APÊNDICE C

Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem[1]

C.1 Equações lineares homogêneas

De longe, o tipo de equação diferencial ordinária mais importante encontrada nos problemas de física matemática é a equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes. As equações deste tipo têm a forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x) \tag{C.1a}$$

ou, denotando derivadas por linhas**

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{C.1b}$$

Uma classe especialmente importante de tais equações são aquelas para as quais $f(x) = 0$. Essas equações (chamadas de **equações homogêneas**) são importantes não apenas por si mesmas mas também como equações *reduzidas* na solução do tipo mais geral de equação (Equação C.1).

Primeiro, vamos considerar a equação linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.[2]

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{C.2}$$

Estas equações têm as seguintes propriedades importantes:

a. Se $y_1(x)$ for uma solução da Equação C.2, então $c_1 y_1(x)$ também será uma solução.
b. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem soluções, então $y_1(x) + y_2(x)$ também será uma solução (princípio de *superposição*):
c. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem soluções *linearmente* independentes, então a solução *geral* para a equação será dada por $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. (A solução geral sempre contém duas constantes arbitrárias.)

[1] Um tratado padrão sobre equações diferenciais é o de Ince (In27). Uma listagem com vários tipos de equações e suas soluções é fornecida por Murphy (Mu60). Um ponto de vista moderno pode ser encontrado no livro de Hochstadt (Ho64).
As notações mais conhecidas são: notação de Leibniz $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, notação linha ($y'$), notação ponto de Newton ($\dot{y}$) e notação subscrito (μxx) (N.R.T.).
[2] A primeira solução publicada de uma equação deste tipo foi por Euler em 1743, mas a solução parece ter sido descoberta por Daniel e Johann Bernoulli em 1739.

As funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são **linearmente independentes** se e somente se a equação

$$\lambda y_1(x) + \mu y_2(x) \equiv 0 \tag{C.3}$$

for atendida apenas por $\lambda = \mu = 0$. Se a Equação C.3 puder ser atendida sendo λ e μ diferentes de zero, então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ serão considerados como sendo **linearmente dependentes**.

A condição geral (ou seja, a condição necessária e suficiente) para que um conjunto de funções $y_1, y_2, y_3, \ldots$ seja linearmente dependente é que o **determinante de Wronskian** dessas funções desapareça de forma idêntica.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{C.4}$$

onde $y^{(n)}$ é a enésima derivada de y em relação a x.

As propriedades (a) e (b) da página anterior podem ser verificadas por substituição direta, mas (c) só é afirmada aqui para produzir a solução geral. Essas propriedades se aplicam *somente* a equação homogênea (Equação C.2) e *não* a equação geral (Equação C.1).

As equações do tipo C.2 são redutíveis por meio da substituição

$$y = e^{rx} \tag{C.5}$$

Agora

$$y' = re^{rx}, \quad y^n = r^2 e^{rx} \tag{C.6}$$

Usando estas expressões para y' e y'' na Equação C.2, temos uma equação algébrica chamada **equação auxiliar**:

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{C.7}$$

A solução desta equação quadrática de r é

$$r = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \tag{C.8}$$

Primeiro, presume-se que as duas raízes, denotadas por r_1 e r_2, não sejam idênticas e escrevemos a equação como

$$y = e^{r_1 x} + e^{r_2 x} \tag{C.9}$$

Como o determinante wronskiano de exp $(r_1 x)$ e exp $(r_2 x)$ não desaparecem, essas funções são linearmente independentes. Assim, a solução geral é

$$\boxed{y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad r_1 \neq r_2} \tag{C.10}$$

Se acontecer que $r_1 = r_2 = r$, então pode-se verificar pela substituição direta que x exp (rx) também é uma solução, e tendo em vista que exp (rx) e x exp (rx) são linearmente independentes, a solução geral para as raízes idênticas será dada por

$$\boxed{y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}, \quad r_1 = r_2 \equiv r} \tag{C.11}$$

EXEMPLO C.1

Resolva a equação

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \tag{C.12}$$

Solução. A equação auxiliar é

$$r^2 - 2r - 3 = (r - 3)(r + 1) = 0 \tag{C.13}$$

As raízes são

$$r_1 = 3, \quad r_2 = -1 \tag{C.14}$$

Portanto, a solução geral é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \tag{C.15}$$

EXEMPLO C.2

Resolva a equação

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \tag{C.16}$$

Solução. A equação auxiliar é

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0 \tag{C.17}$$

As raízes são iguais, são $r = -2$. Portanto, a solução geral é

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} \tag{C.18}$$

Se as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar forem imaginárias, as soluções dadas por $c_1 \exp(r_1 x)$ e $c_2 \exp(r_2 x)$ ainda estarão corretas.

Para fornecer as soluções inteiramente em termos de quantidades reais, utilizamos as relações de Euler para expressar os exponenciais. Então,

$$\left.\begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) \\ e^{r_2 x} &= e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x) \end{aligned}\right\} \tag{C.19}$$

e a solução geral é

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ &= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos \beta x + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen} \beta x] \end{aligned} \tag{C.20}$$

Agora c_1 e c_2 são arbitrárias, mas estas constantes podem ser complexas. No entanto, não todos os quatro elementos podem ser independentes (pois não haveria *quatro* constantes arbitrárias em vez de *duas*). O número de elementos independentes pode ser reduzido para os *dois* necessários, tornando c_1 e c_2 conjugados complexos. Em seguida, as combinações $A \equiv c_1 + c_2$ e $B \equiv i(c_1 - c_2)$ se tornam um par arbitrário de constantes reais. Usando estas equações na solução, temos

$$y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x) \tag{C.21}$$