PME 3201 – Laboratório de Simulações Numéricas
Representação de equações diferenciais ordinárias em espaço de estados

Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

1 Definições

- ESTADO é um conjunto de funções que, conhecidos seus valores em determinado instante (genericamente, intante inicial) e as entradas externas a partir desse instante, permite obter indistintamednte a evolução temporal de um sistema dinâmico;
- VARIÁVEIS DE ESTADO é o nome dado a tais funções;
- VETOR DE ESTADO é o conjunto ordenado de variáveis de estado. Para um dado sistema dinâmico, o conjunto de variáveis de estado não é único.

2 Representação de equações diferenciais em espaço de estados

Considere inicialmente uma equação diferencial ordinária linear de ordem n do tipo

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x(1)(t) + a_n x(t) = f(t) \tag{2.1}$$

onde $x^{(n)}(t)$ representa a n-ésima derivada em relação ao tempo (variável independente), $a_1, \ \ldots a_n$, constantes, e $f(t)$ uma função conhecida.

Supondo-se conhecidas as $n-1$ condições iniciais em, por exemplo, $t = t_0$,

$$x(t_0),\ x^{(1)}(t_0)\ \ldots x^{(n-1)}(t_0)$$

é possível efetuar uma transformação que permite obter, da equação diferencial de ordem n, um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem. A transformação é apresentada a seguir.

Definindo-se

$$\begin{aligned} x_1 &= x^{(0)} \\ x_2 &= x^{(1)} \\ x_3 &= x^{(2)} \\ &\vdots \\ x_n &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

a equação 2.1 pode ser escrita como

$$x_1^{(1)} = x_2 \tag{2.2}$$

$$x_2^{(1)} = x_3 \tag{2.3}$$

$$x_3^{(1)} = x_4 \tag{2.4}$$

$$\vdots \tag{2.5}$$

$$x_n^{(1)} = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_1 x_n + f(t)$$

ou ainda, em forma matricial,

$$X^{(1)} = AX^{(0)} + Bf \tag{2.6}$$

com

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A partir dessa transformação, é possível implementar os métodos de solução numérica de equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes de qualquer ordem, da mesma forma como havia sido feito para as equações lineares.

Cabe, entretanto, observar que, no caso de equações diferenciais de ordem superior não-lineares, não é possível escrever o sistema na forma matricial acima, embora seja sempre possível converter a equação não-linear de ordem n em n equações não-lineares de primeira ordem. Esse método é o utilizado, por exemplo, pela função `ode` do Scilab.

Referências

[1] Ogata, K. "Engenharia de Controle Moderno", 4a. ed., São Paulo, SP: Pearson, 2003.

[2] Piskunov, N. "Calculo Diferencial e Integral", 5a. ed., Tomos I e II. Moscou, URSS: Editorial MIR, 1977.

[3] Hildebrand, F.B. "Advanced Calculus for Applications", 2a. ed. New Jersey, EUA: Prentice-Hall Inc., 1976.