Multiplicadores de Lagrange

ou

Como lidar com vínculos implícitos

Vito R. Vanin, agosto de 2016

1. Introdução

Um problema recorrente nas ciências e engenharias é a minimização de uma quantidade que depende de várias grandezas (variáveis), mas mantendo inalterada alguma propriedade ou característica. A relação matemática entre as variáveis que expressa essa propriedade que tem que ser constante é chamada de equação de ***vínculo***.

Muitas vezes é possível eliminar algumas variáveis usando as relações de vínculo, mas também é frequente que os vínculos sejam representados por funções complicadas, e a eliminação não seja possível ou conveniente. O método alternativo à eliminação é o dos *multiplicadores de Lagrange*. Vamos desenvolver o cálculo no caso em que há duas variáveis e um vínculo, que já contém todos os elementos necessários para resolver o problema geral, com qualquer número de variáveis e vínculos.

Ilustraremos o método com o *problema da embalagem*, que é simples do ponto de vista da álgebra e do cálculo, embora seja mais fácil de resolver por redução de variáveis. Esse exemplo, entretanto, evita adicionar a dificuldade de compreender um problema de minimização intrincado, que nos desviaria do objetivo de apresentar o assunto.

2 O Problema da Embalagem

Quando é necessário embalar um volume conhecido e fixo de um líquido, é econômico minimizar a quantidade de embalagem usada, que é proporcional à sua área. Embora a esfera seja a forma mais econômica, frequentemente ela não é conveniente. Por exemplo, latas de tinta são cilíndricas, pois permitem construir tampas grandes numa das extremidades e não entornam facilmente quando colocadas no chão. Assim, vamos enunciar o problema da embalagem como:

> Encontre a proporção entre o diâmetro D e a altura H do cilindro de volume V que tenha a menor superfície possível.

O volume de um cilindro é

$$V = \pi \frac{D^2}{4} H \qquad (1)$$

e a área total da sua superfície é

$$S = \pi D H + \pi \frac{D^2}{2} \qquad (2)$$

O problema pode, então, ser reformulado como:

> Encontre $\hat{D}$ e $\hat{H}$ tais que $S(\hat{D}, \hat{H}) = \text{mínimo}$ quando $V = \pi \frac{\hat{D}^2}{4} \hat{H}$ é o volume que se deseja embalar.

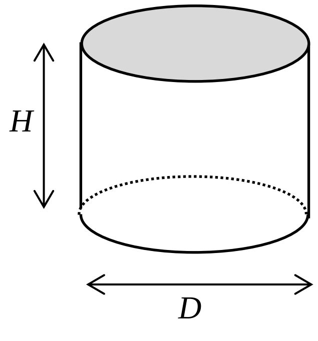

Figura 1. Definição dos parâmetros geométricos da embalagem.

3. Solução do problema da embalagem por eliminação de variáveis

Da equação (1), que representa o vínculo entre as variáveis neste problema, isola-se *H*,

$$H = \frac{4\,V}{\pi D^2}$$

que, substituído em (2), dá

$$S = \frac{4V}{D} + \pi \frac{D^2}{2} \qquad (3)$$

O mínimo ocorre em $\widehat{D}$ tal que

$$\left.\frac{dS}{dD}\right|_{\widehat{D}} = 0 \;\; \rightarrow -\frac{4V}{\widehat{D}^2} + \pi\widehat{D} = 0 \rightarrow \;\widehat{D} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Substituindo esse resultado em (1), obtemos

$$\widehat{H} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \widehat{D} \qquad (4)$$

e, portanto,

$$\frac{\widehat{D}}{\widehat{H}} = 1 \qquad (5)$$

4. Os multiplicadores de Lagrange

Considere uma função *f* de duas variáveis

$$f(x, y)$$

e que essas variáveis estão relacionadas de modo que

$$\varphi(x, y) = 0\;. \qquad (6)$$

φ é a função de vínculo entre as variáveis *x* e *y*, que determinam a grandeza de interesse, *f*.

Se *f* é mínimo no ponto $(\hat{x}, \hat{y})$, então $\delta f(x, y)_{\hat{x},\hat{y}} = 0$, significando que o ponto $(\hat{x}, \hat{y})$ é um ponto estacionário da função, no sentido que estudamos no capítulo 6 do Marion e com a mesma notação. Essa condição de mínimo exige

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\hat{x},\hat{y}} = 0 \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\hat{x},\hat{y}} = 0 \qquad (7)\;\; \text{quando } x \text{ e } y \text{ são independentes}$$

de modo que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \;\; \text{em } (\hat{x}, \hat{y}) \qquad (8)$$

Quando *x* e *y* não são independentes, também dx e dy estão relacionados, de modo que da equação (8) não podemos deduzir a equação (7) – por causa do vínculo, as duas diferenciais se compensam, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial x}dx = -\frac{\partial f}{\partial y}dy$ e não $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, independentemente. A relação entre dx e dy é obtida derivando a equação de vínculo, eq. (6),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0 \qquad (9)$$

Note que (9) é nula não por que os valores representam um extremo, mas sim por que $\varphi = 0$, sempre – acabamos de calcular a diferencial de um zero. Dessa relação, deduzimos

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} \qquad (10)$$

que mostra como as *variações* em x e y se relacionam. A ideia básica dos multiplicadores de Lagrange é não usar a relação (10) de forma explícita, mas sim implícita. O truque é perceber que qualquer combinação linear de (8) e (9)

$$df + \lambda\, d\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy \qquad (11)$$

é nula quando $df = 0$. A fim de zerar a relação (11), escolhemos o valor $\hat{\lambda}$ de λ que anula os dois termos entre parênteses do membro direito,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\hat{x},\hat{y}} + \hat{\lambda}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{\hat{x},\hat{y}} = 0 \qquad (12)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\hat{x},\hat{y}} + \hat{\lambda}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{\hat{x},\hat{y}} = 0 \qquad (13)$$

Assim, resolvendo o sistema das 3 equações: (6), (12) e (13) nas 3 incógnitas $\hat{\lambda}$, $\hat{x}$ e $\hat{y}$, minimizamos a função *f* com variáveis que obedecem o vínculo, sem ter usado a relação $\varphi(x, y) = 0$ para eliminar uma das variáveis no processo de cálculo.

Às vezes, elimina-se $\hat{\lambda}$ ao resolver o sistema de equações, o que dá origem ao nome “multiplicador indeterminado de Lagrange”. Note que *indeterminado* não significa *indefinido*, ou seja, o multiplicador de lagrange tem um valor bem definido, apenas não é necessário calculá-lo para resolver o problema de mínimo. Aliás, quando usado para impor um vínculo a uma lagrangiana, o multiplicador de lagrange é proporcional à força de vínculo, de modo que não só é bem determinado como pode ser a quantidade de interesse no problema.

5. Problema da embalagem com multiplicadores de Lagrange

Nesse problema, a equação (1) corresponde à (6) (vínculo) e *S* da equação (2) corresponde à função *f*. Assim, *x* e *y* são, respectivamente, *D* e *H*. As equações (12) e (13) nessas variáveis ficam

$$\pi\hat{D} + \hat{\lambda}\frac{\pi\hat{D}^2}{4} = 0 \qquad (12')$$

$$\pi\hat{H} + \pi\hat{D} + \hat{\lambda}\frac{\pi\hat{D}\hat{H}}{2} = 0 \qquad (13')$$

Qualquer estratégia é válida para resolver o sistema de equações (1), (12’) e (13’), mas aqui vamos *determinar* o multiplicador de lagrange da equação (12’),

$$\hat{\lambda} = -\frac{4}{\hat{D}}$$

que, substituído em (13’), dá

$$\hat{D} = \hat{H}$$

em acordo com o resultado que já havíamos obtido por eliminação de variável, fórmula (5).

6. Considerações sobre os multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange é poderoso e simplifica a solução de muitos problemas, mas não é sempre que ele conduz a um sistema de equações mais fácil de resolver do que as que se obtém por eliminação de variáveis. Assim, ao enfrentar um problema de minimização, se as equações (6), (12) e (13) formarem um sistema muito difícil de resolver, vale a pena tentar outro caminho, antes de insistir em usar os multiplicadores.

7. Considerações sobre o problema da embalagem

Sugiro que experimente medir a razão *D*/*H* das embalagens que encontrar. Eu verifiquei que a proporção era próxima de 1 para muitas delas, enquanto, para outras, essa proporção era muito diferente. Há pelo menos dois motivos para essa diversidade.

O primeiro é que, frequentemente, há outros vínculos a obedecer. Por exemplo, uma lata de tinta necessita de uma tampa que feche bem e de preferência não encoste na tinta, por isso é muito frequente que esse tipo de produto venha em latas um pouco mais altas que o diâmetro – é o *líquido* dentro da lata que ocupa um volume com *D*/*H* muito próximo.

O outro motivo tem a ver com a finalidade. Uma lata de refrigerante é segura pela mão, e uma vez que é um produto desnecessário, considerações econômicas ficam para segundo plano e o conforto (além da propaganda, convencimento para consumo, etc.) predominam. Claro que a finalidade também pode trazer outras questões de física ao problema, e o caso do refrigerante com gás pode servir de exemplo. A lata precisa resistir à pressão interna, e um cilindro de menor diâmetro resiste melhor à pressão interna e isso permite afinar a parede lateral; que esse problema é significativo se percebe ao examinar a tampa inferior, que não é plana e sim côncava.

Enfim, a regra geral de aplicação da física e da matemática aos produtos tecnológicos é que elas contêm *propostas* para a solução dos problemas, mas *não determinam* o produto final, que tem outros requisitos simultâneos para sua realização.