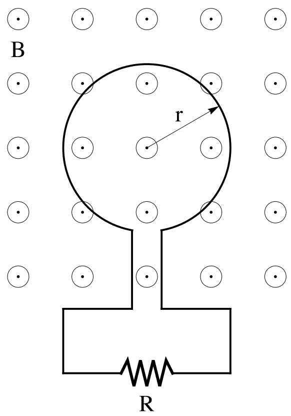
ELETROMAGNETISMO - LISTA 5

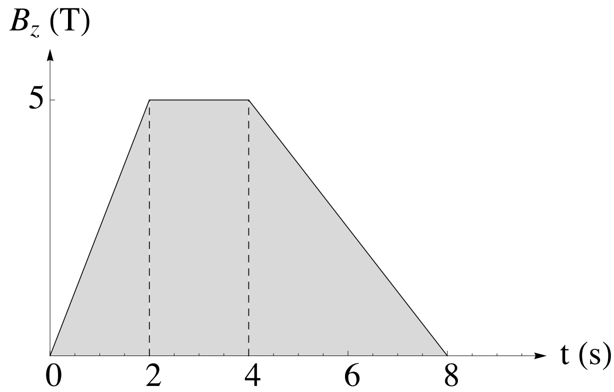
Lei de Faraday

Data para entrega: 14 de junho (quinta-feira)

1. Campo magnético variando no tempo

Considere o problema na figura abaixo, referente à um campo magnético $\boldsymbol{B}$ perpendicular à uma espira de uma única volta e cuja resistência é desprezível. O campo muda com o tempo de acordo com o gráfico abaixo e sua direção é saindo da página. O raio da espira é $r = 50$ cm e ela está conectada em série com um resistor de resistência $R = 20\ \Omega$. Nas perguntas abaixo, considere como positivo o sentido anti-horário.





(a) Encontre uma expressão para a *fem* induzida no circuito em função de $B_z(t)$ (**sem números!**)?

Para encontrar uma expressão para a fem, o ponto de partida é a lei de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{B}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A$$

O sentido anti-horário foi definido como o positivo, e portanto $\boldsymbol{B}\cdot\hat{n} = +B_z$. Com isso obtemos,

$$\mathcal{E} = -\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

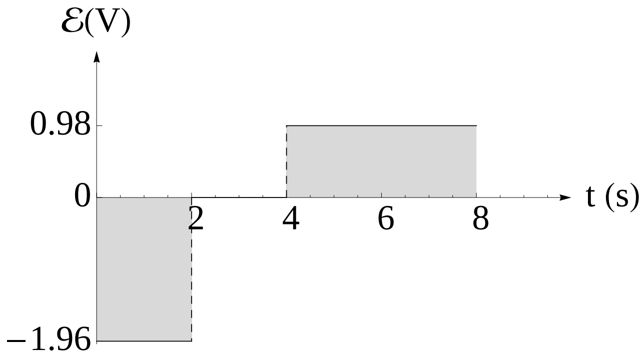
onde, para referência, $\pi r^2 \simeq 0.79$ m^2.

(b) Faça um gráfico da *fem* em função do tempo. Nomeie os eixos apropriadamente, com escala e unidades. Muito cuidado com os sinais. Note que o sentido positivo da fem foi definido como sendo o anti-horário.

De acordo com o gráfico de B_z em função do tempo, temos as seguintes situações para cada intervalo:

$$\begin{aligned}
0 < t < 2: &\quad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{2} = 2,5\ \mathrm{T} &&\longrightarrow \quad \mathcal{E} = -1,96\ \mathrm{V}\\
2 < t < 4: &\quad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 0 &&\longrightarrow \quad \mathcal{E} = 0\\
4 < t < 8: &\quad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\frac{5}{4} = -1,25\ \mathrm{T} &&\longrightarrow \quad \mathcal{E} = 0,98\ \mathrm{V}
\end{aligned}$$

O gráfico correspondente está ilustrado na figura abaixo.

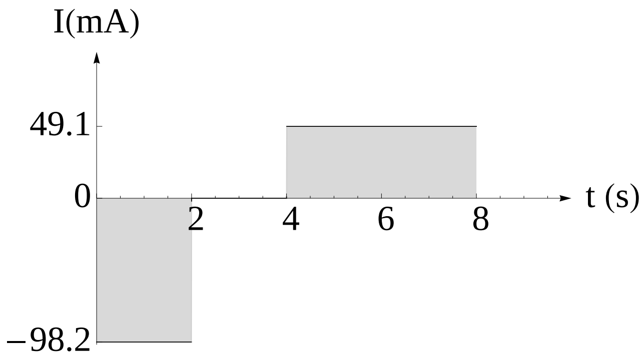


(c) Faça um gráfico da corrente I através do resistor R em função do tempo. Nomeie os eixos apropriadamente, com escala e unidades. Para *cada um* dos três intervalos de tempo em que o campo está mudando, faça um desenho do resistor com uma flecha indicando a direção da corrente.

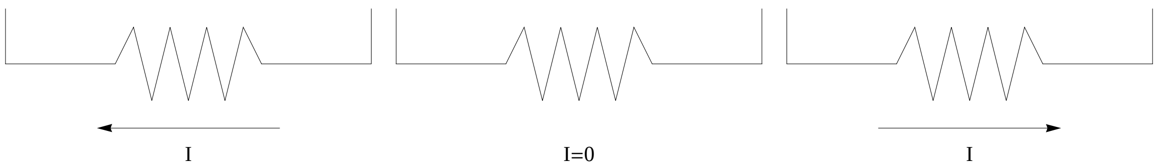
A corren está relacionada com a fem induzida de forma simples, através da relação

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

onde $R = 20\ \Omega$. Note que ambas possuem o mesmo sinal. O gráfico correspondente está ilustrado na figura abaixo (atenção: a escala de I está em mA).



O diagrama da figura abaixo ilustra o sentido da corrente nos diferentes intervalos de tempo relevantes.



(a) $0 < t < 2$ (b) $2 < t < 4$ (c) $4 < t < 8$

(d) Faça um gráfico da potência dissipada no resistor em função do tempo.

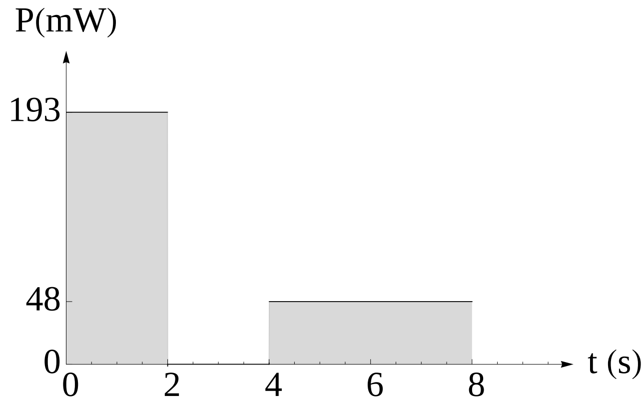
A definição geral de potência (para lembrá-los) é

$$P = \mathcal{E} I$$

(Em geral nós escrevemos $P = VI$, mas neste caso a ddp é dada somente pela fem induzida $\mathcal{E}$). Esta definição é **geral**. No advento da lei de Ohm ser válida (o que é verdade em problemas na lista de exercício, mas não necessariamente na vida real), então podemos usar que $\mathcal{E} = IR$ e rescrever esta expressão como, por exemplo

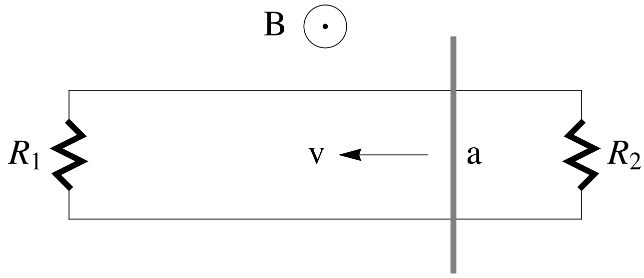
$$P = RI^2$$

Note que a potência, independentemente do sinal de I (ou $\mathcal{E}$), é sempre uma grandeza positiva. O seu gráfico correspondente está ilustrado na figura abaixo.



2. **Bastão deslizando**

Um bastão condutor de resistência desprezível e comprimento a desliza sem atrito sobre dois fios condutores paralelos. Dois resistores, R_1 e R_2, estão conectados nas extremidades dos fios formando um circuito (vide figura). Nesta região há um campo magnético uniforme e constante $\boldsymbol{B}$, saindo da página. Nos cálculos do fluxo abaixo, tome a normal da superfície *saindo* da página.



(a) O fluxo magnético no circuito da direita está aumentando ou diminuindo (explique)?

O fluxo magnético é, por definição:

$$\Phi_B = \int \boldsymbol{B} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A$$

No enunciado foi definido que a normal $\hat{n}$ deve ser tomada como saindo da página. Isso significa que, como $\boldsymbol{B}$ também é saindo da página, $\boldsymbol{B} \cdot \hat{n} = B$. Além disso, $\boldsymbol{B}$ é homogêneo por toda a extensão do circuito e por isso pode ser removido da integral, resultando em

$$\Phi_B = BA$$

Não confunda as coisas: o motivo pelo qual B sai ou não da integral tem a ver com o fato dele ser (ou não) **homogêneo** no espaço; ou seja, nada importa se a área está mudando no tempo (como ela de fato está neste caso).

Concluímos então que, como a área está aumentando, o fluxo através do circuito da direita está **aumentando**.

(b) Qual a magnitude da taxa de variação do fluxo magnético através do circuito da direita?

Agora que já sabemos o sinal de $\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$, podemos nos concentrar somente na sua magnitude. O campo é constante no tempo ao passo que a área aumenta de acordo com $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = av$, onde v é a velocidade do circuito. Portanto,

$$\left| \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \right| = Bav, \qquad \text{(circuito da direita)}$$

(c) Qual a corrente fluindo pelo resistor R_2 no circuito da direita? Faça um desenho de R_2 com uma flecha indicando sua direção.

Pela lei de Ohm a corrente será simplesmente

$$I_{\text{dir}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{dir}}}{R_2}$$

onde o subscrito "dir" serve para denotar grandezas referentes ao circuito da direita. Além disso, pela lei de Faraday sabemos que

$$\mathcal{E}_{\text{dir}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -Bav$$

Portanto, a corrente será

$$I_{\text{dir}} = -\frac{Bav}{R_2}$$

Vejamos três formas distintas de extrair a direção da corrente.

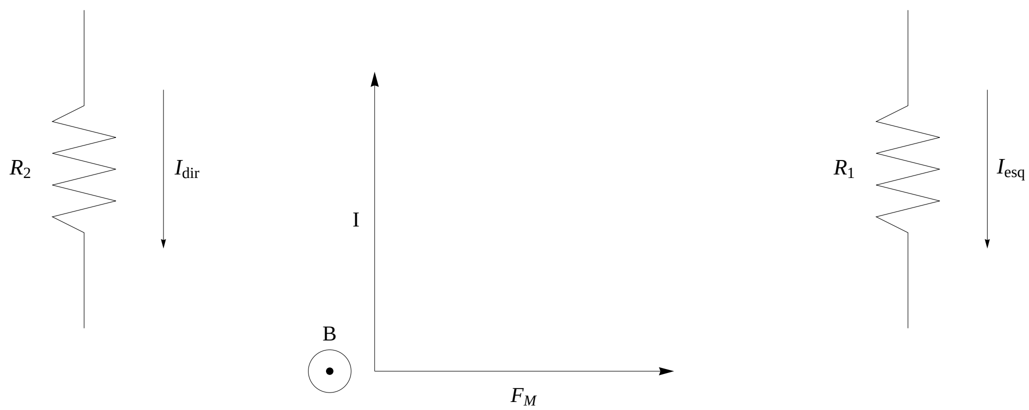
(1) De acordo com a convenção de fluxo magnético, quando $\hat{n}$ está saindo da página (como neste problema), então valores positivos correspondem a uma circulação no sentido anti-horário. Como os valores que obtivemos são negativos, concluímos que a corrente circulará no sentido **horário**; ou seja, de cima para baixo em R_2 e de baixo para cima no bastão (vide figura (a) abaixo)

(2) Usando a lei de Lenz vemos que uma corrente induzida no sentido horário produz um campo B_{ind} para baixo, que vai contra o campo original; ou seja, cuja tendência é **diminuir** quaisquer mudanças no fluxo magnético através do circuito. Caso a corrente fosse no sentido anti-horário, ela criaria um B_{ind} na mesma direção do campo aplicado, aumentando o fluxo magnético.

(3) Quando a corrente é no sentido horário, ela atravessa o bastão de baixo para cima. Consequentemente, a direção da força magnética que o *campo aplicado* exerce na *corrente induzida* (sim, ele exerce uma força na corrente que ele mesmo produz!) será

$$\hat{F}_M = \hat{I} \times \hat{B}$$

O diagrama com as forças relevantes está ilustrado na figura (b) abaixo. Como é razoável esperar, a força é na direção contrária ao movimento; ou seja, ela tende a frear a barra ao invés de acelerá-la (ufa!). Esta é outra forma de interpretarmos a lei de Lenz e corrobora o nosso resultado de que a corrente é no sentido horário.



(a) Direção da corrente no circuito da direita (que passa por R_2).

(b) Direção da força magnética na barra em movimento.

(c) Direção da corrente no circuito da esquerda (que passa por R_1).

(d) O fluxo magnético no circuito da esquerda está aumentando ou diminuindo (explique)?

No caso do circuito da direita, o fluxo está claramente diminuindo pois a situação é idêntica a do item (a), exceto pelo fato que a área agora está diminuindo.

(e) Qual a magnitude da taxa de variação do fluxo magnético através do circuito da esquerda?

Em analogia direta com o item (b), teremos também para o circuito da esquerda que:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = Bav, \qquad \text{(circuito da esquerda)}$$

(f) Qual a corrente fluindo pelo resistor R_1 no circuito da esquerda? Faça um desenho de R_1 com uma flecha indicando sua direção.

Usando o mesmo procedimento do item (c) chegamos a

$$I_{\text{esq}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{esq}}}{R_1} = \frac{Bav}{R_1}$$

O resultado neste caso é positivo. Note: $\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} < 0$ mas $\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$, o que acarreta em $\mathcal{E}_{\text{esq}} > 0$ e, consequentemente, $I_{\text{esq}} > 0$. A conclusão é que a corrente pelo circuito da esquerda circula no sentido **anti-horário** (vide a figura (c) acima).

Este resultado também está de acordo com a lei de Lenz: uma corrente no sentido anti-horário produz um campo para cima resultando em um aumento do fluxo magnético (cujo intuito é se opor à diminuição ocasionada pela redução da área). Note que uma corrente no sentido anti-horário circulando no circuito da esquerda também equivale a uma corrente de baixo para cima no bastão. Ou seja, os sentidos das correntes são tais que produzem exatamente o mesmo efeito no bastão (que é o protagonista da história): freá-lo por meio de uma força magnética no sentido oposto ao da velocidade (assim como a força de atrito).

(g) Qual a magnitude e a direção da força magnética exercida no bastão?

A direção da força já foi análisada no item (c). A força magnética corresponde à força que o campo magnético gera na corrente que atravessa o bastão. Pela lei de Lenz (ou pela análise vetorial feita no item (c)), a força será no sentido oposto ao da velocidade. Neste caso há duas contribuições para a corrente no bastão: do circuito da esquerda e do circuito da direita. Ambas são na mesma direção e portanto se somam. Note também que se mudássemos a direção da velocidade, toda a análise feita até aqui se inverteria e chegaríamos a conclusão de que a força magnética seria para a esquerda, ainda na direção oposta a velocidade (não existe almoço grátis!).

Com relação a magnitude, teremos o seguinte: **se e somente se** o campo B for homogêneo, então[1]

$$F_M = IaB$$

A corrente I neste caso representa a corrente total:

$$I = I_{\text{esq}} + I_{\text{dir}} = \frac{Bav}{R_1} + \frac{Bav}{R_2} = Bav\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Portanto,

$$F_M = B^2a^2v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

[1] Caso contrário temos que pensar em cada pequeno pedaço do circuito onde a força magnética é dada por $\mathrm{d}F_M = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$, onde $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ é um pequeno vetor na direção pela qual a corrente flui. A força total é obtida integrando essa relação ao longo do circuito.

3. **Integrador de corrente: medindo o campo magnético da terra**

Um integrador de corrente é um dispositivo que integra (soma) a corrente passando por um circuito ao longo do tempo, a fim de fornecer a carga total que passou por ele. Como $I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, o integrador de corrente medirá uma carga $Q = \int I\,\mathrm{d}t$. Considere uma bobina circular com 300 voltas e raio $r = 5$ cm, conectada ao integrador. Tome a resistência total do sistema como sendo 20 Ω. Suponha que, inicialmente, a normal da bobina está paralela ao campo da terra.

(a) Obtenha uma expressão para a carga medida no integrador se rotacionarmos a bobina em 90° (**sem números!**).

Pela lei de Ohm $I = \mathcal{E}/R$; usando a lei de Faraday podemos escrever a fem em termos da taxa da variação do fluxo:

$$I = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

Portanto a corrente será simplesmente

$$Q = \int I\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int \mathrm{d}\Phi_B$$

(os $\mathrm{d}t$'s se "cancelam"). Esta integral será simplesmente

$$Q = -\frac{1}{R}\left[\Phi_B(\text{final}) - \Phi_B(\text{inicial})\right]$$

Já o fluxo lê-se

$$\Phi_B = NBA\cos\theta$$

No inicio do processo $\theta = 0$ e no final, $\theta = \pi/2$. Portanto,

$$Q = -\frac{NBA}{R}\left[\cos(\pi/2) - \cos(0)\right] \quad \longrightarrow \quad Q = \frac{NBA}{R}$$

(b) Suponha que no final do processo mediu-se uma carga $Q = 9,4$ µC. Calcule o campo magnético da terra neste local.

Invertendo o resultado do item anterior podemos escrever o campo da terra, B_T, em função de Q:

$$B_T = \frac{QR}{NA}$$

Substituindo os valores e lembrando que $A = \pi r^2$ chegamos a

$$B_T \simeq 0,798 \text{ G}$$

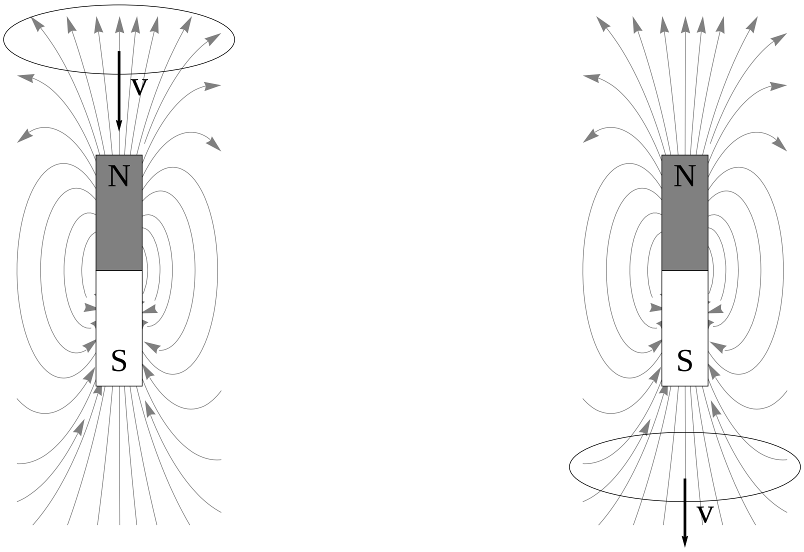
4. **Indução eletromagnética**

Uma espira de cobre está acima de um imã permanente cujo norte aponta na mesma direção (vide figura da esquerda). Com relação a correntes, tome o sentido anti-horário, quando visto de cima, como positivo. Para o fluxo, tome para cima como positivo. Para obter créditos neste problema você deverá deixar **bem** claro seu raciocínio e seus cálculos.

Suponha que você move a espira à uma velocidade constante, de uma região bem *acima* do imã, até uma região bem *abaixo* dele. Qual dos gráficos abaixo melhor representa

(a) O fluxo magnético através da espira em função do tempo?

Nós definimos a normal à espira como sendo para cima. Por essa razão, $\boldsymbol{B}\cdot\hat{n}$ é um número positivo (as linhas de campo do imã "saem" do pólo norte e "entram" no pólo sul). Conforme nos aproximamos do imã (de cima para baixo), a densidade de linhas de campo aumentam e, consequentemente, o fluxo também. Portanto, o fluxo magnético é positivo **e** está aumentando. Após cruzarmos o imã e começarmos a nos afastar dele, note como as linhas de campo continuam sendo para cima (pois



elas entram no pólo sul). Portanto, o fluxo permanece positivo, mas agora ele passa a diminuir de intensidade já que estamos nos afastando do imã.

Assim, a resposta correta é o gráfico **(a)**.

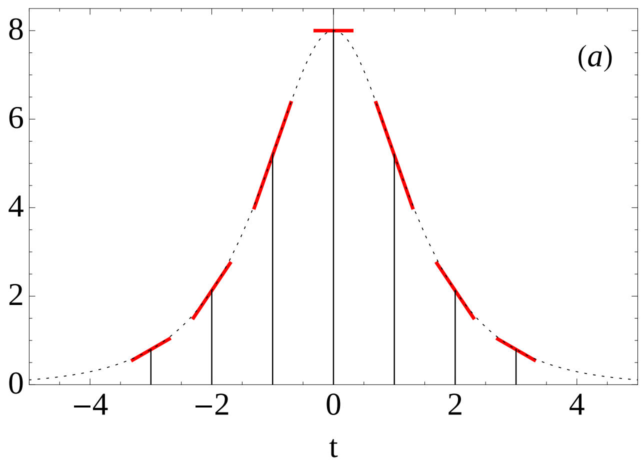
(b) A corrente através da espira em função do tempo?

Existem três formas de analisar a corrente:

(1) De acordo com a lei de Faraday

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

Isso mostra que a corrente é proporcional ao *negativo da taxa de variação do fluxo*. Para entender melhor o significado disso, veja a figura abaixo.



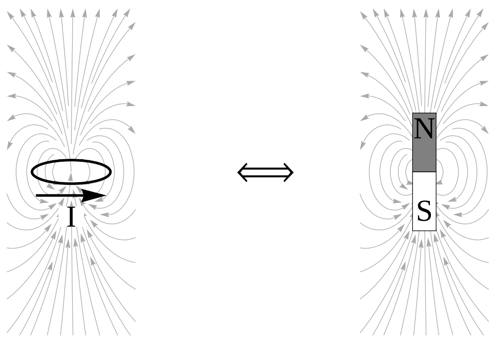
Em cada instante de tempo $\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$ representa a taxa de inclinação do fluxo. Note que para t negativo ela começa próxima de zero e passa, em seguida, a aumentar gradativamente. Em torno de $t = -1$ a taxa de inclinação atinge um máximo, a partir do qual ela passa a diminuir rapidamente, anulando-se em $t = 0$. Daí em diante ela se torna negativa, tendo um mínimo em torno de $t = 1$ e tendendo a zero conforme o tempo passa. Este comportamento é análogo ao do gráfico (c), mas cuidado: $I \propto -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$. A corrente é tudo isso que eu falei, multiplicado por (-1).

Ou seja, a corrente corresponde ao gráfico na figura **(d)**.

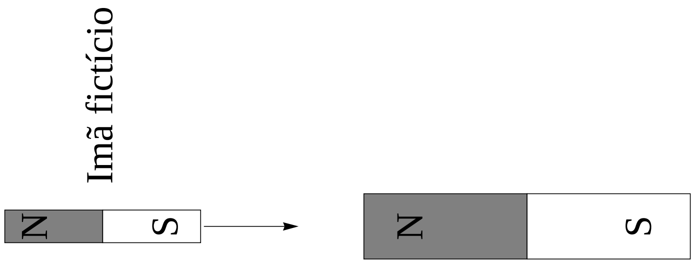
(2) De acordo com a lei de Lenz a corrente deve produzir um fluxo magnético cujo intuito é se contrapor ao fluxo magnético proveniente da interação com o imã. Vejamos primeiro a situação onde a espira está acima do imã. Se a corrente for no sentido anti-horário (visto de cima), então ela irá produzir um campo B_{ind} para cima, que gera um fluxo magnético com o mesmo **sinal** que o fluxo original. Por outro lado, se o sentido da corrente for horário, o campo gerado será para baixo, acarretando num fluxo induzido contrário ao fluxo original. Portanto, da lei de Lenz podemos ver que a corrente irá fluir (enquanto a espira estiver acima do imã) no sentido **horário**. De acordo com o enunciado, devemos tomar como positivo o sentido anti-horário; portanto, no presente caso a corrente deverá ser negativa. Isso está de acordo com a nossa outra análise (gráfico (d)), onde concluímos que antes da espira atravessar o imã, a corrente é negativa.

Quando a espira estiver abaixo do imã, a corrente induzida será no sentido anti-horário; ou seja, ela irá produzir um campo para cima cuja tendência é aumentar o fluxo total (que agora está diminuindo já que estamos nos afastando do imã). Novamente, este resultado está de acordo com nossa outra análise já que uma corrente no sentido anti-horário significa um número positivo, assim como observado no gráfico (d) na região onde $t > 0$.

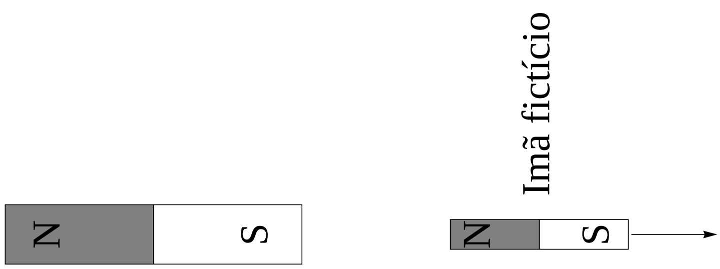
(3) (Essa é a minha forma favorita de analisar o problema) Comecemos pela situação onde a espira está acima do imã. Se a corrente induzida fosse no sentido anti-horário, então o campo produzido pela espira seria para cima. Veja a figura abaixo:



O meu ponto é que o campo produzido se assemelha ao de um imã, com o norte apontando para cima. Agora se colocarmos este imã sobre o nosso imã original teremos a seguinte situação (rotacionada de 90° para não ocupar tanto espaço):



Note: essa situação acarretaria em uma atração dos imãs, que vai contra a lei de Lenz. Portanto, certamente, essa não deve ser a resposta correta; ou seja, a corrente deve circular no sentido **horário**. Uma análise semelhante mostra que quando a espira tiver abaixo do imã, a corrente deverá ser no sentido anti-horário para produzir uma situação como esta:



Agora há uma atração entre os imãs. Por um lado isso reflete a inércia do sistema ao lutar contra mudanças. Por outro, isso reflete o fato que esse tipo de dispositivo **não** pode ser usado como um estilingue de espiras: se a situação correta fosse a oposta, o imã aceleraria a espira para longe!

(c) Qual a direção da força magnética que o imã exerce na espira quando ela está (i) acima do imã e (ii) abaixo dele?

Esta pergunta já foi respondida no item anterior. Quando a espira estiver acima do imã a força será repulsiva; ou seja, para cima. Já abaixo do imã, a força será atrativa; ou seja, novamente para cima.

Suponha agora que você move a espira à uma velocidade constante, de uma região bem *abaixo* do imã, até uma região bem *acima* dele. Qual dos gráficos abaixo melhor representa

(c) O fluxo magnético através da espira em função do tempo?

Assim como no item (a) o fluxo magnético é positivo ao longo de toda a trajetória, pois a normal aponta na mesma direção do campo. Além disso, o fluxo começa pequeno e aumenta gradativamente conforme a espira se aproxima do imã. Quando a espira estiver acima do imã o fluxo continua sendo positivo, mas agora diminui em magnitude com o passar do tempo.

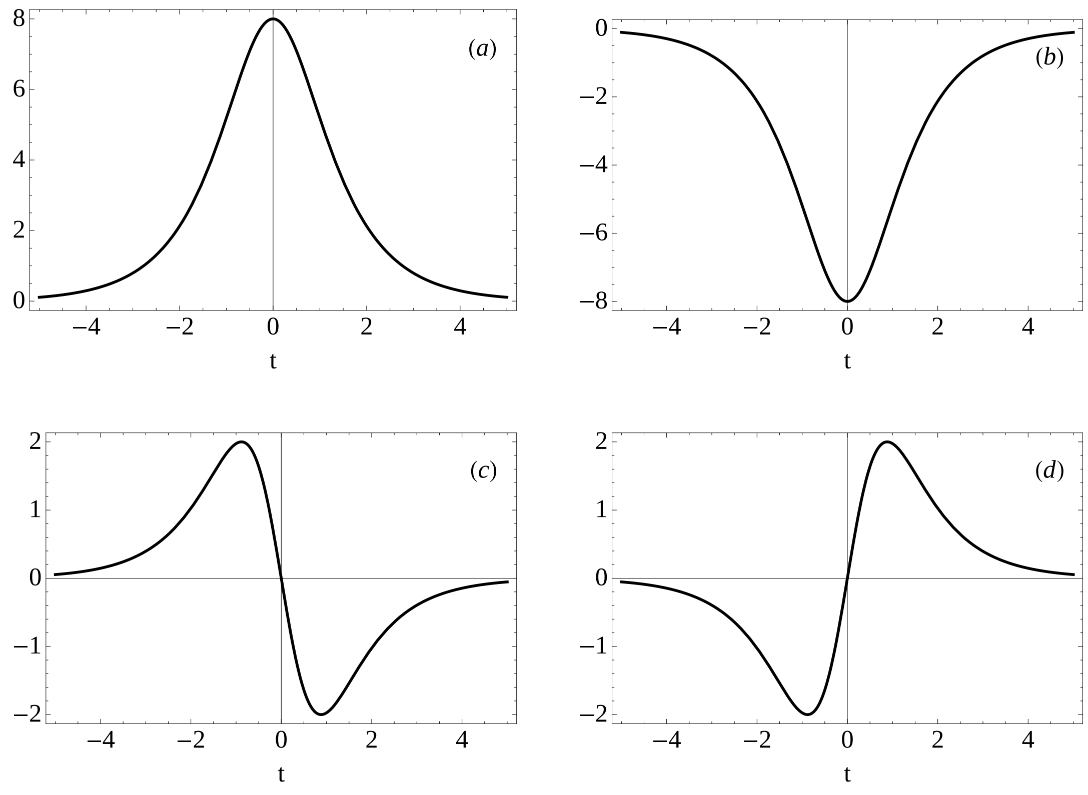
Portanto, o gráfico que melhor representa o fluxo continua sendo o da figura **(a)**.

(d) A corrente através da espira em função do tempo?

O fluxo magnético é o mesmo e, portanto, o mesmo deve ser verdade sobre a corrente. Portanto, continua sendo a resposta **(d)**.

(e) Qual a direção da força magnética que o imã exerce na espira quando ela está (i) abaixo do imã e (ii) acima dele?

Esperamos, intuitivamente (há um pouco da lei de Lenz em todos nós!) que abaixo do imã a força seja repulsiva (para baixo), evitando que os objetos se aproximem. Por outro lado, acima do imã, esperamos uma força atrativa (novamente para baixo).



5. **Solenóide**

Um solenóide (que assumimos ideal) tem 30 cm de comprimento e 1 cm de raio, possui 500 voltas e carrega uma corrente de 2 A.

(a) Calcule o campo magnético no centro do solenóide.

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} = 4,2 \times 10^{-3}\ \mathrm{T} = 42\ \mathrm{G}$$

(b) Calcule o fluxo magnético através do solenóide (assumindo que o campo seja uniforme).

$$\Phi_B = NAB = N(\pi r^2)B \simeq 0,66\ \mathrm{mWb}$$

(c) Calcule a auto-indutância do solenóide.

$$\Phi_B = \mathcal{L} \qquad \therefore \quad \mathcal{L} = \frac{\Phi_B}{I} \simeq 0,33\ \mathrm{mH}$$

(d) Calcule a energia magnética armazenada no solenóide através da relação $U_B = \frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$.

$$U_B = \frac{1}{2}\mathcal{L}I^2 \simeq 0,66\ \mathrm{mJ}$$

(e) Divida o seu resultado do item anterior pelo volume do solenóide a fim de obter a densidade de energia magnética, u_B.

$$u_B = \frac{U_B}{\mathrm{vol}} = \frac{U_B}{\pi r^2 L} \simeq 7\ \mathrm{J/m^3}$$

(f) Calcule a densidade de energia através da relação $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$, e verifique se o seu resultado concorda com o item anterior.

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(4,2 \times 10^{-3})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \simeq 7\ \mathrm{J/m^3}$$

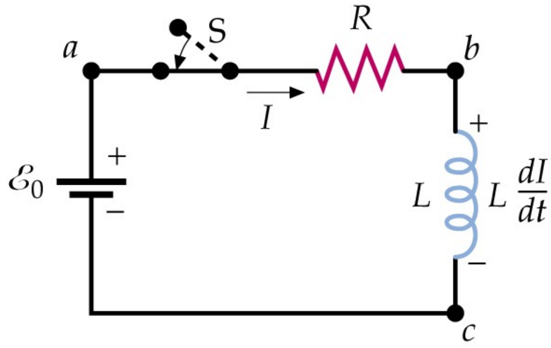
(g) Suponha que passamos a aumentar a corrente numa taxa de 100 A/s. Qual será a fem induzida no solenóide (em módulo)?

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \mathcal{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \simeq 33\ \mathrm{mV}$$

6. **Circuito RL**

Considere o circuito da figura abaixo, onde a chave S, inicialmente aberta, é fechada em $t = 0$. Tome $\mathcal{E} = 12$ V, $R = 3\ \Omega$ e $L = 0,6$ H.

(a) Qual a constante de tempo do sistema e o valor final da corrente? Esboce um gráfico de I vs. t, indicando o valor final da corrente. Não se esqueça de colocar escala e unidades.



A corrente em função do tempo é descrita por[2]

$$I(t) = I_m \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad I_m = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{\mathcal{L}}{R}$$

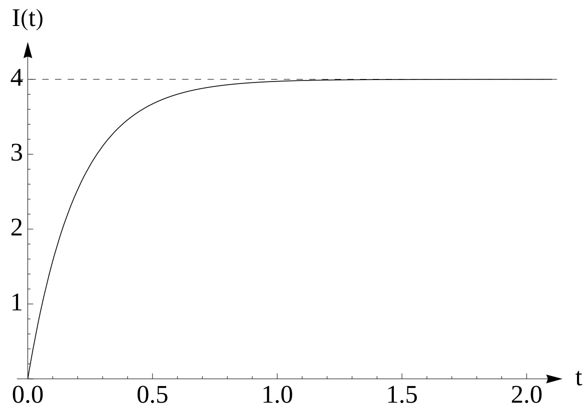
A constante de tempo será

$$\tau = \frac{\mathcal{L}}{R} = \frac{0,6}{3} = 0,2 \text{ s}$$

e a corrente final será

$$I_m = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12}{3} = 4 \text{ A}$$

Um gráfico de $I(t)$ está ilustrado na figura abaixo.



(b) Calcule quantas constantes de tempo são necessárias para a corrente atingir 90%, 99% e 99,9% do seu valor final. Dica: desenvolva uma fórmula para o número de constantes de tempo em função de uma fração f da corrente final; depois basta aplicar esta fórmula para diferentes valores.

Seja f tal que

$$I = fI_m, \qquad 0 \leq f \leq 1$$

Substituindo na minha solução para $I(t)$ eu obtenho

$$f = 1 - e^{-t/\tau}$$

[2]Esta fórmula é a solução da equação diferencial

$$\mathcal{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = \mathcal{E}$$

provida da condição inicial $I(t = 0) = 0$. Esta equação, por sua vez, é obtida aplicando ao circuito a lei de Faraday (que alguns livros infelizmente chamam de lei de Kirchhoff, que é válida somente para campos conservativos — o que não é o caso no presente problema).

Rearranjando e tirando o log (na base e) de ambos os lados eu obtenho

$$\frac{t}{\tau} = -\log(1 - f)$$

Este é o número desejado; ou seja, eu não quero saber o tempo (em segundos, etc.) mas o *número de constantes de tempo*, que é precisamente a razão t/τ; se $t/\tau = 20$ então foram necessárias 20 constantes de tempo, etc. Com isso eu obtenho os seguintes resultados:

f	0.9	0.99	0.999
t/τ	2,3	4,6	6,9

(c) Qual a taxa de variação inicial da corrente? Qual a taxa de variação da corrente quando ela corresponde à 50% do seu valor final?

Há duas formas de resolver este problema.

(1) Diretamente da solução, $I(t) = I_m(1 - e^{-t/\tau})$. A taxa de variação da corrente (y) será

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{I_m}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}/R}{\mathcal{L}/R}e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}}e^{-t/\tau}$$

Quando $t = 0$ eu obtenho $y(0) = \mathcal{E}/\mathcal{L} = 20$ A/s. Quando $I(t)$ é 50% do valor final, eu posso utilizar o mesmo método do item anterior para obter

$$e^{-t_{1/2}/\tau} = 1 - f = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Assim

$$y(t_{1/2}) = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}}\frac{1}{2} = 10 \text{ A/s}$$

Ou seja, quando a corrente atinge 50% do seu máximo, sua taxa de variação já se reduziu pela metade.

(2) Diretamente da Eq. diferencial, $\mathcal{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = \mathcal{E}$.[3] Isolando a derivada obtemos

$$y(t) := \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{E} - IR}{\mathcal{L}}$$

Em $t = 0$ temos que $I = 0$ e portanto $y(0) = \mathcal{E}/\mathcal{L} = 20$ A/s, assim como antes. Em $t_{1/2}$, por definição, $I = I_m/2 = 2A$. Substituindo valores chegamos a $y(t_{1/2}) = 10$ A/s. Essa rota é muito mais simples: não foi necessário calcular nenhuma derivada e nenhum tempo característico.

(d) No instante onde a corrente corresponde à 50% do seu valor final, encontre a taxa com que a bateria fornece energia ao sistema (P_B), a taxa com que energia é dissipada na forma de calor no resistor (P_R), e a taxa com que energia é armazenada no indutor (P_L). Analise os seus resultados em termos da conservação de energia no sistema.

Em $t_{1/2}$ a corrente será $I_{1/2} = I_m/2 = 2$ A. A potência fornecida pela bateria é simplesmente

$$P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}I_{1/2} = 24 \text{ W}$$

Já a potência dissipada na forma de calor no resistor será

$$P_R = RI_{1/2}^2 = 12 \text{ W}$$

A *"taxa com que energia é armazenada no indutor"* requer uma atenção um pouco maior. Em primeiro lugar, note que com o passar do tempo estamos armazenando energia no indutor já que

$$U_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\mathcal{L}[I(t)]^2$$

[3] Obrigado ao Bruno Pires pela dica.

Como $I(t)$ começa em zero e tende ao valor máximo (I_m), $U_{\mathcal{L}}$ também deve necessariamente fazer algo semelhante. A taxa com que armazenamos energia é simplesmente a derivada da energia:

$$P_{\mathcal{L}} = \frac{\mathrm{d}U_{\mathcal{L}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I(t)]^2$$

Aqui devemos tomar um pouco de cuidado: estamos derivando $[I(t)]^2$ com relação ao *tempo*; precisamos usar a regra da cadeia:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I(t)]^2 = 2I\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

No item anterior calculamos $\mathrm{d}I/\,\mathrm{d}t$ em $t_{1/2}$. Substituindo os valores obtemos

$$P_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(0,6)\Big[2(2)(10)\Big] = 12 \text{ W}$$

Ufa! Ainda bem! $24 = 12 + 12$

$$P_{\mathcal{E}} = P_R + P_{\mathcal{L}}$$

Uma parcela da energia fornecida pela bateria é dissipada pelo resistor e a outra é armazenada no indutor.

7. Solenóides preenchidos com materiais magnéticos

Considere um solenóide com 400 voltas e 20 cm de comprimento, por onde passa uma corrente de 4 A. Encontre o campo externo (produzido pelas correntes que passam pelo solenóide) e o campo total quando

(a) não há nenhum material dentro do solenóide.

Na presença de materiais magnéticos o campo total se escreve

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\text{ext}} + \mu_0\boldsymbol{M}$$

Aqui $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ se refere ao campo produzido por um *agente externo*, neste caso o campo do solenóide, produzido pela corrente $I = 4$ A (não confunda com o campo *externo ao solenóide*, que além de ser aproximadamente nulo, não tem utilidade nenhuma no presente contexto!). Na ausência de qualquer material, B e B_{ext} se igualam e podem ser calculados através da fórmula usual para o campo de um solenóide:

$$B = B_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 NI}{L} \simeq 0,0100531 \text{ T}$$

(b) o solenóide é preenchido com cromo (Cr é paramagnético com susceptibilidade $\chi = 2,7 \times 10^{-4}$).

O Cromo é paramagnético (o que pode ser visto do fato que sua susceptibilidade é positiva). A definição de susceptibilidade é

$$\mu_0 M = \chi B_{\text{ext}}$$

Portanto, o campo total se torna

$$B = B_{\text{ext}}(1+\chi)$$

O campo externo é o mesmo, pois depende exclusivamente da corrente no solenóide. Substituindo valores, obtemos para o campo total,

$$B = B_{\text{ext}}(1+\chi)(0,0100531) \times (1 + 2,7\times10^{-4}) \simeq 0,0100558 \text{ T}$$

Uma mudança ínfima!

(c) o solenóide é preenchido com ferro puro, cuja magnetização vale $1,2 \times 10^6$ A/m.

Mais uma vez: o campo externo permanece o mesmo. O campo total é obtido novamente da mesma relação:

$$B = B_{\text{ext}} + \mu_0 M$$

Da magnetização do ferro teremos que

$$\mu_0 M = 1,50796 \text{ T}$$

Portanto,

$$B = 1,5180 \text{ T}$$

Ao contrário do Cr, agora o campo é dominado quase que exclusivamente pela contribuição do material.

(d) Suponha agora que preenchemos o solenóide com um líquido. No processo, mediu-se que o campo magnético dentro do solenóide *diminuiu* por 0,004%. Encontre a susceptibilidade do líquido. Ele é diamagnético ou paramagnético?

Partimos da relação

$$B = B_{\text{ext}}(1+\chi)$$

Isolando χ obtemos

$$\chi = \frac{B - B_{\text{ext}}}{B_{\text{ext}}}$$

Lembrando que $0,004\% = 4 \times 10^{-5}$ obtemos

$$\chi = -4 \times 10^{-5}$$

O material é portanto diamagnético; ele diminui o campo externo e portanto tem susceptibilidade negativa.