representa a contribuição da respectiva articulação na velocidade angular do efetuador.

### 3.3 Matriz Jacobiano de um Manipulador

Pode-se unir as relações das velocidades linear e angular do efetuador em função das velocidades das articulações em uma mesma equação, resultando no seguinte:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_w(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3-21)$$

ou, definindo o vetor  $\mathbf{V}_n = (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n)^t$ , tem-se:

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3-22)$$

A matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  é definida como sendo a Matriz Jacobiano do efetuador. Esta matriz relaciona as velocidades linear e angular do efetuador, expressas no sistema de coordenadas da base, com as velocidades das articulações, para uma dada configuração do manipulador.

Em resumo, a coluna  $i$  da Matriz Jacobiano de um manipulador é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,n} \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}, \text{ se a articulação } i \text{ for de revolução; e} \quad (3-23)$$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ se a articulação } i \text{ for de translação.} \quad (3-24)$$

A dimensão da Matriz Jacobiano é  $m \times n$ , onde  $m$  é o número de linhas, que é igual ao número de graus de liberdade do campo de trabalho do robô e  $n$  é o número de colunas, que é igual ao número de articulações do robô. Para um robô que trabalha no espaço,  $m$  será no máximo igual a 6 e para um robô que trabalha no plano,  $m$  será no máximo igual a 3. Os 6 graus de liberdade do espaço correspondem aos três graus de liberdade de posicionamento e

aos três de orientação de um corpo rígido. Para o plano tem-se dois graus de liberdade de posicionamento e somente um grau de liberdade de orientação, pois, no plano somente define-se velocidade ou posição angular em torno do eixo perpendicular ao plano. Assim, observa-se que o número de linhas da Matriz Jacobiano não é fixa, devendo ser definida pelo interesse do problema e principalmente, em função do que o robô é capaz de realizar. Dessa forma, por exemplo, pode ser definida uma Matriz Jacobiano de dimensão 3x3 para um robô que trabalha no espaço, se somente interessar os três graus de liberdade de posicionamento.

Observa-se que na expressão (5-21), no lugar da velocidade angular do efetuador, pode-se colocar a variação temporal dos parâmetros que descrevem a orientação do efetuador. Estes parâmetros podem ser, por exemplo, ângulos de Euler, “*roll-pitch-yaw*”, parâmetros de Euler-Rodrigues e outros. A variação temporal destes parâmetros é obtida pela derivação no tempo das expressões que os relacionam com as posições das articulações, como será visto na seção 5.6.

**Exemplo 3.3:** Velocidade linear e angular do efetuador do robô de duas articulações de revolução no plano.

A Figura 3-5 apresenta um esquema do robô de duas articulações de revolução no plano. A eq. (3-23) aplicada a este robô resulta no seguinte:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times \overline{O_0 O_2} & \mathbf{z}_1 \times \overline{O_1 O_2} \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \end{bmatrix},$$

onde;

$$\begin{aligned} \overline{O_0 O_1} &= \begin{bmatrix} a_1 C_1 \\ a_1 S_1 \\ 0 \end{bmatrix}; & \overline{O_0 O_2} &= \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \overline{O_1 O_2} = \overline{O_0 O_2} - \overline{O_0 O_1} &= \begin{bmatrix} a_2 C_{12} \\ a_2 S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões dos vetores na expressão da Matriz Jacobiano e efetuando as operações resulta em:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - a_2 S_{12} & -a_2 S_{12} \\ a_1 C_1 + a_2 C_{12} & a_2 C_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a eq. (3-21), obtém-se as velocidades linear e angular do efetuador, como se segue:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} (-a_1 S_1 - a_2 S_{12}) \dot{\theta}_1 - a_2 S_{12} \dot{\theta}_2 \\ (a_1 C_1 + a_2 C_{12}) \dot{\theta}_1 + a_2 C_{12} \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_0^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Observa-se que a velocidade linear do efetuador poderia também ser obtida pela derivação no tempo do vetor posição do efetuador ( $\overline{O_0 O_2}$ ), conforme as eqs. (3-6), (3-7) e (3-8), resultando exatamente na mesma expressão acima.

**Exemplo 3.4:** Velocidade linear e angular do centro do segundo ligamento de um robô de três articulações de revolução no plano.

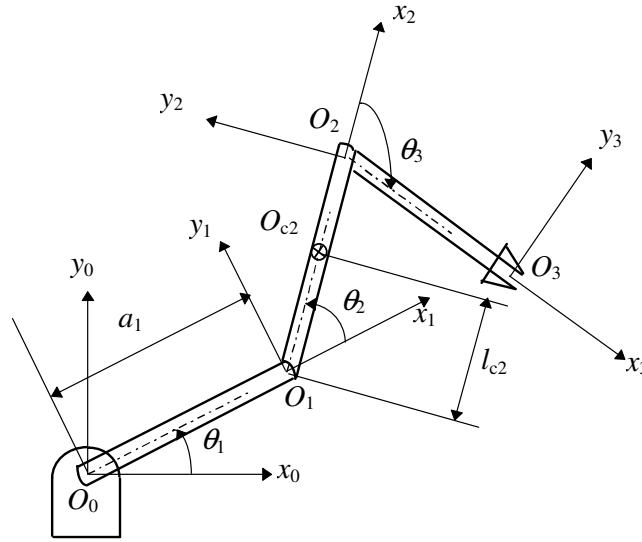


Figura 3-8: Esquema de um robô plano com três articulações de revolução.

A Figura 3-8 apresenta um esquema do robô de 3 articulações no plano. Da mesma forma que realizado no exemplo anterior, a eq. (3-23) pode ser aplicada para se obter a velocidade angular e linear de qualquer ponto dos ligamentos de um robô. A única diferença é que os vetores posição utilizados relaciona a posição do ponto desejado ao centro de cada um dos sistemas de coordenadas, como se segue:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times \overline{O_0 O_{c2}} & \mathbf{z}_1 \times \overline{O_1 O_{c2}} & 0 \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde;

$$\overline{O_0 O_1} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 \\ a_1 S_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{O_0 O_{c2}} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + l_{c2} C_{12} \\ a_1 S_1 + l_{c2} S_{12} \\ 0 \end{bmatrix};$$



$$\overline{O_1 O_{c2}} = \overline{O_0 O_{c2}} - \overline{O_0 O_1} = \begin{bmatrix} l_{c2} C_{12} \\ l_{c2} S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que a terceira coluna da Matriz Jacobiano neste caso é igual a zero porque a velocidade linear e angular do segundo ligamento não é afetada pelo movimento da terceira articulação.

Substituindo as expressões dos vetores de posição e dos eixos das articulações na expressão da Matriz Jacobiano resulta em:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - l_{c2} S_{12} & -l_{c2} S_{12} & 0 \\ a_1 C_1 + l_{c2} C_{12} & l_{c2} C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As velocidades linear e angular do centro do segundo ligamento são obtidas pela multiplicação da Matriz Jacobiano correspondente pelo vetor velocidade das articulações, resultando no seguinte:

$$\mathbf{v}_{c2} = \begin{bmatrix} (-a_1 S_1 - l_{c2} S_{12}) \dot{\theta}_1 - l_{c2} S_{12} \dot{\theta}_2 \\ (a_1 C_1 + l_{c2} C_{12}) \dot{\theta}_1 + l_{c2} C_{12} \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

### 3.4 Velocidade Angular

Um dos conceitos mais complexos na área de cinemática de corpos rígidos é o conceito de velocidade angular. Este fato é reconhecido por diversos autores, podendo-se destacar algumas citações, como as seguintes:

- T.R. Kane (1978): “A velocidade angular parece ser um dos conceitos mais problemáticos”;
- H. Cheng (1989): “Muitos livros não fornecem uma definição clara e útil para rotações genéricas espaciais e não as distingue de rotações em torno de um eixo fixo”.

A definição encontrada para a velocidade angular de um corpo rígido na maioria dos livros, é a seguinte:

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t}, \quad (3-25)$$

onde,  $w$  é a velocidade angular,  $\phi$  é o ângulo medido em torno do eixo instantâneo de rotação e  $\Delta t$  é um intervalo de tempo.

No caso de robôs manipuladores, o eixo instantâneo de rotação normalmente não é conhecido. Nestes casos, a expressão acima não é muito útil. Nesta seção será obtida uma forma mais útil para descrever a velocidade angular de um corpo com uma rotação genérica no espaço.

A Figura 3-9 mostra um corpo rígido com movimento de rotação em relação ao sistema de coordenadas fixo  $O_0-x_0y_0z_0$ . O sistema de coordenadas  $O_1-x_1y_1z_1$  está fixo ao corpo e portanto está com movimento de rotação em relação ao sistema  $O_0-x_0y_0z_0$ . Seja o ponto  $P$ , fixo no corpo, cujas coordenadas em relação ao sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  são dadas pelo vetor  $\mathbf{r}_1$ . Quando o corpo rígido sofre uma rotação, a relação entre as coordenadas do vetor  $\mathbf{r}_1$  no sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  e no sistema  $O_0-x_0y_0z_0$  é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}\mathbf{r}_1, \quad (3-26)$$

onde  $\mathbf{r}_0$  é o vetor com as coordenadas do ponto  $P$  no sistema  $O_0-x_0y_0z_0$  e  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação que descreve a transformação do sistema  $O_0-x_0y_0z_0$  para o sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  fixo ao corpo.

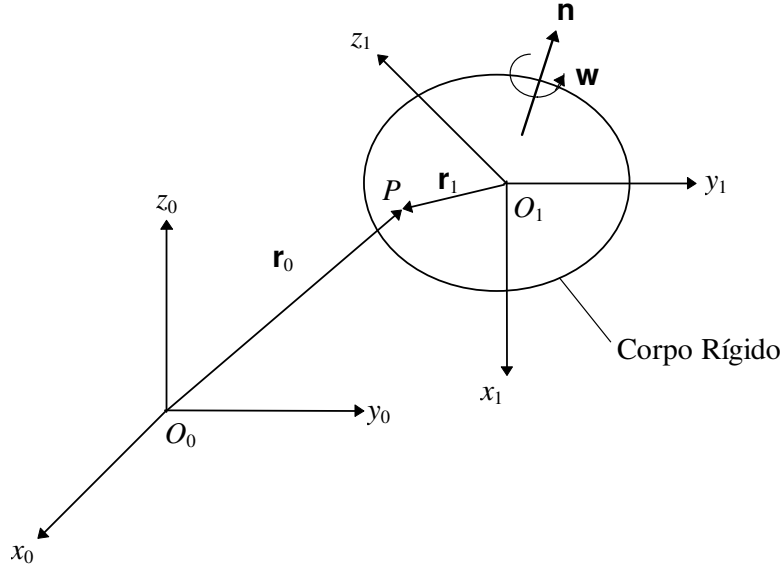


Figura 3-9: Esquema de um corpo rígido com movimento de rotação.

Derivando-se a expressão (3-26) em relação ao tempo, obtém-se a derivada do vetor  $\mathbf{r}_0$ , que é igual à velocidade linear do ponto  $P$  em relação ao sistema  $O_0-x_0y_0z_0$ , como sendo,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}_1. \quad (3-27)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade linear do ponto  $P$ . Observa-se que a medida que o vetor  $\mathbf{r}_1$  é constante, pois a posição do ponto  $P$  fixo no corpo não muda em relação ao sistema de coordenadas fixo no corpo, a sua derivada é igual a zero.

Por outro lado, tem-se que a velocidade linear do ponto  $P$ , cuja posição é definida pelo vetor  $\mathbf{r}_0$  no sistema  $O_0-x_0y_0z_0$ , fixo em um corpo rígido girando com velocidade angular  $\mathbf{w}$  em relação ao sistema  $O_0-x_0y_0z_0$ , é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}_0, \quad (3-28)$$

onde o símbolo  $\times$  denota produto vetorial. Esta expressão pode ser escrita de outra forma mais conveniente, ou seja,

$$\mathbf{v} = \Omega \mathbf{r}_0, \quad (3-29)$$

onde  $\Omega$  é uma matriz de dimensão  $3 \times 3$ , dada por,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3-30)$$

Observa-se que as expressões (3-28) e (3-29) fornecem o mesmo resultado, sendo que a matriz  $\Omega$  representa simplesmente uma forma mais conveniente de escrever o vetor velocidade angular de um corpo rígido. Substituindo a expressão (3-26) na eq. (3-30), resulta no seguinte:

$$\mathbf{v} = \Omega \mathbf{R} \mathbf{r}_1. \quad (3-31)$$

Igualando-se as expressões (3-27) e (3-31) obtém-se uma relação entre a derivada da matriz de rotação e a velocidade angular, ou seja:

$$\dot{\mathbf{R}} = \Omega \mathbf{R}, \quad (3-32)$$

ou, invertendo-se,

$$\Omega = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^t. \quad (3-33)$$

Estas duas expressões são muito importantes, pois elas relacionam a velocidade angular de um corpo com a matriz de rotação e com a derivada da matriz de rotação. Observa-se que a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  representa a orientação do corpo no sistema  $O_0-x_0y_0z_0$  e a sua derivada representa a variação da orientação do corpo.

### 3.5 Variação da Orientação do Efetuador

Observa-se que na expressão (3-21), a velocidade linear do efetuador pode ser obtida simplesmente pela derivação no tempo da posição do efetuador. Assim, se for conhecida a posição inicial do efetuador e a sua velocidade linear em função do tempo, a posição do

efetuador em qualquer instante pode ser calculada pela integração da sua velocidade no tempo. Contudo, o mesmo raciocínio não é válido para a orientação, pois, no caso de robôs manipuladores, o eixo instantâneo de rotação normalmente não é conhecido, além de variar a todo instante. Dessa forma, a integração da velocidade angular do efetuador não fornece a sua posição angular ou, sua orientação. Nestes casos, a parcela da eq. (3-21) que fornece a velocidade angular do efetuador em função das velocidades das articulações às vezes não é muito útil. Nesta seção será obtida uma expressão para descrever a variação da orientação do efetuador em função das velocidades das articulações.

Como visto na seção 3.1, a orientação do efetuador é função das posições das articulações, dessa forma, pode-se definir o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\mathbf{y}_0^n = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (3-34)$$

onde o vetor  $\mathbf{y}_0^n$ , de dimensão  $m \times 1$ , contém a orientação do efetuador e  $\mathbf{f}$  é um vetor de funções de dimensão  $m \times 1$ . A orientação do efetuador pode ser descrita por diversos parâmetros, como por exemplo, os elementos da matriz de rotação, os ângulos de Euler, os parâmetros de Euler-Rodrigues e outros.

A partir da teoria de cálculo diferencial, dado o sistema de equações não lineares, da forma da eq. (3-34), a derivada em relação ao tempo da orientação do efetuador, ou seja, do vetor  $\mathbf{y}_0^n$  é dada por:

$$\dot{\mathbf{y}}_0^n = \mathbf{J}_0(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3-35)$$

onde  $\mathbf{J}_0$  é uma matriz jacobiano de dimensão  $m \times n$ . Podem existir várias matrizes  $\mathbf{J}_0$ , dependendo dos parâmetros utilizados para descrever a orientação do efetuador contidos no vetor  $\mathbf{y}_0^n$ . Assim, se for utilizada a matriz de rotação, como obtido na eq. (3-4), repetida abaixo:

$$\mathbf{A}_0^n(q_1, \dots, q_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^n(q_1, \dots, q_n) & \mathbf{x}_0^n(q_1, \dots, q_n) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (3-4)$$

tem-se, para o vetor  $\mathbf{y}_0^n$ , o seguinte:

$$\mathbf{y}_0^n = (r_{1,1}, r_{1,2}, \dots, r_{3,3})^t \quad (3-36)$$

e para a matriz  $\mathbf{J}_0$ ,

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{1,1}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{1,1}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_{1,1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial r_{1,2}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{1,2}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_{1,2}}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_{3,3}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{3,3}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_{3,3}}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad (3-37)$$

onde  $r_{i,j}$  é o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{R}_0^n$ . Observa-se que neste caso o vetor  $\mathbf{y}_0^n$  terá dimensão  $9 \times 1$ .

Uma forma mais conveniente de descrever a orientação do efetuador são os parâmetros de Euler-Rodrigues, que consiste no conjunto de 4 elementos,  $p, q, r, s$ , como visto na seção 2.8. A expressão (2-51), repetida abaixo, apresenta os parâmetros de Euler-Rodrigues em função dos elementos da matriz de rotação:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) \sqrt{r_{1,1} - r_{2,2} - r_{3,3} + 1}; \\ q &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) \sqrt{-r_{1,1} + r_{2,2} - r_{3,3} + 1}; \\ r &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) \sqrt{-r_{1,1} - r_{2,2} + r_{3,3} + 1}; \\ s &= \frac{1}{2} \sqrt{r_{1,1} + r_{2,2} + r_{3,3} + 1}, \end{aligned} \quad (3-38)$$

onde, sem perda de generalidade, o parâmetro  $\epsilon$  foi assumido como sendo +1. Dessa forma, os parâmetros de Euler-Rodrigues são função das posições das articulações, através dos elementos  $r_{i,j}$  da matriz de rotação. Assim, neste caso, o vetor de orientação do efetuador,  $\mathbf{y}_0^n$ , será definido como:

$$\mathbf{y}_0^n = (p, q, r, s)^t, \quad (3-39)$$

cujas derivadas em relação ao tempo serão dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_0(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3-40)$$

onde a matriz  $\mathbf{J}_0$ , será definida como;

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial q_1} & \frac{\partial p}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial p}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q}{\partial q_1} & \frac{\partial q}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial q}{\partial q_n} \\ \frac{\partial r}{\partial q_1} & \frac{\partial r}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial q_n} \\ \frac{\partial s}{\partial q_1} & \frac{\partial s}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial s}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad (3-41)$$

A derivada dos parâmetros de Euler-Rodrigues em relação à posição da articulação  $i$ ,  $q_i$ , é obtida derivando-se a eq. (3-38) em relação à  $q_i$ , resultando nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial q_i} &= \frac{1}{8p} \left( \frac{\partial r_{1,1}}{\partial q_i} - \frac{\partial r_{2,2}}{\partial q_i} - \frac{\partial r_{3,3}}{\partial q_i} \right); \\
\frac{\partial q}{\partial q_i} &= \frac{1}{8q} \left( -\frac{\partial r_{1,1}}{\partial q_i} + \frac{\partial r_{2,2}}{\partial q_i} - \frac{\partial r_{3,3}}{\partial q_i} \right); \\
\frac{\partial r}{\partial q_i} &= \frac{1}{8r} \left( -\frac{\partial r_{1,1}}{\partial q_i} - \frac{\partial r_{2,2}}{\partial q_i} + \frac{\partial r_{3,3}}{\partial q_i} \right); \\
\frac{\partial s}{\partial q_i} &= \frac{1}{8s} \left( \frac{\partial r_{1,1}}{\partial q_i} + \frac{\partial r_{2,2}}{\partial q_i} + \frac{\partial r_{3,3}}{\partial q_i} \right).
\end{aligned} \tag{3-42}$$

Observando-se estas expressões, nota-se que sempre que  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , ou  $s$  forem iguais a zero, o denominador das mesmas se anula. Dessa forma, o cálculo da variação temporal dos parâmetros de Euler-Rodrigues utilizando a eq. (3-35) e a matriz jacobiano cujos termos são definidos pela eq. (3-42), apresentará problemas numéricos.

Uma forma de se calcular a variação temporal dos parâmetros de Euler-Rodrigues sem problemas numéricos é utilizando a expressão (3-32). A eq. abaixo, apresenta uma matriz de rotação genérica escrita em função dos parâmetros de Euler-Rodrigues,

$$\mathbf{R}_{n,\theta} = \begin{bmatrix} 2(p^2 + s^2) - 1 & 2(pq - rs) & 2(pr + qs) \\ 2(pq + rs) & 2(q^2 + s^2) - 1 & 2(qr - ps) \\ 2(pr - qs) & 2(qr + ps) & 2(r^2 + s^2) - 1 \end{bmatrix}. \tag{3-43}$$

Derivando-se a matriz acima em relação ao tempo e igualando ao produto matricial  $\Omega \mathbf{R}$  da eq. (5-32), obtém-se o seguinte para os termos da diagonal principal:

$$4(p\dot{p} + s\dot{s}) = -2w_z(pq + rs) + 2w_y(pr - qs); \tag{3-44}$$

$$4(q\dot{q} + s\dot{s}) = 2w_z(pq - rs) - 2w_x(qr + ps); \tag{3-45}$$

$$4(r\dot{r} + s\dot{s}) = -2w_y(pr + qs) + 2w_x(qr - ps). \tag{3-46}$$

Sabe-se que o quatêrnion formado pelos parâmetros de Euler-Rodrigues tem módulo unitário, ou seja,

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1, \tag{3-47}$$

que derivando em relação ao tempo, resulta na seguinte relação:

$$p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r} + s\dot{s} = 0. \tag{3-48}$$

Somando-se as expressões (3-44), (3-45), (3-46) e substituindo o resultado na eq. (3-48) resulta em uma expressão para a variação temporal do parâmetro  $s$ , da seguinte forma:

$$\dot{s} = \frac{1}{2} (-w_x p - w_y q - w_z r). \tag{3-49}$$

Substituindo a eq. (3-49) na eq. (3-44), resulta em uma expressão para a variação temporal do parâmetro  $p$ , como a seguir,

$$\dot{p} = \frac{1}{2}(w_x s + w_y r - w_z q). \quad (3-50)$$

Da mesma forma, substituindo-se a eq. (3-49) na eq. (3-50), resulta em:

$$\dot{q} = \frac{1}{2}(-w_x r + w_y s + w_z p). \quad (3-51)$$

Finalmente, substituindo a eq. (3-49) na eq. (3-50), obtém-se para a variação temporal de  $r$ , o seguinte:

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(w_x q - w_y p + w_z s). \quad (3-52)$$

As expressões (3-50), (3-51) e (3-52) podem ser escritas de forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s & r & -q \\ -r & s & p \\ q & -p & s \\ -p & -q & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}. \quad (3-53)$$

Substituindo na expressão acima a eq. (3-19), que fornece a velocidade angular do efetuador em função das velocidades das articulações, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s & r & -q \\ -r & s & p \\ q & -p & s \\ -p & -q & -r \end{bmatrix} \mathbf{J}_w \dot{\mathbf{q}}. \quad (3-54)$$

Comparando as eq. (3-40) e (3-54) chega-se à conclusão que a matriz  $\mathbf{J}_o$  pode ser escrita como um produto entre a matriz jacobiano da velocidade angular e uma matriz  $\mathbf{M}$ , como se segue:

$$\mathbf{J}_o = \mathbf{M} \mathbf{J}_w, \quad (3-55)$$

onde a matriz  $\mathbf{M}$  é definida por:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s & r & -q \\ -r & s & p \\ q & -p & s \\ -p & -q & -r \end{bmatrix}. \quad (3-55)$$

Percebe-se que neste caso, a matriz  $\mathbf{J}_0$  não apresentam problemas numéricos, ou seja, não apresenta a possibilidade de divisão por zero, como ocorria com as relações da eq. (3-42).

**Exemplo 3.5:** Dados os parâmetros de Euler-Rodrigues e a sua variação temporal, obter a velocidade angular.

A eq. (3-53) pode ser escrita em função da Matriz  $\mathbf{M}$ , como se segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}.$$

Multiplicando ambos os lados da eq. acima por  $2\mathbf{M}^t$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} s & -r & q & -p \\ r & s & -p & -q \\ -q & p & s & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix},$$

que após efetuar a álgebra e escrevendo cada componente do vetor velocidade angular separadamente, resulta em;

$$w_x = 2(s\dot{p} - r\dot{q} + q\dot{r} - p\dot{s});$$

$$w_y = 2(r\dot{p} + s\dot{q} - p\dot{r} - q\dot{s});$$

$$w_z = 2(-q\dot{p} + p\dot{q} + s\dot{r} - r\dot{s});$$

ou,

$$\mathbf{w} = 2[(s\dot{p} - r\dot{q} + q\dot{r} - p\dot{s})\mathbf{i} + (r\dot{p} + s\dot{q} - p\dot{r} - q\dot{s})\mathbf{j} + (-q\dot{p} + p\dot{q} + s\dot{r} - r\dot{s})\mathbf{k}];$$

**Exemplo 3.6:** Obter a expressão da velocidade angular de um corpo rígido com rotação em torno de um eixo variável.

A expressão do vetor velocidade angular obtida no exemplo anterior pode rearranjada para se obter:

$$\mathbf{w} = 2[(q\dot{r} - r\dot{q})\mathbf{i} - (p\dot{r} - r\dot{p})\mathbf{j} + (p\dot{q} - q\dot{p})\mathbf{k} + s\dot{p}\mathbf{i} + s\dot{q}\mathbf{j} + s\dot{r}\mathbf{k} - s\dot{p}\mathbf{i} - s\dot{q}\mathbf{j} - s\dot{r}\mathbf{k}],$$

que pode ser escrita em termos de produtos vetoriais e escalares de vetores, como se segue:



$$\mathbf{w} = 2 \left( \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} - \dot{s} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right),$$

onde,  $\times$  significa produto vetorial. A eq. abaixo, fornece as expressões dos parâmetros de Euler-Rodrigues;

$$p = n_x \sin(\theta / 2);$$

$$q = n_y \sin(\theta / 2);$$

$$r = n_z \sin(\theta / 2);$$

$$s = \cos(\theta / 2).$$

Lembre que estes parâmetros representam uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de um eixo arbitrário  $\mathbf{n}$ . Substituindo as expressões acima na eq. da velocidade angular resulta em:

$$\mathbf{w} = \mathbf{n} \dot{\theta} + \mathbf{n} \sin \theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{n})(1 - \cos \theta).$$

Esta expressão fornece a velocidade angular de um corpo rígido em torno do eixo instantâneo de rotação,  $\mathbf{n}$ . Note que, quando  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  (eixo de rotação fixo), a velocidade angular é dada por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{n} \dot{\theta}.$$

Conforme o esperado, ou seja, para um eixo de rotação fixo, a velocidade angular é igual a derivada da posição angular em torno do eixo.